



Corso di Laurea in Scienze Economiche L-33

Matematica per l'Economia
SECS-S/06 - 8 CFU

Prof. Massimiliano Ferrara

massimiliano.ferrara@unirc.it
massimiliano.ferrara@unibocconi.it

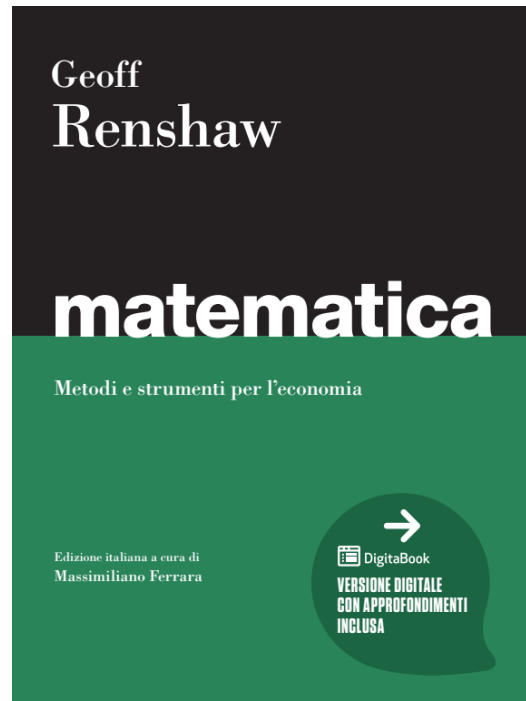
A.A. 2022/2023

Geoff Renshaw

Matematica. Metodi e strumenti per l'economia

Edizione italiana a cura di Massimiliano Ferrara

Capitolo 7 – Le derivate nello studio di funzione



 Egea

Funzioni crescenti e decrescenti

Strettamente crescenti = y aumenta all'aumentare di x .

Strettamente decrescenti = y diminuisce all'aumentare di x .

Una funzione può essere crescente/decrescente anche solo su un dato intervallo di x .

Poiché $\frac{dy}{dx}$ misura la pendenza, $\frac{dy}{dx} > 0$ o < 0 ci dice se la funzione è crescente oppure decrescente.

(È una condizione sufficiente, ma non necessaria; un controesempio è dato da $y = x^3$)

Valori massimi e minimi

La fig. 7.3 illustra che cos'è un massimo o un minimo locale.

Per localizzare tali punti possiamo utilizzare le derivate, in quanto in essi le tangenti sono orizzontali. Vengono perciò detti **punti stazionari**.

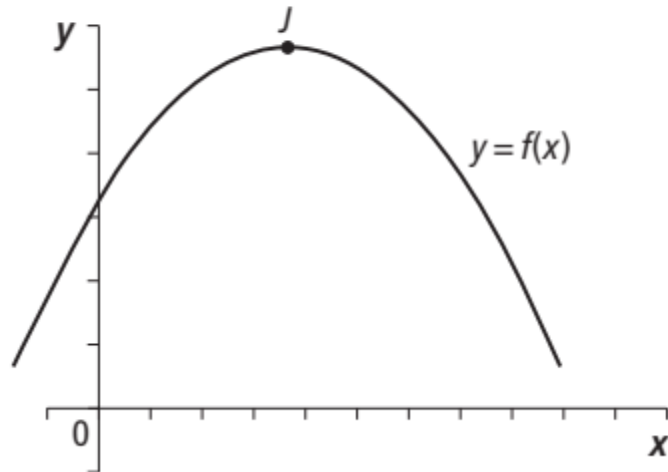
Nuova idea: poiché $\frac{dy}{dx}$ è una funzione di x , si può tracciarne il grafico con x sull'asse orizzontale e $\frac{dy}{dx}$ su quello verticale.

Esempio: $y = -x^2 + 10x$, $\frac{dy}{dx} = -2x + 10$

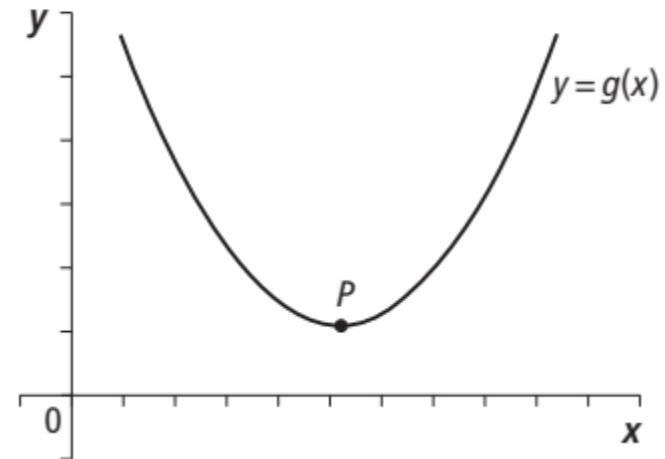
Il grafico di $\frac{dy}{dx}$ è quello di una funzione lineare con pendenza -2 e intercetta 10 .

Figura 7.3 Valori massimo e minimo di una funzione

(a) La funzione $y = f(x)$ ha un massimo in J



(b) La funzione $y = g(x)$ ha un minimo in P



Massimi

Osserva la fig. 7.4.

La funzione $y = -x^2 + 10x$ ha un massimo locale in J , dove $x = 5$.

