Corso di Laurea Magistrale (LM-56) in Economia

BUSINESS ANALYTICS AND DECISIONS THEORY

Soluzione grafica dei problemi di PL

A. A. 2020/2021

Docente: Massimiliano FERRARA
A cura della Dott.ssa Tiziana CIANO

Modelli di PL

Rappresentazione di un problema di PL

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$s.v$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

Nozioni di geometria poliedrale

Un «**iperpiano**» I di $\Re^n$ è un insieme di punti che soddisfa un’equazione lineare.

Dato un vettore $a \in \Re^n$, uno scalare b e un vettore di variabili $x \in \Re^n$, I può essere rappresentato come:

$$I = \left\{ x \in \Re^n : a^T x = b \right\}.$$

Il vettore a prende il nome di «**gradiente**» dell’iperpiano.

Nozioni di geometria poliedrale

L'iperpiano separa i punti di $\Re^n$ in due regioni dette «**semispazi**».

I punti di $\Re^n$ che non appartengono all'iperpiano sono partizionati in due semispazi, $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$, in modo che l'intersezione tra i due semispazi corrisponda proprio all'iperpiano.

Di conseguenza, i semispazi $S^{(1)}$ ed $S^{(2)}$ sono rappresentabili come:

$$S^{(1)} = \left\{ x \in \Re^n : a^T x \leq b \right\},$$

$$S^{(2)} = \left\{ x \in \Re^n : a^T x \geq b \right\}.$$

Nozioni di geometria poliedrale

1) L'unione dei due semispazi $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ corrisponde a $\Re^n$
2) Un semispazio è un insieme convesso.
3) Un iperpiano è un insieme convesso

Definizione

Un insieme $C \subseteq \Re^n$ è «**convesso**» se, dati due punti appartenenti a C, ogni punto del segmento che li unisce appartiene anch'esso a C.

In altri termini, C è convesso se, per ogni

$$v^{(1)}, v^{(2)} \in C, allora\_\bar{v} = \lambda v^{(1)} + (1-\lambda)v^{(2)} \in C, \forall \lambda \in [0,1].$$

Nozioni di geometria poliedrale

Definizione

Un «**poliedro**» P è l'intersezione di un numero finito di semispazi.

Data una matrice $A^{m*n} \in \Re^n$, un vettore $b \in \Re^n$ e un vettore di variabili $x \in \Re^n$, P può essere rappresentato come:

$$P = \left\{ x \in \Re^n : Ax \leq b \right\}.$$

Un poliedro P è «**limitato**» se esiste uno scalare M sufficientemente grande tale che, per ogni $x \in P$ si ha che $\|x\| \leq M$. .

Un poliedro limitato si dice «**politopo**».

Un poliedro è un insieme convesso.

Nozioni di geometria poliedrale

La soluzione di un problema di ottimizzazione consiste nel determinare tra tutti i punti appartenenti al poliedro P (rappresentativi delle soluzioni ammissibili) quello che rende ottima la funzione obiettivo.

Come vedremo, la ricerca della soluzione ottima può essere effettuata concentrandosi sui punti estremi.

Dato un poliedro P, un punto $\bar{x} \in P$ si dice «**vertice**» di P se non può essere ottenuto come combinazione convessa di altri punti di P.

Risoluzione di problemi di PL a 2 variabili

Nel piano cartesiano Ox_1x_2 l'equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

Rappresenta una retta che partiziona il piano in due semispazi, ciascuno dei quali caratterizzato da punti P (x_1, x_2)che soddisfano le due disequazioni

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \qquad a_1x_1 + a_2x_2 \geq b.$$

Consideriamo una disequazione lineare del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$ rappresentativa di un vincolo di diseguaglianza. Per stabilire quale semipiano individua possiamo procedere nel seguente modo:

- Una volta convertito il vincolo in una uguaglianza, scegliamo un generico punto P del piano (tipicamente l'origine degli assi) e valutiamo l'espressione in quel punto.
- Se il valore così ottenuto risulta maggiore o uguale a b allora il semipiano individuato dalla diseguaglianza lineare è quello contenente il punto P, altrimenti è quello opposto (figura 1).

