Corso di Laurea Magistrale (LM-56) in Economia

BUSINESS ANALYTICS AND DECISIONS THEORY

Introduzione alla Ricerca Operativa:
Programmazione Lineare

A. A. 2020/2021

Docente: Massimiliano FERRARA
A cura della Dott.ssa Tiziana CIANO

Ricerca Operativa: Ieri e oggi

- La Ricerca Operativa è una disciplina relativamente giovane. Il termine *Ricerca Operativa* è stato coniato in ambito militare verso la fine degli anni '30 e deriva dal termine inglese *"Operational Research"*, ovvero la 'ricerca sulle operazioni (militari)'.
- Il termine Ricerca Operativa, si è detto, è legato alle prime applicazioni della RO per aumentare l'efficienza di operazioni militari della Seconda Guerra Mondiale.
- Ai nostri giorni la rilevanza applicativa delle tecniche della RO è riconosciuta e apprezzata in ambito industriale

Ricerca Operativa

- La **Ricerca Operativa** (nota anche come teoria delle decisioni, scienza della gestione o, in inglese, operations research -"Operational Research" in Europa) fornisce gli strumenti matematici di supporto alle attività decisionali in cui occorre gestire e coordinare attività e risorse limitate al fine di massimizzare o minimizzare una funzione obiettivo.

- La RO si occupa di formulare un problema in un modello matematico e di determinare la scelta migliore per raggiungere un determinato obiettivo rispettando vincoli che sono imposti dall'esterno e non sono sotto il controllo di chi deve compiere le decisioni.

Ricerca Operativa

- La RO si può ricondurre all'ambito della matematica applicata ma presenta forti caratteristiche interdisciplinari relative in prevalenza a matematica, informatica, economia e finanza, ingegneria ed altre.

- Trova applicazione in numerosi contesti
  - Energia
  - Trasporti e Logistica
  - Finanza
  - Produzione
  - …..

Modelli

- Modello:

  Strumento per «decodificare» un problema reale

- Proprietà dei modelli:
  - Astrazione
  - Sintesi (solo caratteristiche rilevanti)

Classificazione dei modelli

- Modelli Logico-matematici

  Riproduzione tramite relazioni logico-matematiche

- Classificazione
  - Rispetto all’evoluzione temporale
    - Statici
    - Dinamici
  - Rispetto alla presenza di elementi aleatori
    - Deterministici
    - Stocastici

L'approccio modellistico per problemi decisionali

Metodo a 5 fasi

1. IDENTIFICAZIONE DEL PROBLEMA

Viene descritto il problema in un linguaggio naturale

2. RACCOLTA DEI DATI

Vengono raccolte tutte le informazioni

3. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Il problema viene descritto in termini matematici	Modello di ottimizzazione

4. SOLUZIONE DEL PROBLEMA

Soluzione ottima	Problema ammissibile o inammissibile

5. VALIDAZIONE DELLA SOLUZIONE

Validazione della soluzione ottenuta	Revisione modello formulato

L'approccio modellistico per problemi decisionali

1. Identificazione del problema

Viene descritto il problema in linguaggio naturale, identificando l'oggetto della decisione e gli aspetti rilevanti da tenere in considerazione.

2. Raccolta dati

Vengono raccolte tutte le informazioni ritenute utili alla soluzione del problema

3. Formulazione del problema

Il problema viene descritto in termini matematici costruendo un «modello di ottimizzazione»

L'approccio modellistico per problemi decisionali

4. Soluzione del problema

Viene determinata una soluzione ottima del problema, oppure, si stabilisce che il problema è «inammissibile» (o «illimitato»).

5. Validazione della soluzione

Un errore nella formulazione potrebbe portare a una soluzione ammissibile per il modello di ottimizzazione ma non per il problema reale che si vuole risolvere: si rende quindi necessaria una quinta fase di «validazione» della soluzione ottenuta, che se insoddisfacente porta ad una «revisione » del modello formulato.

Vantaggi e Svantaggi dell'approccio modellistico

- Vantaggi
  - Maggiore comprensione del problema
  - Possibilità di eseguire delle simulazioni
- Svantaggi
  - Difficoltà di quantificare alcuni dati del modello
  - Incertezza nei dati

Il modello è uno strumento di ausilio al processo decisionale

Importanza della fase di revisione

Formulazione di un problema di ottimizzazione

- Problema di ottimizzazione

Processo di selezione della «migliore decisione» tra un insieme di scelte ammissibili

- Esempio

Una azienda leader nel settore manifatturiero deve decidere il piano di produzione ottimale in modo da soddisfare una data domanda considerando una disponibilità limitata di materie prime e minimizzando il costo complessivo