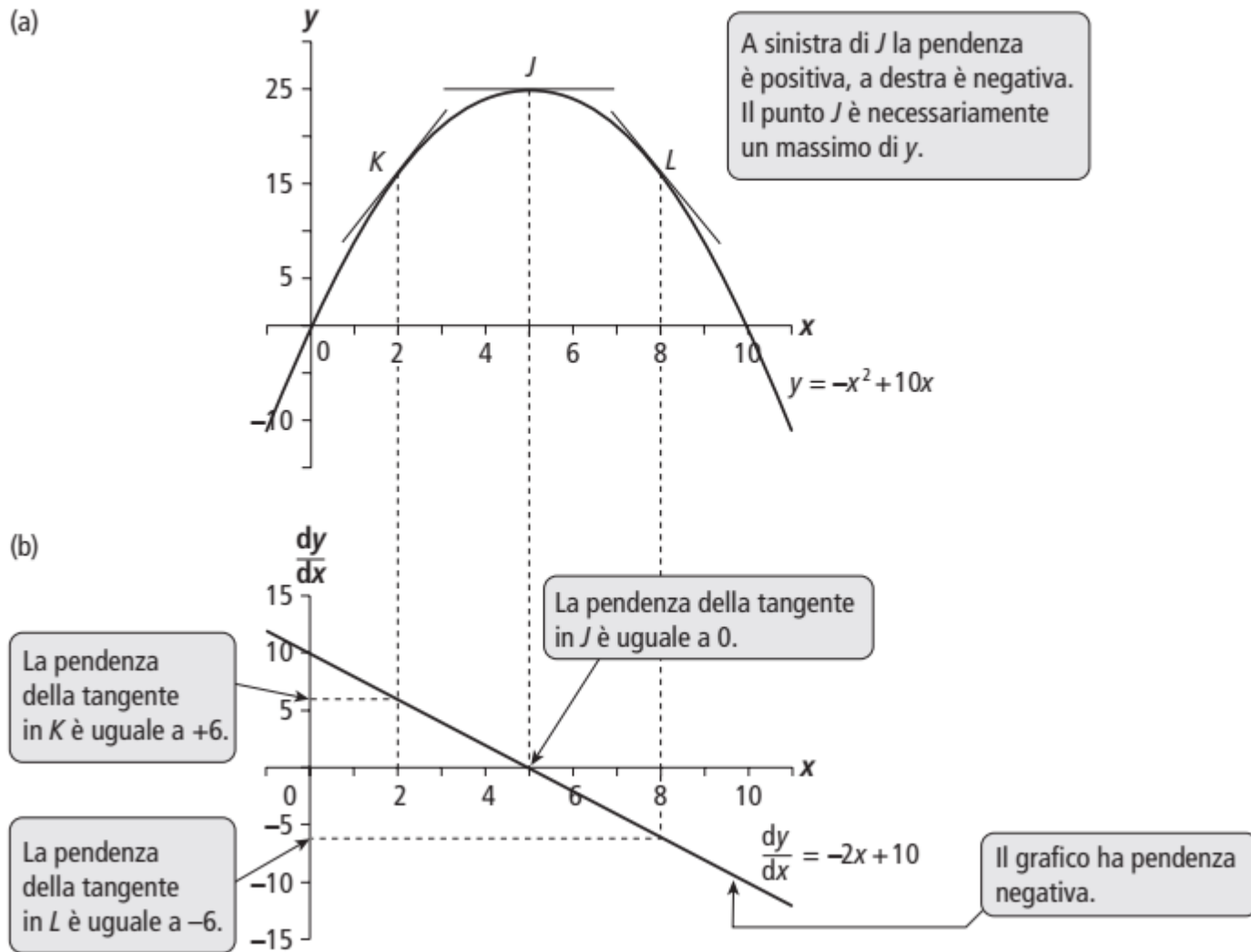
La derivata misura la pendenza della retta tangente, che è positiva in K , zero in J (tangente orizzontale) e negativa in L .

Ciò è confermato dal grafico di $\frac{dy}{dx} = -2x + 10$.

Esso ha pendenza verso il basso e interseca l'asse x in $x = 5$, dove y raggiunge il suo valore massimo.

Perciò per $x = 5$, si ha $\frac{dy}{dx} = -2x + 10 = 0$.

Figura 7.4 Valore massimo della funzione $y = -x^2 + 10x$



Minimi

Osserva la fig. 7.5.