Risoluzione di problemi di PL a 2 variabili

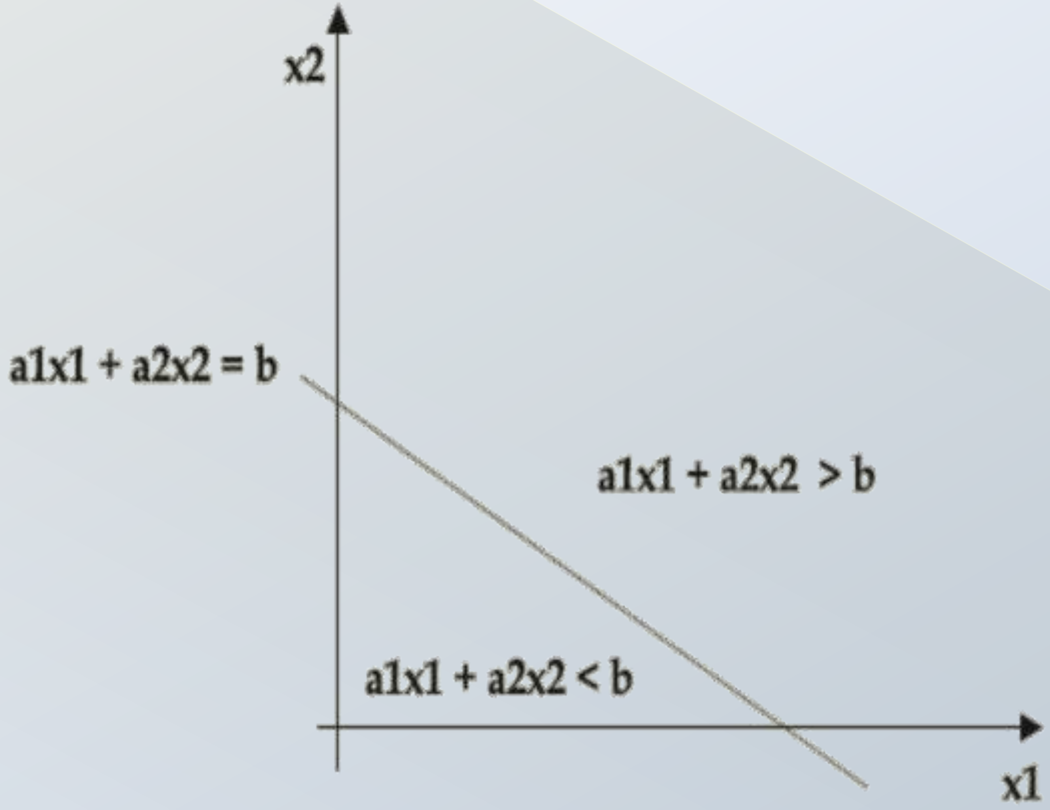


Figura 1: Rappresentazione dei vincoli

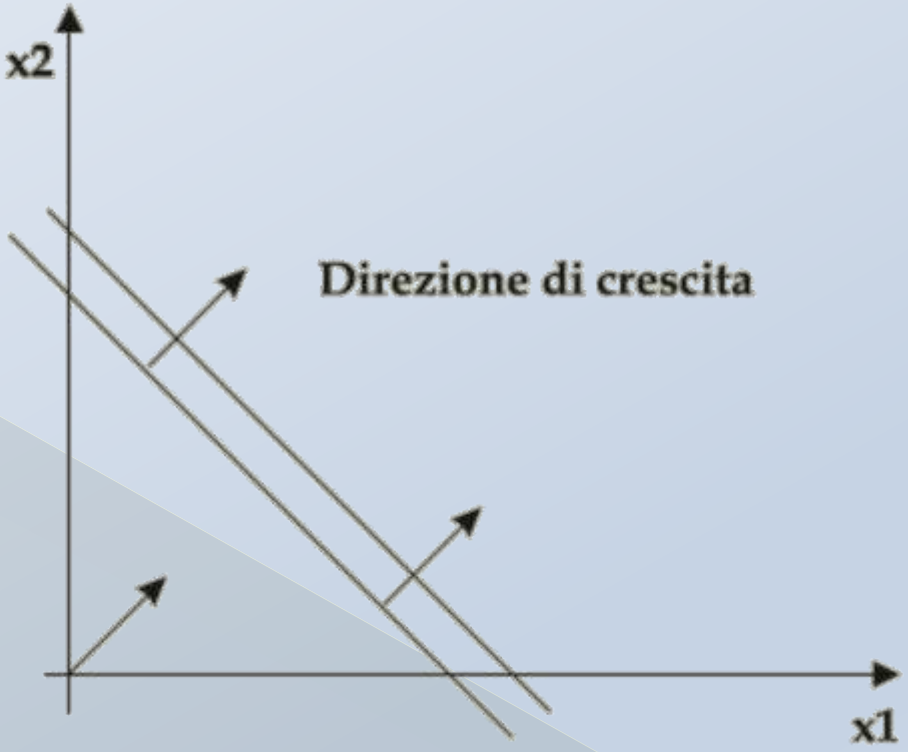


Figura 2: Rappresentazione della funzione obiettivo

Risoluzione di problemi di PL a 2 variabili

La funzione obiettivo di un problema di PL è un'espressione matematica del tipo $c_1x_1+c_2x_2$ che deve essere massimizzata o minimizzata. Per rappresentare questa funzione nel piano cartesiano Ox_1x_2 si considera la famiglia di rette parallele

$$c_1x_1 + c_2x_2 = k \qquad (1)$$

ottenuta al variare di k. Esse rappresentano le curve di livello della funzione $c(x_1,x_2) = c_1x_1+c_2x_2$, anche note come curve di ***isocosto*** (se il problema è di minimo) o ***isoprofitto*** (se il problema è di massimo).

Risoluzione di problemi di PL a 2 variabili

Nella pratica, per tracciare la funzione obiettivo si procede come segue:

- Si considera il vettore gradiente $c = (c_1, c_2)^T$ il quale individua una direzione ortogonale alle rette della famiglia (1) ed è orientato nel verso in cui *K* è crescente. Esso individua, pertanto, una direzione di crescita per la funzione obiettivo, mentre la direzione opposta sarà di decrescita.
- Quindi un problema di massimizzazione consiste nel considerare la traslazione nel verso della direzione di crescita fino ad ottenere il più grande valore per *k* in corrispondenza di valori ammissibili per le variabili di decisione. Se il problema è di minimo occorre invece considerare la traslazione in senso opposto (figura 2).

Esempio: Il problema del contadino

Un coltivatore ha a disposizione 12 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione, oltre al terreno, sono: 70 kg di semi di lattuga, 18 t di tuberi e 160 t di concime. Supponendo che il mercato sia in grado di assorbire tutta la produzione e che i prezzi siano stabili, la resa stimata per la coltivazione di lattuga è di 3000 €/ettaro e quella delle patate è di 5000 €/ettaro. L'assorbimento delle risorse per ogni tipo di coltivazione è di 7 kg di semi e 10 t di concime per ettaro di lattuga, 3 t di tuberi e 20 t di concime per ettaro di patate. Stabilire quanto terreno destinare a lattuga e quanto a patate in modo da massimizzare la resa economica e sfruttando al meglio le risorse disponibili.