- Costruzione del modello matematico

1. Variabili
   - Esogene (parametri del problema)
   - Endogene (variabili di decisione)
2. Vincoli
3. Funzione obiettivo

Formulazione dei modelli di ottimizzazione

- Nel nostro esempio
  - Parametri → richiesta e costo delle materie prime, domanda
  - Decisioni → prodotti da realizzare
  - Vincoli → domanda da soddisfare
  - Funzione obiettivo → costo da minimizzare

- In termini matematici
  - x → decisioni (vettore o singola componente vettoriale)
  - X → insieme di ammissibilità (decisioni che soddisfano i vincoli)
  - $Z(x)$ → funzione di costo (funzione obiettivo)

Problemi di ottimizzazione

- Rappresentazione implicita

$$\min \ z(x)$$
$$\text{s. v.}$$
$$x \in X$$

N.B. si può parlare indifferentemente di problema di «massimo» o di «minimo», dal momento che una soluzione x^* che renda minima la funzione $z(x)$, massimizza al tempo stesso la funzione $-z(x)$.

Problemi di ottimizzazione

- Rappresentazione esplicita

Si assume che la regione ammissibile X sia descritta tramite un insieme finito di m vincoli funzionali del tipo

$$g_i(x) \geq b_i, \qquad i = 1, \dots, m,$$

con $\quad g_i: R^n \to R, \qquad i = 1, \dots, m \qquad x \in R^n$

Dunque:

$$\begin{aligned} &\min\ z(x) \\ &\text{s.v.} \\ &\quad g_i(x) \geq b_i, \qquad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Esiti della soluzione di un problema di ottimizzazione

- Esistenza di una soluzione ottima

Esiste una soluzione ammissibile $x^* \in X$ tale $z(x^*) \leq z(x)$, per ogni $x \in X$, mentre $z(x^*)$ è detto «ottimo» o valore ottimo

- Problema inammissibile

L'insieme X è vuoto

- Problema illimitato

Per ogni $k > 0$, esiste una soluzione $x \in X$ tale che $z(x) < -k$

Classificazione dei modelli di ottimizzazione

- Modello matematico

  Variabili + Vincoli + Funzione obiettivo

  - Variabili : sempre presenti
  - Vincoli : vincolati e non vincolati
  - Funzione obiettivo: senza obiettivo, uno o più obiettivi

- Classificazione
  - Rispetto alle variabili
    - Continua -> variabili assumo valori reali
    - Discreta -> le variabili assumono valori interi (eventualmente binarie)
  - Rispetto alla funzione di vincolo e/o obiettivo
    - Lineare -> z(x) e $g_i(x)$ sono funzioni lineari
    - Non lineare -> z(x) e/o $g_i(x)$ sono funzioni non lineari

Modelli di Programmazione Lineare (PL)

- Nel corso faremo principalmente riferimento ai modelli di PL
- Un modello di PL si ottiene assumendo che funzione obiettivo e vincoli nel modello generale siano lineari
- Il modello di PL può essere scritto come:

$$\min z(x) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

$$s.v$$

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

Vettori e matrici

Una «**matrice**» $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ detta anche matrice ($m\ x\ n$), è una tabella ordinata di ($m\ x\ n$) scalari disposti in *m righe* e *n colonne* nel seguente modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & \dots & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Introduzione alla PL

- In forma compatta un problema di PL si può scrivere come:

$$\min z(x) = c^{\mathrm{T}}x$$

s.v.

$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

dove:

$c \in R^n$ (vettore dei coefficienti della funzione obiettivo o vettore dei coefficienti di «costo», essendo la funzione obiettivo da minimizzare);

$b \in R^m$ (vettore dei termini noti dei vincoli, vettore delle «risorse»);

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(matrice (*m x n*) dei coefficienti delle variabili di decisione nei vincoli, matrice dei «coefficienti tecnologici»).

Richiami di Algebra Lineare

- Definizione

Un «**vettore**» $x \in R^n$ è un insieme ordinato di n scalari disposti convenzionalmente per colonna, e può essere rappresentato pertanto nel seguente modo:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Il vettore si può rappresentare anche per riga, utilizzando l'operatore di «**trasposizione**», che si denota con un apice «T», cioè,

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

Vettori e matrici

- Esempio

Lo **scalare** $x_j, j = 1, \dots, n$, rappresenta la *j-esima* componente del vettore *x*.

Il vettore di Â^3

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

è rappresentato per colonna.

In alternativa, si può scrivere $x^T = [-4\ 5\ 3]$.

Le componenti del vettore sono $x_1 = -4, x_2 = 5\ e\ x_3 = 3$.

