EQUILIBRIO ECONOMICO GENERALE

MASSIMILIANO FERRARA

Universitá "Mediterranea" di Reggio Calabria
massimiliano.ferrara@unirc.it

Per effettuare un'analisi che sia completa ed esaustiva degli aspetti teorici fondamentali della teoria matematica dell'equilibrio economico generale, non si possono tralasciare gli indubbi legami che esistono tra tale teoria e la teoria dei giochi cooperativi. Nella letteratura economico-matamatica é fondamentale l'originale contributo scientifico offerto in tale direzione da Shubik nel 1959, il quale nell'analisi di mercato evidenzió con precisione il legame esistente tra le curve dei contratti di Edgeworth e la nozione di *core* (ossia di nucleo del gioco) della teoria dei giochi, sviluppata da Shapley (1953) e Gillies (1953). Gli stessi Shapley e Subik nel 1969 formalizzarono modelli di equilibrio economico generale in termini di giochi (cooperativi di mercato). Nel 1963 Debreu e Scarf hanno fornito la dimostrazione che per larghe economie, l'equilibrio walrasiano di concorrenza tende a coincidere con il *core*. L'apporto fondamentale fu dato peró da Debreu e Arrow nel 1952 e nel 1954, definito in letteratura, come *approccio dell'economia asratta* e di cui in queste pagine daró una formalizzazione, seguendo un percorso scientifico che porta all'utilizzo di strumenti propri della Teoria dei Giochi.

Consideriamo il *modello walrasiano di puro scambio* con i seguenti elementi:

- $N = \{1, \cdots, n\}$ sia l'insieme dei consumatori;
- $w^i \in \mathbb{R}^m_+$ sia il vettore delle dotazioni iniziali dei beni di consumo del soggetto i, le cui componenti sono le quantitá dei beni;
- $p \in \mathbb{R}^m_+$ sia il vettore dei prezzi con i quali si scambiano i beni negli m mercati esistenti; le sue componenti $(p_1, \ldots, p_m)$ sono tutte non negative;
- $x^i \in X^i \subset \mathbb{R}^m_+$ sia il vettore delle quantitá finali dei beni di consumo demandate da i e X^i, l'insieme delle possibilitá di consumo per i.

Le componenti dei vettori w^i e x^i sono positive e non tutte nulle, e tali da verificare per ogni vettore dei prezzi p il vincolo di bilancio:

$$\langle pw^i \rangle = \langle px^i \rangle \ \ \forall i \in N$$

ovvero i due prodotti scalari tra vettori, e quindi somme di prodotti tra componenti corrispondenti, coincidono. Inoltre, si sa che i prezzi che si formano sul mercato devono verificare la seguente relazione:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1;$$

ne segue che lo spazio dei prezzi Φ é un *simplesso di dimensione* $m-1$ *di* $\mathbb{R}^m_+$.

Definizione 1. *Il vettore* $p^\star$ *dicesi di equilibrio se si verifica:*

$$\sum_{i \in N} w^i = \sum_{i \in N} x^{i\star}$$

cioé la somma delle dotazioni iniziali di ciascun bene é uguale a quella delle quantitá finali dello stesso bene, indicando con $x^{i\star}$ *il paniere che massimilizza l'utilitá di ogni* $i \in N$*.*

Osservazione 1. *Nel seguito si consideranno funzioni utilitá* $u(x)$ *continue, monotone crescenti e concave.*

Il modello che stiamo presentando ammetterá soluzione di equilibrio che conseguono al problema di massimo vincolato del consumatore i, $\forall i \in N$, cosí formalizzato:

$$\max u^i(x^i) \quad \text{s.v} \quad x^i \in B(pw^i) \tag{1}$$

essendo $B(pw^i) = \{x^i \in X^i : px^i \leq pw^i\} \subset X^i$, ossia l'insieme dei panieri compatibili con il vincolo di bilancio in corrispondenza di p e di quello di dotazione w^i. Risolvendo il problema (1) si ottiene la quantitá ottimale $x^{i\star}$ demandata da i come funzione di p e di w^i

$$x^i = f^i(p, w^i)$$

denominata *funzione di domanda di* i. Da ció consegue anche la validitá della *legge di Walras* ossia:

$$p(w - x) = 0$$

dove $x = (x^1, \dots, x^i, \dots x^n)$ é il vettore delle scelte di ogni i per tutti i beni esistenti in corrispondenza di p. Possiamo adesso fornire la definizione di *equilibrio* del sistema economico.

Definizione 2. Un *equilibrio di scambio* per il sistema in esame 'e un insieme di $n+1$ vettori $(x^{1\star}, \dots, x^{n\star}, p^\star)$ che soddisfano il problema di massimo vincolato e tale che si abbia:

$$\sum_{i=1}^{n} w^i_j = \sum_{i=1}^{n} x^{i\star}_j \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Un siffatto sistema di $n+1$ vettori, che definisce l'equilibrio, appartiene all'insieme $\mathcal{E} = \{(x,p)|x \in X, p \in \Phi\} = X \times \Phi$ essendo $x = (x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) \in X = X^1 \times \ldots X^n \subset \mathbb{R}_+^{mn}$. Tale insieme $\mathcal{E}$ include tutti i possibili mercati (anche quelli in cui non vi é equilibrio) si basa sull'importante definizione di *economia astratta* (Arrow-Debreu 1952-54).

Definizione 3. Un'economia é definita da una coppia $e(w, f)$ i cui elementi sono i vettori $w \in \Omega \subset \mathbb{R}_+^{mn}$, dotazioni di tutti i beni di ogni i, ed il vettore f le cui componenti sono le n funzioni di domanda degli n soggetti operanti nel sistema, ciascuna definita da $\Omega \times \Phi$ in $\mathbb{R}_+^m$ e tali da verificare le leggi di Walras.