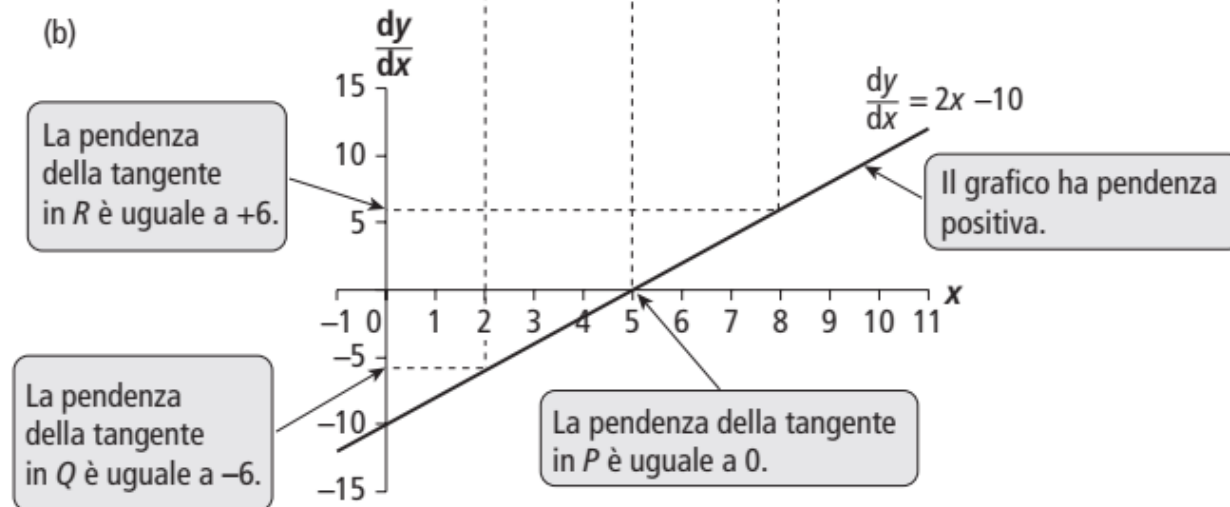
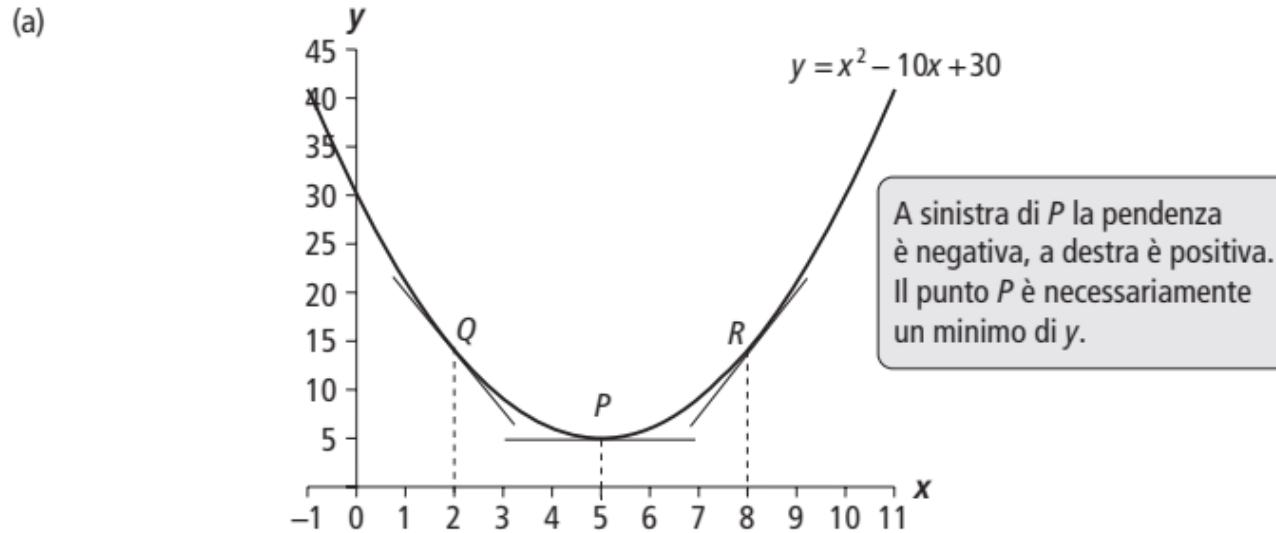
La funzione $y = x^2 - 10x + 30$ ha un minimo locale in P , dove $x = 5$.

Questa volta la derivata è negativa in Q , zero in P (tangente orizzontale) e positiva in R .

Ciò è confermato dal grafico di $\frac{dy}{dx} = 2x - 10$. Esso ha pendenza verso l'alto e interseca l'asse x in $x = 5$, dove y raggiunge il suo valore minimo.

Perciò per $x = 5$, si ha $\frac{dy}{dx} = 2x - 10 = 0$.

Figura 7.5 Valore minimo della funzione $y = x^2 - 10x + 30$



Come distinguere un massimo da un minimo?

La risposta si trova osservando il grafico della derivata. Se il punto in esame è un massimo (fig. 7.4), il grafico di $\frac{dy}{dx}$ è decrescente; se è un minimo (fig. 7.5) tale grafico è crescente.

Nuova idea: la derivata seconda

Si tratta della «derivata della funzione derivata», $\frac{d}{dx}$ di $\frac{dy}{dx}$, e misura la pendenza del grafico di $\frac{dy}{dx}$. La si trova applicando le regole di derivazione alla funzione derivata prima.

Nel caso del **massimo** (fig. 7.4) avevamo $\frac{dy}{dx} = -2x + 10$,

perciò $\frac{d}{dx}$ di $\frac{dy}{dx}$ -2 (**NEGATIVA**)

Nel caso del **minimo** (fig. 7.5) avevamo $\frac{dy}{dx} = 2x - 10$,

perciò $\frac{d}{dx}$ di $\frac{dy}{dx}$ 2 (**POSITIVA**)

Notazione: la scrittura $\frac{d}{dx} \frac{dy}{dx}$ è complicata, perciò la scriviamo nella forma $\frac{d^2y}{dx^2}$

o nella forma $f''(x)$.

Riassumendo:

Sia y una funzione («regolare» e continua nel punto P).

$$\text{Se } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ e } \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \quad \text{MAX}$$

$$\text{Se } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ e } \frac{d^2y}{dx^2} > 0 \quad \text{MIN} \quad (\text{Regola 7.1})$$

Nuova idea: condizioni del primo ordine e del secondo ordine

Esempi: vedi gli Esempi 7.5 e 7.6 nel libro.