Vettori e matrici

Il «**prodotto scalare**» di due vettori è lo scalare ottenuto come:

$$x, c \in R^n$$

pÎ Â

$$z = c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

- Esempio I due vettori

$$x = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hanno prodotto scalare *z* pari a

$$z = [(-4) \text{ x } 5] + [5 \text{ x } (-6)] + (3 \text{ x } 0) = -50.$$

Vettori e matrici

Lo scalare $a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, è la componente della *matrice* A in riga i e colonna j.

Il vettore $A_j \in \mathbb{R}^m, j = 1, \ldots, n$

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

individua la *j-esima colonna* della matrice A, mentre il vettore

$$a_i^T \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, m$$

$$a_i^T = [a_{i1}, \ldots, a_{in}]$$

individua la *i-esima riga* della matrice A.

Vettori e matrici

- Esempio

Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ una matrice di $\hat{A}^{3´ 4}$.

La componente in riga *2* e colonna 3 è $a_{23} = 5$.

Tale matrice è formata dai vettori colonna

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e dai vettori riga

$$a_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, a_2^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, a_3^T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prodotto matrice e vettore

Il prodotto di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e di un vettore $x \in R^n$ si può scrivere come:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad i = 1, \ldots, m$$

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$$

Introduzione alla PL

L'ipotesi di linearità nei modelli di PL potrebbe non essere ragionevole in molte applicazioni pratiche:

- caso degli sconti di quantità (economie di scala) per acquisti di grossi quantitativi di merce;
- modelli di imposizione fiscale nei quali a imponibili via via crescenti corrispondono differenti percentuali di prelievo.

Tuttavia, anche in questi casi, i modelli di PL rappresentano comunque una buona base di partenza per successive elaborazioni.

Esercizio (atleta)

Un atleta, in prossimità di una gara, deve perdere peso senza perdere massa muscolare durante gli allenamenti. Il proprio regime alimentare giornaliero prevede l'assunzione di carne, legumi e pasta, conditi con olio. Di seguito è riportato il contenuto in grassi, carboidrati e proteine di ciascuno di questi alimenti, il loro contenuto calorico e la minima richiesta nutrizionale di ciascun macronutriente.

Macronutriente	Alimento: Carne [g/h]	Legumi [g/h]	Pasta [g/h]	Olio [g/h]	Richiesta giornaliera [g]
Grassi	2,6	1,5	1,5	100,0	30
Carboidrati	0,0	60,7	74,7	0,0	90
Proteine	20,2	22,3	13,0	0,0	60
Calorie [Kcal/h]	110	337	371	884	–

Tabella 1.1 Dati relativi al problema della dieta dell'atleta.

Occorre stabilire il regime dietetico giornaliero che garantisce all'atleta un apporto nutrizionale non inferiore a quello richiesto, con il minimo apporto calorico.

Esercizio (atleta)

- **Variabili di decisione**
  - $x_j, j = 1, \dots, 4$, corrispondono alla quantità giornaliera (espressa in etti) di alimento j (1 = carne, 2 = legumi, 3 = pasta, 4 = olio) che deve entrare nella dieta.
- ***Vincoli***
  - Minima richiesta nutrizionale

Se 100g di carne contengono 2,6g di grassi, si può determinare l'apporto di grassi (in g) proveniente da x_1 etti di carne pari a $2{,}6x_1$.

1. $2{,}6x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}5x_3 + 100x_4 \geq 30$
2. $60{,}7x_2 + 74{,}7x_3 \geq 90$
3. $20{,}2x_1 + 22{,}3x_2 + 13x_3 \geq 60$

- **Vincoli di non negatività**

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Esercizio (atleta)