Il problema del contadino – Modello di PL

Variabili decisionali:

x_L = numero di ettari da coltivare a lattuga
x_P = numero di ettari da coltivare a patate

Modello di programmazione lineare:

$$\max\ 3000x_L + 5000x_P$$

s.v.

$$x_L + x_P \leq 12$$

$$7x_L \leq 70$$

$$3x_P \leq 18$$

$$10x_L + 20x_P \leq 160$$

$$x_L \geq 0$$

$$x_P \geq 0$$

Forma Matriciale

$$
\begin{aligned}
\max \; & 3x_L + 5x_P \\
x_L + x_P & \leq 12 \\
x_L & \leq 10 \\
x_P & \leq 6 \\
x_L + 2x_P & \leq 16 \\
-x_L & \leq 0 \\
-x_P & \leq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} \max \; c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \quad \text{dove } x = \begin{pmatrix} x_L \\ x_P \end{pmatrix}
$$

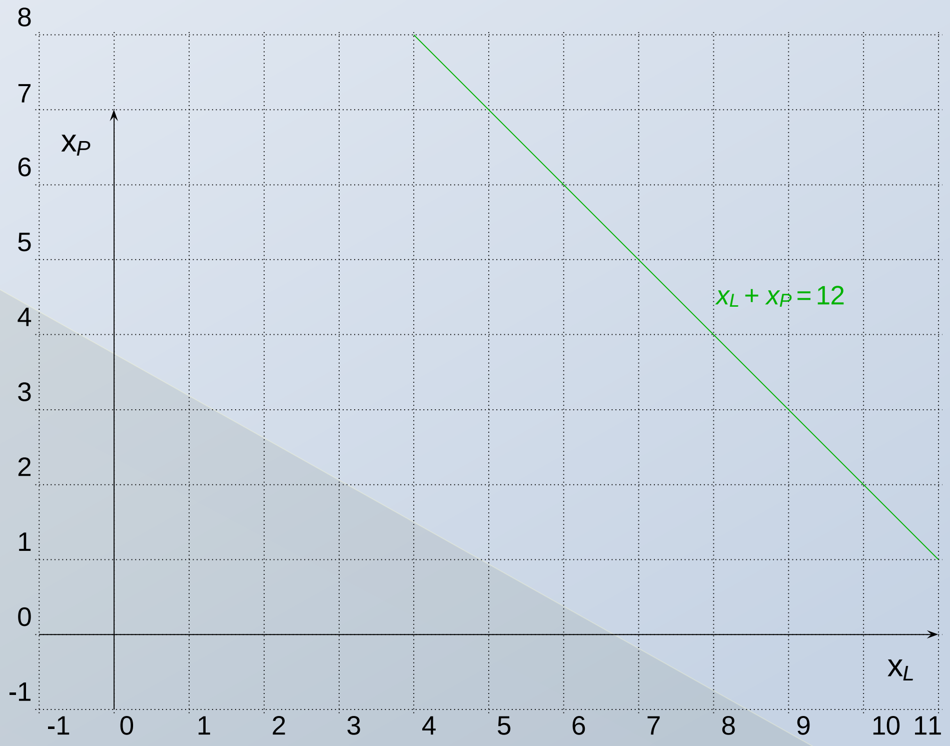
$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

m = numero di vincoli
n = numero di variabili
A matrice *m* ×*n*
b vettore con *m* componenti
c vettore con *n* componenti