Flessi

Premessa: la derivata terza

È la derivata $\frac{d}{dx}$ di $\frac{d^2y}{dx^2}$, e misura la pendenza del grafico di $\frac{d^2y}{dx^2}$.

La si trova applicando le regole di derivazione alla derivata

seconda. La si scrive in maniera più compatta come $\frac{d^3y}{dx^3}$ o $f'''(x)$.

PUNTO CHIAVE: un flesso è un massimo o un minimo non della funzione, bensì della sua pendenza, $\frac{dy}{dx}$.

Per la Regola 7.1, il max/min di una funzione si trova dove la derivata prima è nulla e la derivata seconda è positiva (min) o negativa (max).

La derivata prima di $\frac{dy}{dx}$ è $\frac{d^2y}{dx^2}$ e la derivata seconda è $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Pertanto, in un punto di flesso si ha (Regola 7.2):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ e } \frac{d^3y}{dx^3} > 0 \text{ (per MIN di } \frac{dy}{dx}) \text{ o } < 0 \text{ (per MAX di } \frac{dy}{dx})$$

Flessi: Esempio 1 (1)

Osserva la fig. 7.8.

Nella parte (a), il punto K , dove $x = 3$, è un punto stazionario perché la tangente è orizzontale (quindi $\frac{dy}{dx} = 0$), ma è anche un punto di flesso perché $\frac{dy}{dx}$ vi assume il suo valore minimo (zero). È un minimo perché $\frac{dy}{dx}$ è positiva sia a destra sia a sinistra di K .

Ciò è confermato dalla parte (b), dove il grafico di $\frac{dy}{dx}$ ha un minimo per $x = 3$.

Flessi: Esempio 1 (2)

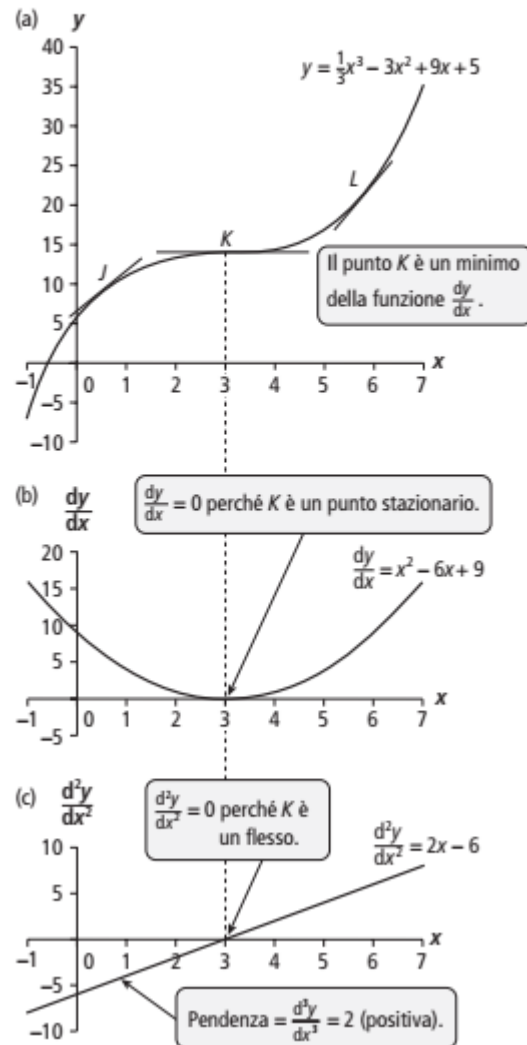
Un'ulteriore conferma viene dalla parte (c), dove per $x = 3$ si ha:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^3y}{dx^3} > 0$$

Perché questo punto è un minimo di $\frac{dy}{dx}$.

Figura 7.8

Grafico di $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + 5$
con un punto stazionario che è un flesso



Flessi: Esempio 2 (1)

Osserva la fig. 7.9.

È identica alla fig. 7.8 tranne per il fatto che, nella parte (a), Q dove $x = 3$ è ora un massimo di $\frac{dy}{dx}$ anziché un minimo.

Ciò perché $\frac{dy}{dx} = 0$ in Q ma < 0 a sinistra e a destra del punto (e 0 è maggiore di ogni numero negativo!)

La parte (b) lo conferma: il grafico di $\frac{dy}{dx}$ ha un punto di massimo in $x = 3$.