- ***Funzione obiettivo***

$$\min z(x) = 110x_1 + 337x_2 + 371x_3 + 884x_4$$

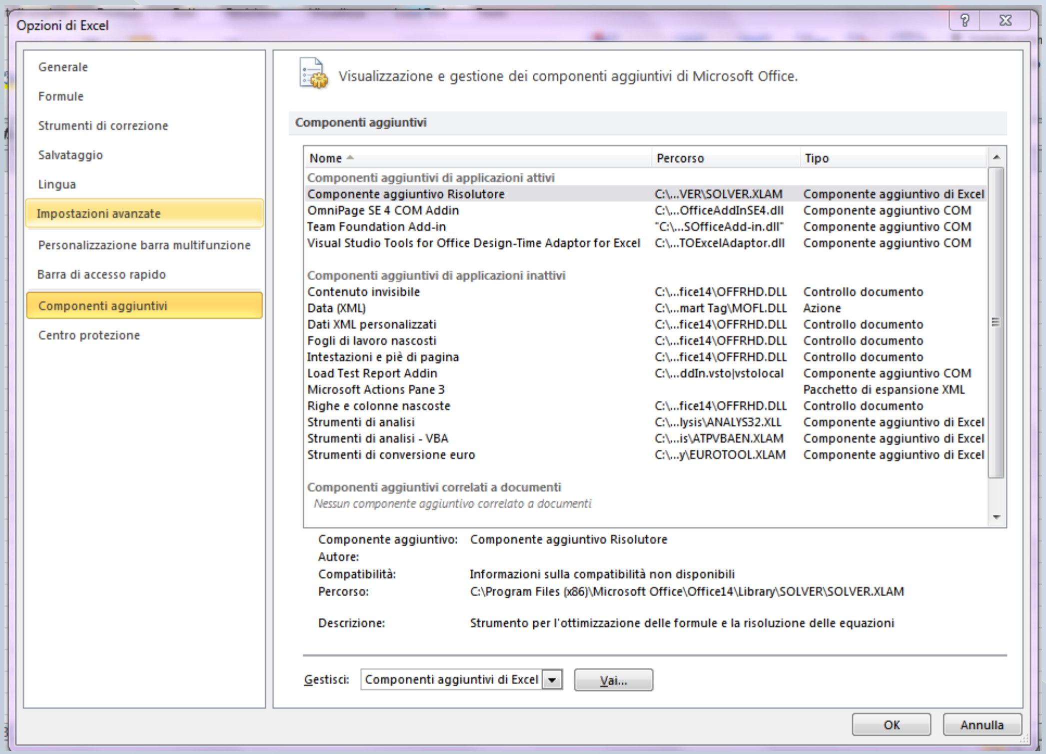
- ***Soluzione del problema***
  - $x_1^* = 1{,}3335;\ x_2^* = 1{,}4827\ ;\ x_3^* = 0\ ;\ x_4^* = 0{,}2431$
  - $z^* = z(x^*) = 861{,}2416$ Kcal

Uso del risolutore Excel

- Il risolutore di Excel fa parte del gruppo degli strumenti di Excel.
- E’ un pacchetto aggiuntivo che ottimizza modelli vincolati come ad esempio modelli di Programmazione Lineare.
- Utilizza un algoritmo di programmazione matematica che consente di trovare la decisione ottima per un dato modello.
- Per i problemi di PL il risolutore usa il Metodo del Simplesso.

Uso del risolutore della Microsoft Excel 2010©

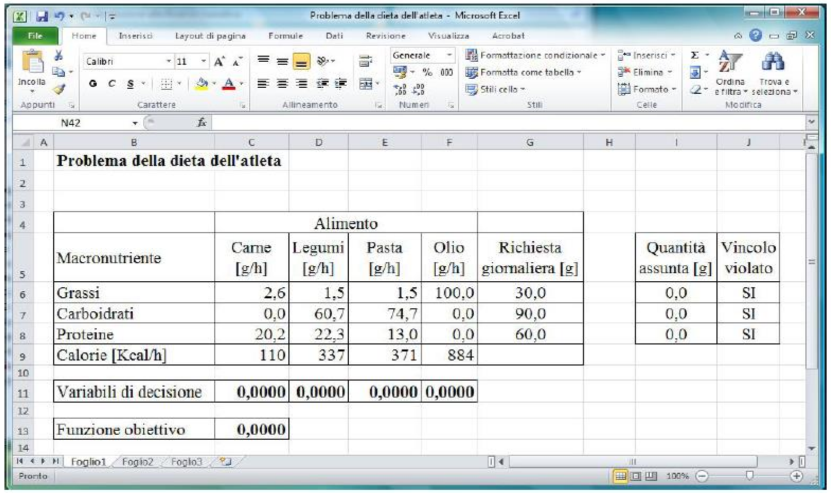
Per utilizzare il componente aggiuntivo risolutore è necessario caricarlo tramite le opzioni di excel:



Uso del risolutore della Microsoft Excel 2010©

Per mostrare come risolvere problemi di PL attraverso il risolutore, si farà riferimento al problema della dieta dell'atleta, formulato in precedenza.

I dati del problema, le variabili di decisione, i vincoli e la funzione obiettivo sono riportati in un foglio di lavoro (vedi Figura 1.2).



Problema della dieta dell'atleta

Macronutriente	Alimento: Carne [g/h]	Legumi [g/h]	Pasta [g/h]	Olio [g/h]	Richiesta giornaliera [g]	Quantità assunta [g]	Vincolo violato
Grassi	2,6	1,5	1,5	100,0	30,0	0,0	SI
Carboidrati	0,0	60,7	74,7	0,0	90,0	0,0	SI
Proteine	20,2	22,3	13,0	0,0	60,0	0,0	SI
Calorie [Kcal/h]	110	337	371	884			
Variabili di decisione	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000			
Funzione obiettivo	0,0000						

Figura 1.2 Foglio di lavoro in cui è rappresentato il problema della dieta dell'atleta.