Facendo variare w e f, soddisfabdo le leggi di Walras, si individuano tutte le economie possibili, raccolte in un insieme E, definito *spazio delle economie astratte*. Ogni teoria dell'equilibrio economico generale stabilisce una corrispondenza ϕ_E tra i due spazi (E ed $\mathcal{E}$) associnado ad ogni economia $e \in E$ un sottoinsieme $\mathcal{E}^\star \subseteq \mathcal{E}$ i cui elementi sono stati di equilibrio $(x^\star, p^\star)$. L'operatore ϕ_E é del tutto equivalente all'operatore di Walras $w : w \to (p, w)$, xon p di equilibrio per l'economia caratterizzata da w. Ponendo $e = (w, f)$ ed $e' = (w', f')$ graficamente avremo:

INSERIRE GRAFICO

Un generico stato di equilibrio $(x^\star p^\star) \in \mathcal{E}^\star$ puó interpretarsi come un equilibrio di un gioco generalizzato. Ricordiamo la definizione di gioco generalizzato:

Definizione 4. Un *gioco generalizzato* Γ_g consiste in:

(1) un insieme di giocatori $N = \{1, \ldots, n\}$;
(2) un insieme di strategie $S^I \subset \mathbb{R}^n, \ \forall i$;
(3) una funzione di pay-off $u^i(s), \ \forall i$, con $s = (s^1, \ldots, s^n) \in S$ essendo $S = \prod_{i=1}^n S^i$;
(4) una funzione $\varphi^i, \ \forall i$, che associa ad ogni n-pla di strategie degli altri giocatori un sottinsieme non vuoto dell'insieme delle strategie proprie, che risulta sottodominio ammissibile per la sua funzione di pagamento:

$$\varphi^i : S^1 \times \ldots \times S^{i-1} \times S^{i+1} \times \ldots \times S^n \to 2^{S^i}$$

dove 2^{s^i} indica l'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di S^i. ϕ^i é una multifunzione che associa ad ogni n.pla di strategie degli altri giocatori si associano tutte le possibili reazioni del soggetto preso in esame.

Possiamo a questo punto introdurre l'importante teorema:

Teorema 1. Sia un modello walrasiano di puro sacmbio visto come gioco generalizzato ad $n+1$ consumatori ed agenti, ossia:

$$\Gamma_g = \{(X^i)_{i=1}^n, \Phi_(U_i)i = 1^{n+1}, (\phi^i)_{i=1}^{n+1}\}$$

dove $(X^i)_{i=1}^n$ e Φ rappresentano gli spazi delle strategie degli $n+1$ partecipanti al cioco, coincidenti con gli insiemi dei consumi possibili ed il simplesso dei prezzi:

$$u(x^i) = u^i(x^1, \dots x^n, p), \ \ \forall p \in \Phi$$
$$u^{n+1}(x^1, \dots x^n, p) = \sum_{j=1}^{m} p_j \min[(w_j^{n+1} - x_i^{n+1}), 0]$$

con $w_j^{n+1} = \sum_{i=1}^n w_j^n$ e $x_j^{n+1} = \sum_{i=1}^n x_j^i$, con $j = 1, \dots, m$.

- φ^i, $i = 1, \dots, n$, é una corrispondenza che associa ad ogni n-pla di strategie di consumo $(x^1, \dots, x^n)$ l'insieme $B(p, w^i) \subset X^i$;
- φ^{n+1} é una corrispondenza che associa ad ogni n-pla di strategie $(x^1, \dots, x^n)$ l'intero simplesso dei prezzi Φ.

Allora ogni equilibrio di scambio é un punto di equilibrio di Γ_g e viceversa.

Proof. Proviamo dapprima l'equivalenza tra le condizioni di equilibrio di puro scambio e quelle di equilibrio del gioco generalizzato, cioé:

$$\begin{cases} \max_{x^i \in B(p,w^i)} u^i(x^i) \\ \sum_{i=1}^n w_j^i = \sum_{i=1}^n x_j^{i\star}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{x^i \in B(p,w^i), p \in \Phi} u^i(x^1, \dots, x^n, p) \quad \forall i \in N \\ \max_{p \in \Phi} u^{n+1}(x^1, \dots, x^n, p). \end{cases}$$

□

Il primo medello come si puó facilemnte evincere é di tipo walrasiano. L'equivalenza tra le prime due condizioni é immediata.Per dimostrare l'equivalenza tra le seconde consideriamo che $\forall j = 1, \dots, m$

$$\sum_{i=1}^{n} w_j^i = \sum_{i=1}^{n} x_j^{i\star} \Leftrightarrow (w_j^{n+1} - x_j^{n+1}\star) = 0$$

inoltre

$$(w_j^{n+1} - x_j^{n+1)star} = 0 \ \ \forall j = 1, \dots, m \Leftrightarrow u^{n+1}(x^{1\star}, \dots x^{(n+1)\star}, p) = 0$$

infine

$$u^{n+1}(x^{1\star}, \dots x^{(n+1)\star}) \leq u^{n+1}(x^{1\star}, \dots x^{(n+1)\star}, p) \ \ \forall p \in \Phi$$

perché il primo membro é non positivo $\forall p \in \Phi$ e il secondo é coincidente con lo zero. Questa disuguaglianzaci porta ad asserire che $u^{n+1}(\cdot)$ é il massimo valore della funzione nel simplesso Φ.