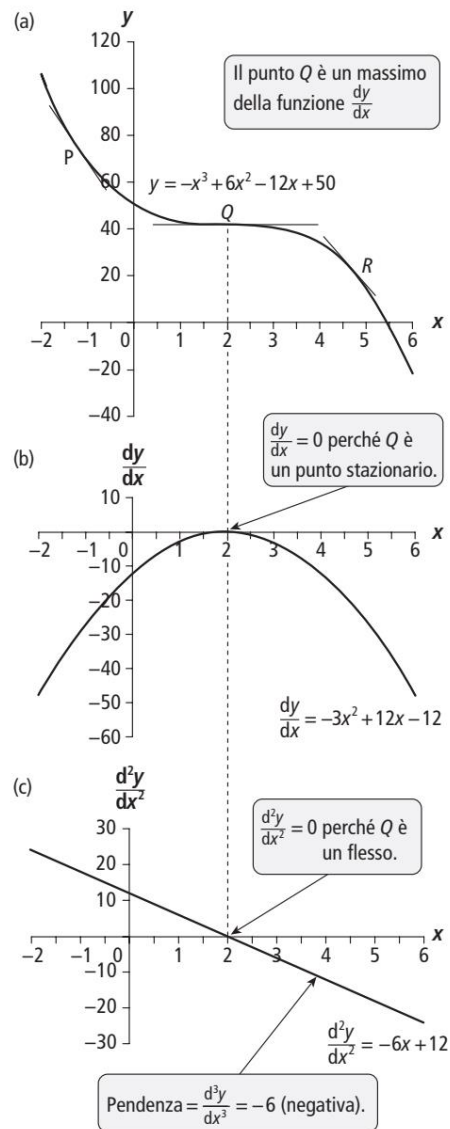
Flessi: Esempio 2 (2)

Di conseguenza, nella parte (c) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ per $x = 3$ dato che questo punto è un punto stazionario di $\frac{dy}{dx}$.

Infine, nella parte (c) abbiamo $\frac{d^3y}{dx^3} > 0$ per $x = 3$ dato che questo punto è un punto di massimo di $\frac{dy}{dx}$ (anziché di minimo).

Figura 7.9

Grafico di $y = -x^3 + 6x^2 - 12x + 50$
con un punto stazionario che è un flesso



Riassumendo:

Facciamo riferimento al punto K in fig. 7.8 e al punto Q in fig. 7.9:

$\frac{dy}{dx} = 0$ perché K e Q sono punti stazionari (tra l'altro)

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ perché K e Q sono punti di flesso (pendenza max/min)

$\frac{d^3y}{dx^3} > 0$ in K perché è un minimo della pendenza

$\frac{d^3y}{dx^3} < 0$ in Q perché è un massimo della pendenza (Regola 7.2)

Punti di flesso che non sono punti stazionari

Nelle figg. 7.8 e 7.9 comparivano punti di flesso che erano anche punti stazionari. Tuttavia un punto di flesso non deve necessariamente essere anche un punto stazionario. Osserva la fig. 7.10, dove compaiono 4 tipi di punti di flesso che non sono punti stazionari. P , Q , L e M non sono punti a tangente orizzontale, perché $\frac{dy}{dx} \neq 0$.

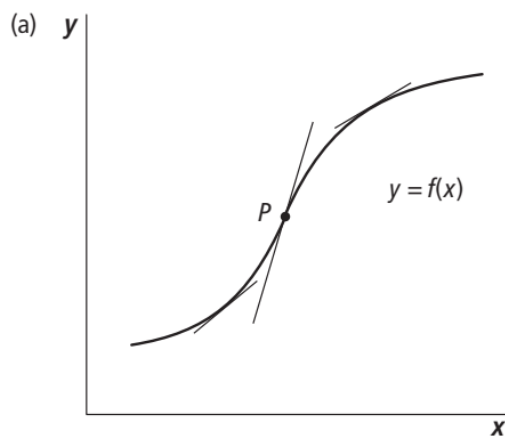
P e L sono massimi di $\frac{dy}{dx}$, per cui $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ e $\frac{d^3y}{dx^3} < 0$

Q e M sono minimi di $\frac{dy}{dx}$, per cui $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ e $\frac{d^3y}{dx^3} > 0$

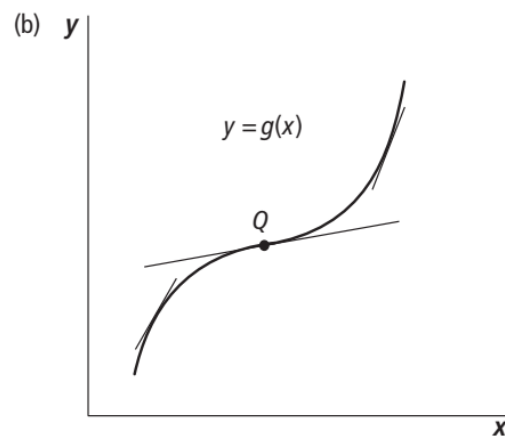
Osservazione:

In un flesso, la tangente interseca il grafico della funzione.

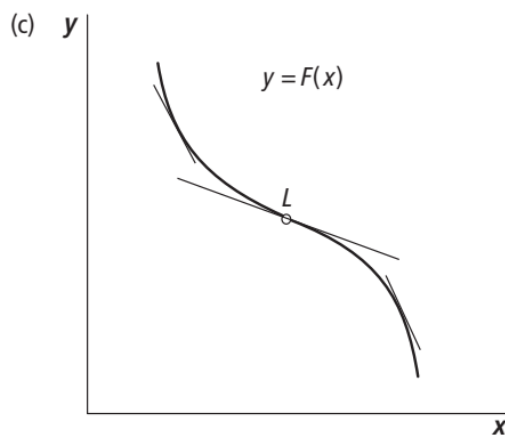
Figura 7.10 Flessi che si presentano in punti non stazionari



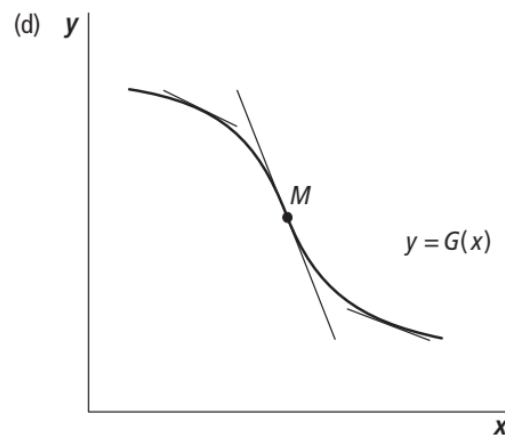
P è un flesso ed è un massimo per $\frac{dy}{dx}$
(la pendenza è positiva e in P è massima).