Uso del risolutore della Microsoft Excel 2010©

- I dati sono contenuti nell’insieme consecutivo di celle C6:G9.
- Il valore delle variabili di decisione è contenuto nelle celle C11:E11. Il valore iniziale di tali variabili di decisione, che appare nel foglio di lavoro, è scelto in maniera arbitraria.
- Il risolutore modificherà il valore di tali celle (che, per questo motivo, si dicono variabili) e, al termine, in esse sarà riportata la soluzione ottima (si osservi che il risolutore è in grado di gestire fino a un massimo di 200 celle variabili).

Uso del risolutore della Microsoft Excel 2010©

- La cella C13 contiene il valore di funzione obiettivo da minimizzare. La formula associata a tale cella è =MATR.SOMMA.PRODOTTO(C9:F9;C11:E11).
- Il valore che appare nel foglio di lavoro in Figura 1.2 dipende, ovviamente, dalla scelta dei valori iniziali attributi alle variabili di decisione.
- Il contenuto delle celle I6:I8 corrisponde al valore del primo membro dei rispettivi vincoli relativi alla quantità di nutrienti assunti (grassi, carboidrati, proteine). Ad esempio, la formula associata alla cella I6 è

  =MATR.SOMMA.PRODOTTO(C6:F6;C$11:F$11).

Uso del risolutore della Microsoft Excel 2010©

- Scrivendo la formula in questo modo, si può copiare il contenuto della cella I6 nelle celle I7 e I8. Il valore nullo che appare nelle tre celle dipende anch’esso dalla scelta della soluzione iniziale.
- Il foglio di lavoro è stato impostato in modo da evidenziare se i vincoli derivanti dalle richieste nutrizionali siano o meno soddisfatti (si tratta di un controllo opzionale non strettamente necessario).
- Per realizzare tale controllo, la formula utilizzata, ad esempio, per la cella J6 è =SE(I6<G6;SI;NO) (le formule per le celle J7 e J8 si ricavano di conseguenza).
- Si osserva infine, che non è necessario esplicitare i vincoli di non negatività delle variabili di decisione.

Uso del risolutore della Microsoft Excel 2010©

- A questo punto, è possibile invocare la finestra di dialogo del risolutore, scegliendo la casella *Risolutore* sotto il pulsante *Dati*. Tale finestra, a valle dell'impostazione dei relativi parametri, appare per come riportato in Figura 1.3.

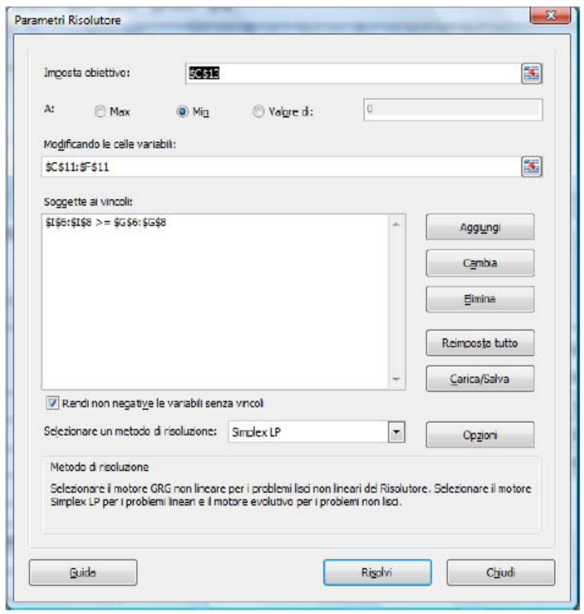


Figura 1.3 Finestra di dialogo del risolutore di Excel per il problema della dieta dell'atleta.

Uso del risolutore della Microsoft Excel 2010©

- Impostare l’obiettivo e le celle variabili nella finestra di dialogo è piuttosto semplice. Per introdurre i vincoli si può utilizzare il pulsante *Aggiungi*, con il quale si attiva una ulteriore finestra di dialogo. Le relazioni di vincolo che possono essere imposte sono: <=,=, >=, int, bin o dif.