Rappresentazione grafica della regione ammissibile

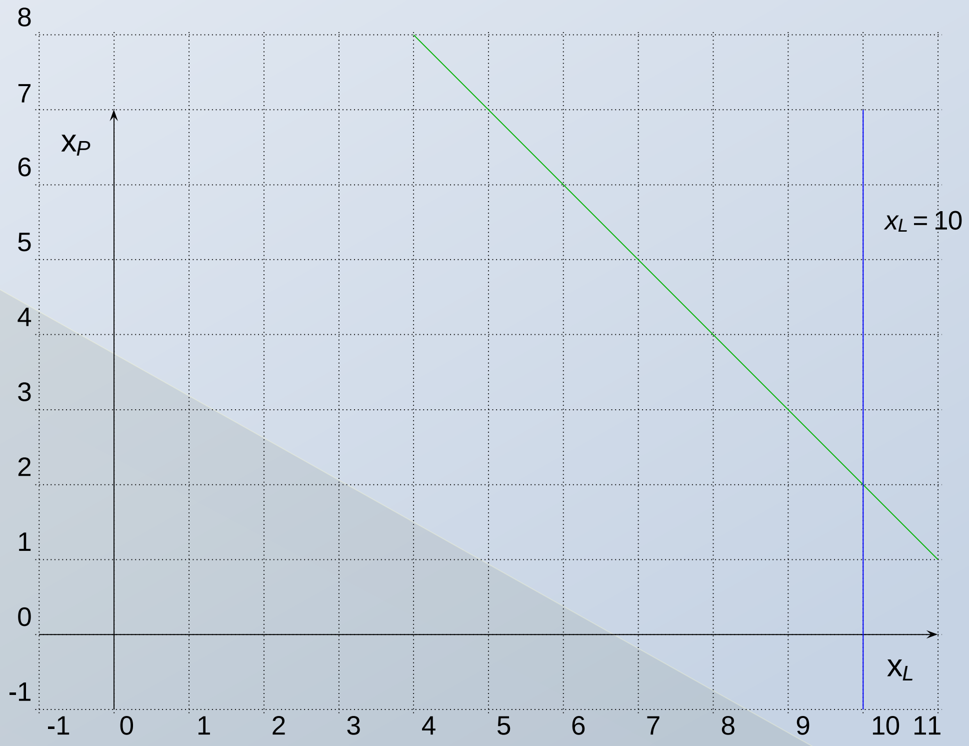
$$\max\ 3x_L + 5x_P$$

$$x_L + x_P \leq 12$$
$$x_L \leq 10$$
$$x_P \leq 6$$
$$x_L + 2x_P \leq 16$$
$$-x_L \leq 0$$
$$-x_P \leq 0$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

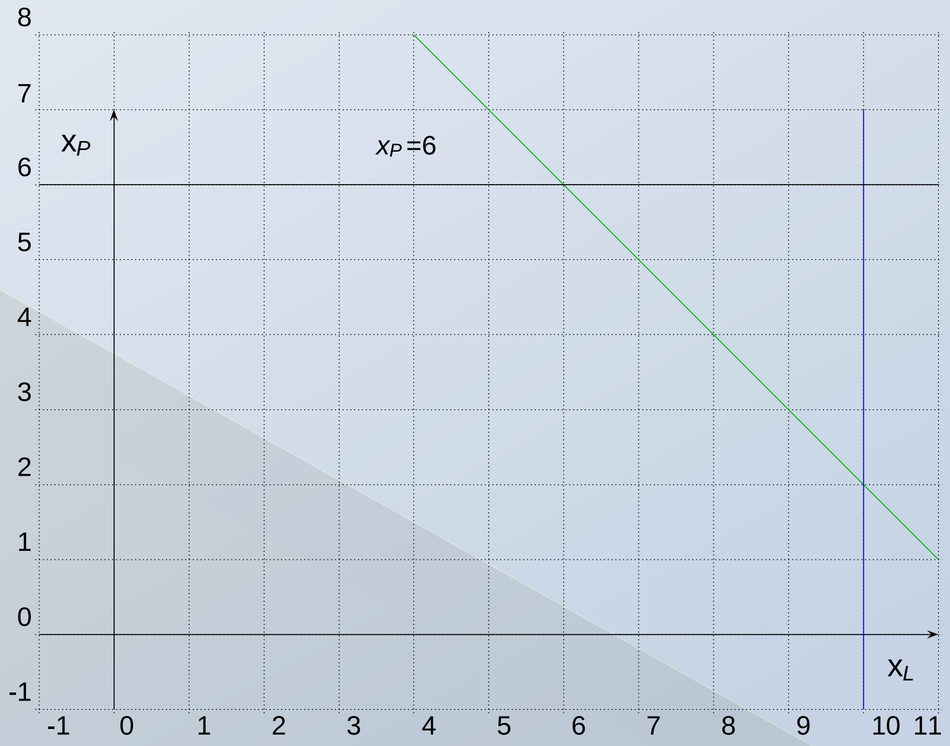
$$\max\ 3x_L + 5x_P$$
$$x_L + x_P \leq 12$$
$$x_L \leq 10$$
$$x_P \leq 6$$
$$x_L + 2x_P \leq 16$$
$$-x_L \leq 0$$
$$-x_P \leq 0$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\max\ 3x_L + 5x_P$$