Q è un flesso ed è un minimo per $\frac{dy}{dx}$
(la pendenza è positiva e in Q è minima).



L è un flesso ed è un massimo per $\frac{dy}{dx}$
(la pendenza è negativa e in L ha valore assoluto minimo).



M è un flesso ed è un minimo per $\frac{dy}{dx}$
(la pendenza è negativa e in M ha valore assoluto massimo).

Funzioni concave e convesse

In una **funzione convessa** (o con **concavità verso l'alto**) **Convex** la pendenza $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ aumenta all'aumentare di x .

Il grafico di $\frac{dy}{dx}$ ha pendenza positiva, perciò $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

Esempi: figg. 7.15 e 7.17

In una **funzione concava** (o con **concavità verso il basso**) la pendenza $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ diminuisce all'aumentare di x .

Il grafico di $\frac{dy}{dx}$ ha pendenza negativa, perciò $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

Esempi: figg. 7.16 e 7.18

Figura 7.15

La funzione $y = 10x^2 + 5x + 20$ (avente concavità verso l'alto fra $x = 0$ e $x = 5$)

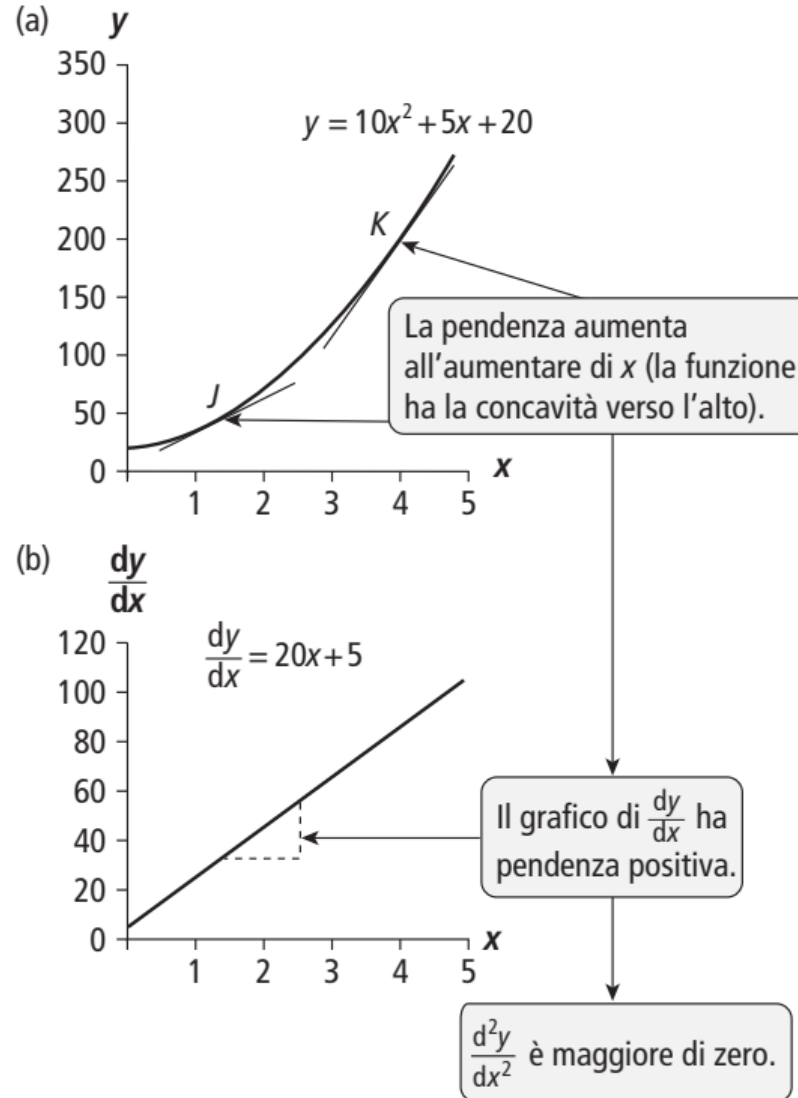


Figura 7.16

La funzione $y = -x^2 + 12x + 10$ (avente concavità verso il basso fra $x = 0$ e $x = 5$)