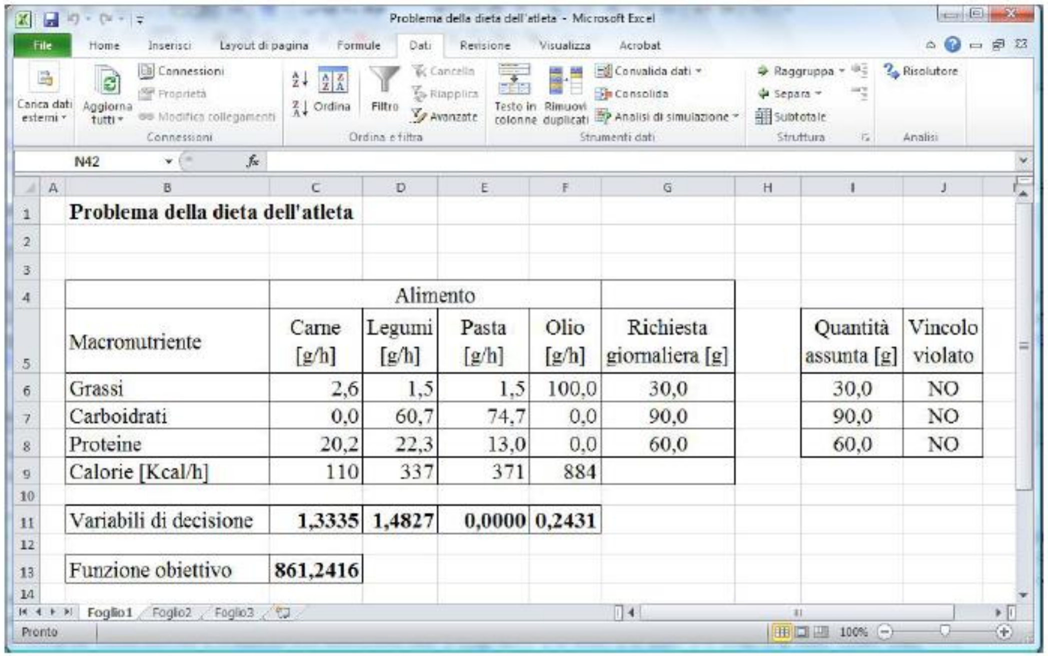
- Per il problema in esame, i vincoli si esprimono con $I$6:$I$8>=$G$6:$G$8 e, in aggiunta, spuntando la casella *Rendi non negative le variabili senza vincoli*, per imporre il soddisfacimento dei vincoli di non negatività delle variabili di decisione.

Uso del risolutore della Microsoft Excel 2010©

- Infine, occorre selezionare il metodo di soluzione che, nel caso di problemi di PL, è *Simplex LP*. Dalla finestra di dialogo del risolutore è possibile accedere, tramite il pulsante *Opzioni* a un’altra finestra di dialogo, che consente di fissare alcuni parametri di esecuzione del metodo, quali il tempo massimo di calcolo, il numero di iterazioni ecc.

- Tramite il pulsante *Risolvi* nella finestra di dialogo del risolutore, si avvia la fase di soluzione del modello che, nello specifico, si conclude con la determinazione della soluzione ottima, che porta alla modifica automatica del foglio di lavoro precedentemente impostato, per come riportato nella Figura successiva (1.4).

Uso del risolutore della Microsoft Excel 2010©



Problema della dieta dell'atleta

	Alimento						
Macronutriente	Carne [g/h]	Legumi [g/h]	Pasta [g/h]	Olio [g/h]	Richiesta giornaliera [g]	Quantità assunta [g]	Vincolo violato
Grassi	2,6	1,5	1,5	100,0	30,0	30,0	NO
Carboidrati	0,0	60,7	74,7	0,0	90,0	90,0	NO
Proteine	20,2	22,3	13,0	0,0	60,0	60,0	NO
Calorie [Kcal/h]	110	337	371	884			

Variabili di decisione	**1,3335**	**1,4827**	**0,0000**	**0,2431**
Funzione obiettivo	**861,2416**			

Figura 1.4 Foglio di lavoro in cui è riportata la soluzione ottima del problema della dieta dell'atleta.

Uso del risolutore della Microsoft Excel 2010©

- Il risolutore è in grado di generare anche tre fogli di lavoro supplementari, che contengono ulteriori informazioni sulla soluzione ottenuta e sulle caratteristiche del modello: *rapporto valori*, *rapporto sensibilità* e *rapporto limiti*. Gli ultimi due hanno significato solo per modelli di PL. Per ottenere questi tre rapporti è necessario che essi vengano selezionati nella finestra di dialogo *Risultati Risolutore*, per come evidenziato nella Figura successiva (1.5).