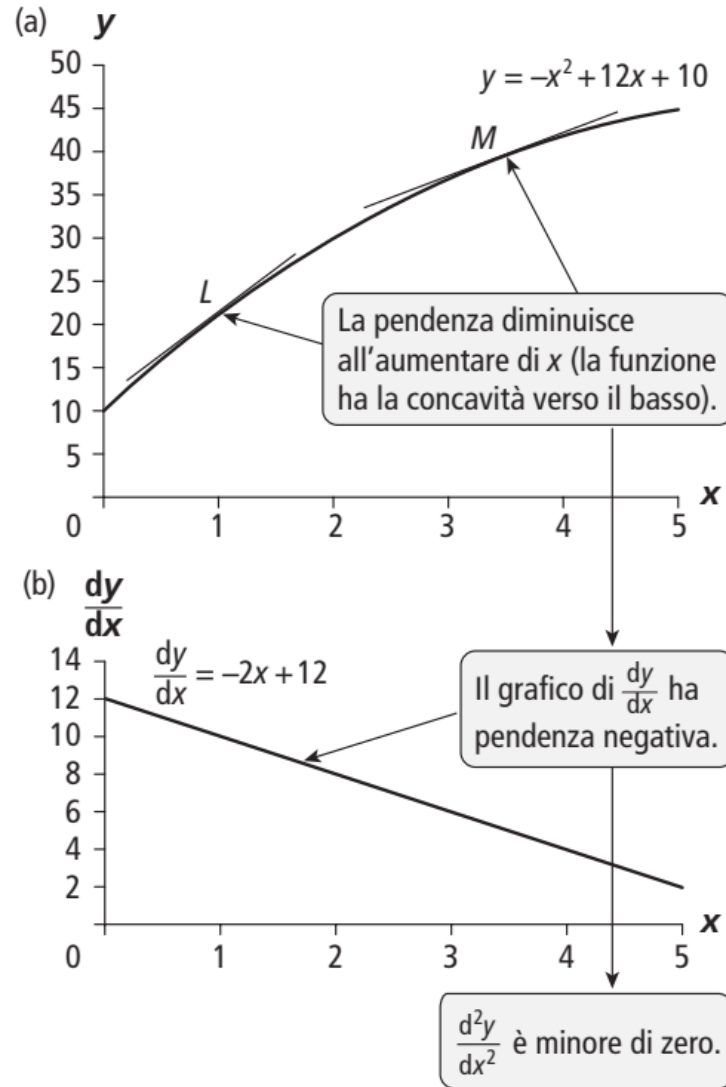


Figura 7.17

La funzione $y = x^2 - 12x + 50$ (avente concavità verso l'alto fra $x = 0$ e $x = 5$)

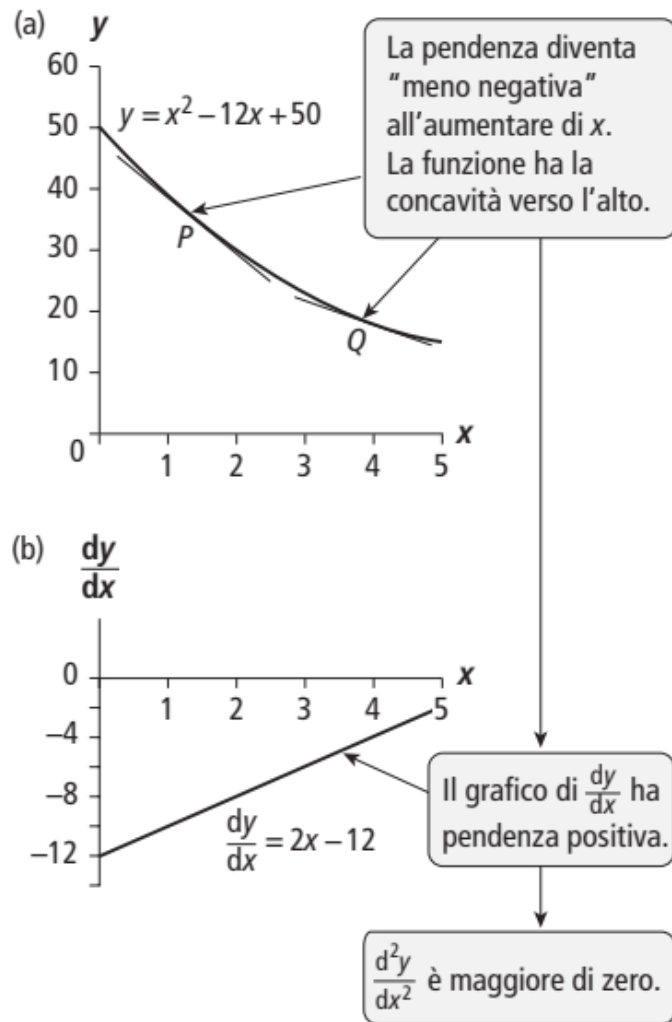
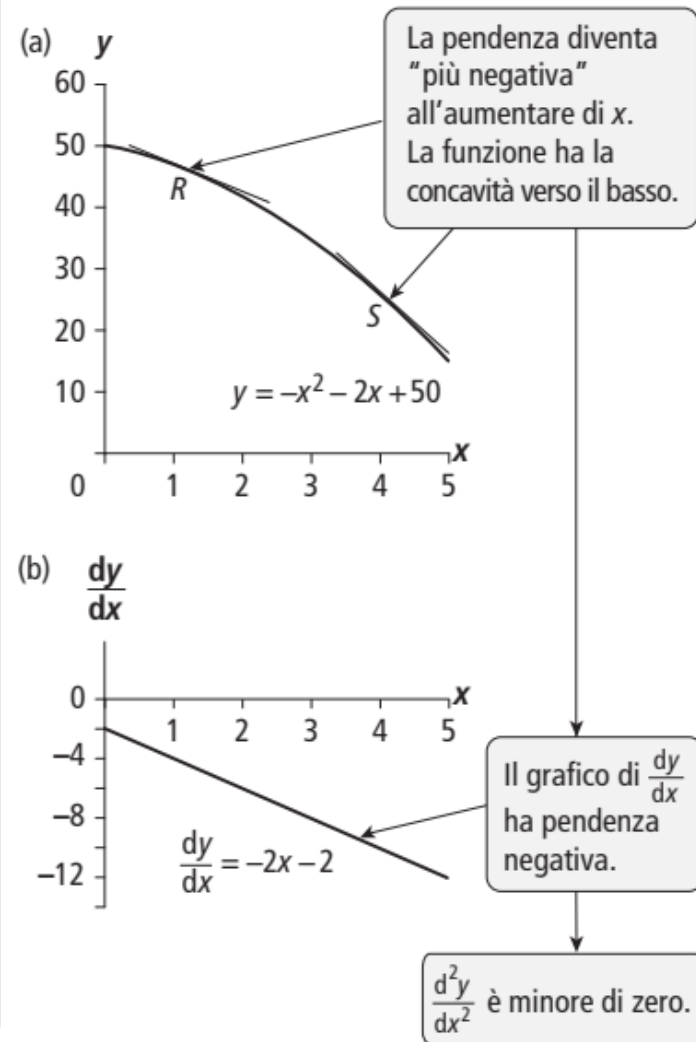


Figura 7.18

La funzione $y = -x^2 - 2x + 50$ (avente concavità verso il basso fra $x = 0$ e $x = 5$)



Differenziale di una funzione

Richiamiamo la definizione di derivata: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ciò implica che $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx è piccola.

Pertanto $\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x$ (con errore trascurabile) quando Δx è piccola, dove Δy è la

variazione di y prodotta da una piccola variazione di x , Δx . Scriveremo $dx = \Delta x$ per Δx

piccole, e analogamente $dy = \Delta y$.

Il **differenziale** della funzione y è: $dy = \frac{dy}{dx} dx$ (Regola 7.4). Esso misura

approssimativamente la variazione di y conseguente a una piccola variazione di x , dx .

Il differenziale come approssimazione lineare

La formula del differenziale contiene un leggero errore, perché assume

$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, il che non vale per la maggior parte delle funzioni. Possiamo

fare in modo che l'errore sia trascurabile assumendo che Δx sia

«piccola», in quanto allora $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Tuttavia, se la funzione è lineare,

l'errore è nullo perché $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ per ogni Δx .

Pertanto, se applicata a una funzione non lineare, la formula del differenziale tratta in effetti la funzione come se fosse lineare.

È qui che compare l'errore. Vedi la fig. 7.19 (e l'Esempio 7.11).

Un esempio di differenziale

Esempio: $y = x^2 + 4$, x cresce da 3 a 3,01.

Perciò $dx = 0,01$ e $\frac{dy}{dx} = 2x = 6$ per $x = 3$.

Dalla Regola 7.4: $dy = \frac{dy}{dx} dx = 6 \times 0,01 = 0,06$

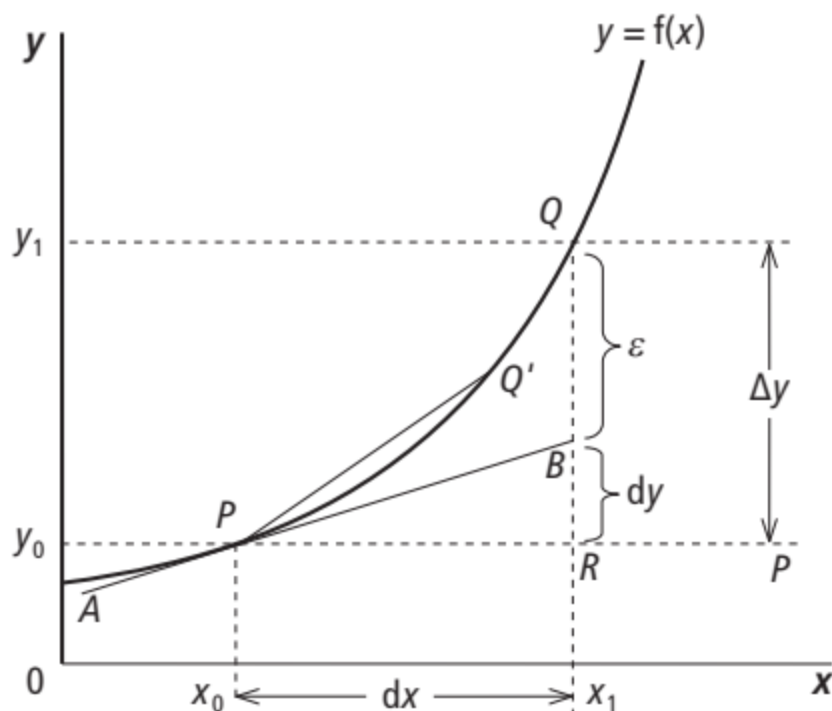
Per $x = 3$, $y = 3^2 + 4 = 13$

Per $x = 3,01$, $y = (3,01)^2 + 4 = 13,0601$

La variazione effettiva di y è $13,0601 - 13 = 0,0601$

E l'errore è $\varepsilon = 0,0601 - 0,06 = 0,0001$

Figura 7.19 La derivata prima come approssimazione della funzione $y = f(x)$



La distanza $QB = \varepsilon$ rappresenta l'errore che si commette quando si misura con dy la variazione di y , usando quindi la derivata come approssimazione lineare della funzione. Per dx che tende a zero l'errore tende a zero, perché Q tende a sovrapporsi a B .