Uso del risolutore della Microsoft Excel 2010©

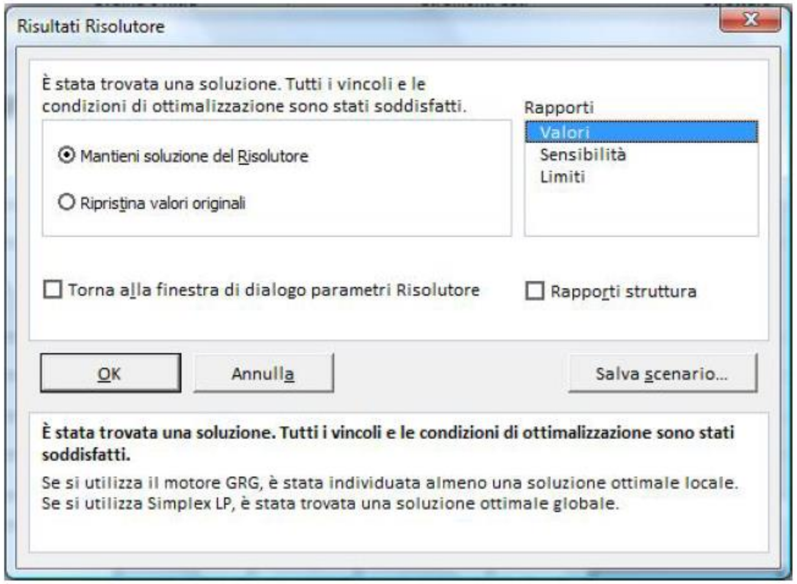


Figura 1.5 Finestra di dialogo `Risultati Risolutore`, in cui viene selezionato il `rapporto valori`.

- Tali rapporti, nel caso di problemi di PL, sono particolarmente utili per condurre analisi di post-ottimalità.

Modelli di miscelazione

- Nei problemi di miscelazione si dispone di un insieme di materie prime («ingredienti»), ciascuna caratterizzata da un contenuto noto di determinati «componenti».
- L'obiettivo è miscelare gli ingredienti, secondo opportune proporzioni, per ottenere un prodotto finito («miscela»), che soddisfi determinati requisiti di qualità, esprimibili in termini di contenuto complessivo dei componenti nella miscela.
- Il più classico problema di miscelazione è il problema della dieta. Tuttavia, dal punto di vista economico, si trovano numerose applicazioni industriali del problema di miscelazione nelle industrie alimentari, siderurgiche, chimiche.

Modelli di miscelazione

- Variabili di decisione corrispondono al contenuto di ciascun ingrediente nella miscela.
- Vincoli sono tipicamente associati alle caratteristiche di qualità della miscela (che dipende dai componenti presenti negli ingredienti utilizzati) e alle disponibilità limitate degli ingredienti.
- Funzione obiettivo è rappresentata dal costo degli ingredienti impiegati.

Template di riferimento per i modelli di miscelazione

Il modello di PL è il seguente:

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.v$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Template di riferimento per i modelli di miscelazione

Si supponga di avere a disposizione n ingredienti, ognuno dei quali contenente una certa quantità di ciascuno degli m componenti.

Si indichi, in particolare, con

- a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, la quantità di componente i presente nell'ingrediente j;
- b_i $i = 1, \dots, m$, la quantità minima di componente i presente nella miscela.
- c_j $j = 1, \dots, n$, il costo unitario dell'ingrediente j
- x_j, $j = 1, \dots, n$, variabile di decisione corrispondenti alla quantità di ingrediente j presente nella miscela da realizzare

Modelli di miscelazione

Ulteriori vincoli potrebbero essere necessari.

Ad esempio, nel caso in cui sia richiesto che un dato componente i sia presente nella miscela in un quantitativo non superiore a un valore prefissato d_i, occorre imporre che:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i$$

In altri casi, potrebbero essere imposte limitazioni u_j sul massimo quantitativo di ingrediente j da utilizzare per realizzare la miscela:

$$x_j \leq u_j$$

Modelli di miscelazione

Nel caso in cui sia necessario produrre un quantitativo prefissato q di miscela, occorre aggiungere il seguente vincolo:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = q$$

Nel caso in cui il numero di miscele da realizzare siano $p > 1$, il modello generale di miscelazione si modifica in accordo alla scelta delle variabili di decisione, che, in questo caso, sono del tipo x_{jk}, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$, ciascuna delle quali rappresentante la quantità di ingrediente j necessaria per realizzare la miscela k.

Modelli di pianificazione della produzione

- I modelli di pianificazione della produzione consentono di formulare problemi per l'allocazione ottimale di «risorse» (materie prime, macchinari, manodopera), disponibili in quantità limitata e utilizzate per realizzare un numero finito di «prodotti».
- Per ciascun prodotto è noto il processo produttivo, riassumibile nel consumo di un quantitativo noto di risorse.
- La vendita di ciascuna unità di prodotto genera un profitto noto e la funzione obiettivo consiste nel massimizzare il profitto derivante dalla vendita di tutti i prodotti realizzati.

Template di riferimento per i modelli di pianificazione della produzione

Il modello di PL è il seguente:

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$s.v$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

Template di riferimento per i modelli di pianificazione della produzione

Si supponga di disporre di un numero *m* di risorse disponibili per la produzione di *n* prodotti.

Si indichi con:

- a_{ij} , $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, la quantità di risorsa *i* necessaria per produrre una unità di prodotto *j*;
- b_i, $i = 1,\ldots,m$, la disponibilità massima della risorsa *i*;
- p_j, $j = 1,\ldots,n$, il profitto lordo unitario ricavabile dalla vendita del prodotto *j*;
- x_j, $j = 1,\ldots,n$, variabili di decisione indicante il livello di produzione del prodotto *j*.

Modelli di pianificazione della produzione

- Varianti del problema possono essere ottenute considerando come obiettivo la minimizzazione dei costi complessivi di produzione, oppure includendo vincoli di budget, di mercato (che impongono livelli massimi di produzione per uno o più prodotti) o di sfruttamento degli impianti (in base ai quali si fissano eventualmente livelli minimi di produzione).

- In alcuni casi, la realizzazione di un prodotto richiede la scelta di risorse disponibili tra più alternative (ad esempio, un'operazione meccanica di tornitura può essere eseguita su uno qualsiasi dei torni disponibili nell'officina). In questo caso le variabili di decisione esprimono il livello produttivo per ogni prodotto utilizzando una specifica risorsa. In questo caso le variabili di decisione hanno un doppio indice x_{ij} , $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, ed indicano la quantità di prodotto j realizzata utilizzando la risorsa i.

ESERCIZIO (Fonderia)

- *Una fonderia utilizza 4 tipi di materiale grezzo per ottenere un prodotto finale. Ciascun materiale ha un diverso contenuto di zinco, rame e ferro. La tabella che segue riporta la composizione di ciascun materiale (espresso in percentuale sul peso totale), insieme al costo unitario.*

- *Il prodotto finale deve avere un contenuto percentuale di zinco almeno il 3% e non superiore all'8%; un contenuto di rame tra il 3% e il 5%; un contenuto di ferro non superiore al 7%.*

MATERIALE	% ZINCO	% RAME	% FERRO	COSTO AL Kg
Materiale 1	3	3	5	445
Materiale 2	3	4	6	700
Materiale 3	1	2	3	300
Materiale 4	5	6	6	480

1. ***Formulare in termini di PL il problema di pianificare la produzione di questa fonderia minimizzando i costi.***

2. ***Risolvere il problema utilizzando il Risolutore di Excel***

Esercizio (Meko)

La Meko è una multinazionale specializzata nella produzione di due tipi di biocarburanti: il biometanolo e il biodimetiletere.

Il processo produttivo richiede la lavorazione nei tre stabilimenti di preparazione, purificazione ed estrazione.

I tempi necessari per la lavorazione di una tonnellata dei due biocarburanti sono riportati nella Tabella unitamente alla capacità produttiva giornaliera dei tre stabilimenti.

Stabilimento	Biometanolo	Biodimetiletere	Capacità giornaliera (h)
Preparazione	0,72	0,85	18
Purificazione	1,68	1,42	18
Estrazione	1,92	2,15	16

Ore di lavorazione a tonnellata

Esercizio (Meko)

Il responsabile del marketing aziendale ha confermato che ogni tonnellata prodotta di biometanolo e di biodimetiletere può essere venduta, realizzando un profitto (in €) pari a 540 e 590, rispettivamente.

Definire il piano di produzione ottimale.

Esercizio (Meko)

- **Variabili di decisione**
  - x_j, $j = 1, 2$, livello di produzione giornaliera dei due biocarburanti (1 = biometanolo, 2 = biodimetiletere).
- **Vincoli**
  - Vincoli sulla capacità di produzione giornaliera
    - $0{,}72x_1 + 0{,}85x_2 \leq 18$
    - $1{,}68x_1 + 1{,}42x_2 \leq 18$
    - $1{,}92x_1 + 2{,}12x_2 \leq 16$
  - Vincoli di non negatività
    - $x_1, x_2 \geq 0$
- **Funzione obiettivo**

  $\max z(x) = 540x_1 + 590x_2$
- **Soluzione ottima**
  - $x_1^* = \frac{25}{3} \quad x_2^* = 0$
  - $z^* = 4500$