$$\begin{aligned} x_L + x_P &\le 12 \\ x_L &\le 10 \\ x_P &\le 6 \\ x_L + 2x_P &\le 16 \\ -x_L &\le 0 \\ -x_P &\le 0 \end{aligned}$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\max\ 3x_L + 5x_P$$

$$\begin{aligned} x_L + x_P &\leq 12 \\ x_L &\leq 10 \\ x_P &\leq 6 \\ x_L + 2x_P &\leq 16 \\ -x_L &\leq 0 \\ -x_P &\leq 0 \end{aligned}$$

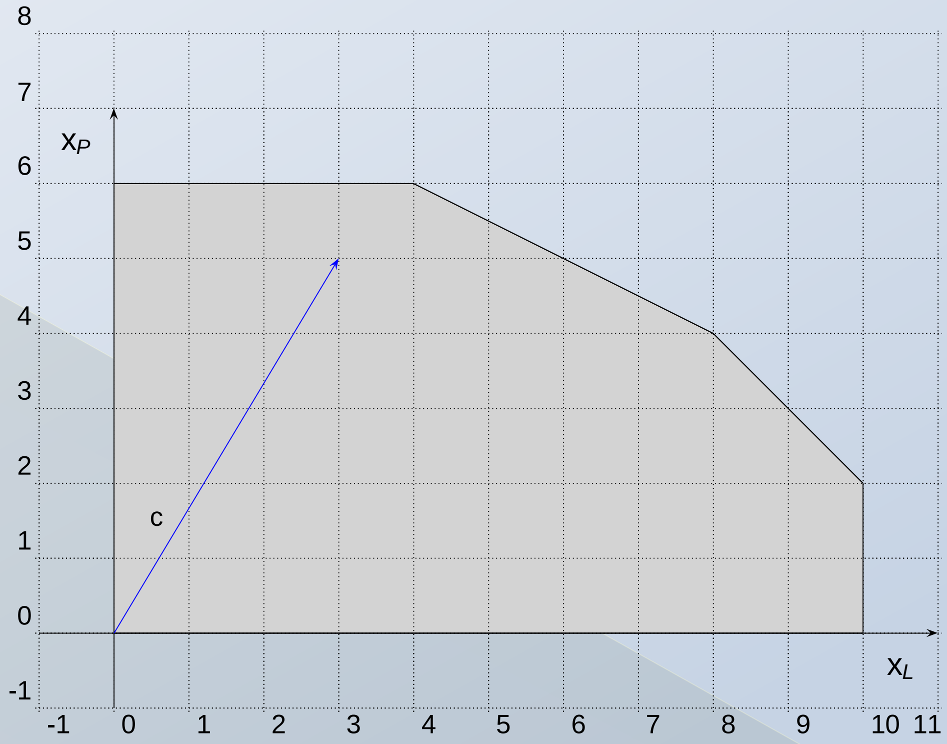
Rappresentazione grafica della regione ammissibile

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_L + 5x_P \\ & x_L + x_P \leq 12 \\ & x_L \leq 10 \\ & x_P \leq 6 \\ & x_L + 2x_P \leq 16 \\ & -x_L \leq 0 \\ & -x_P \leq 0 \end{aligned}$$

Rappresentazione grafica della regione ammissibile

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

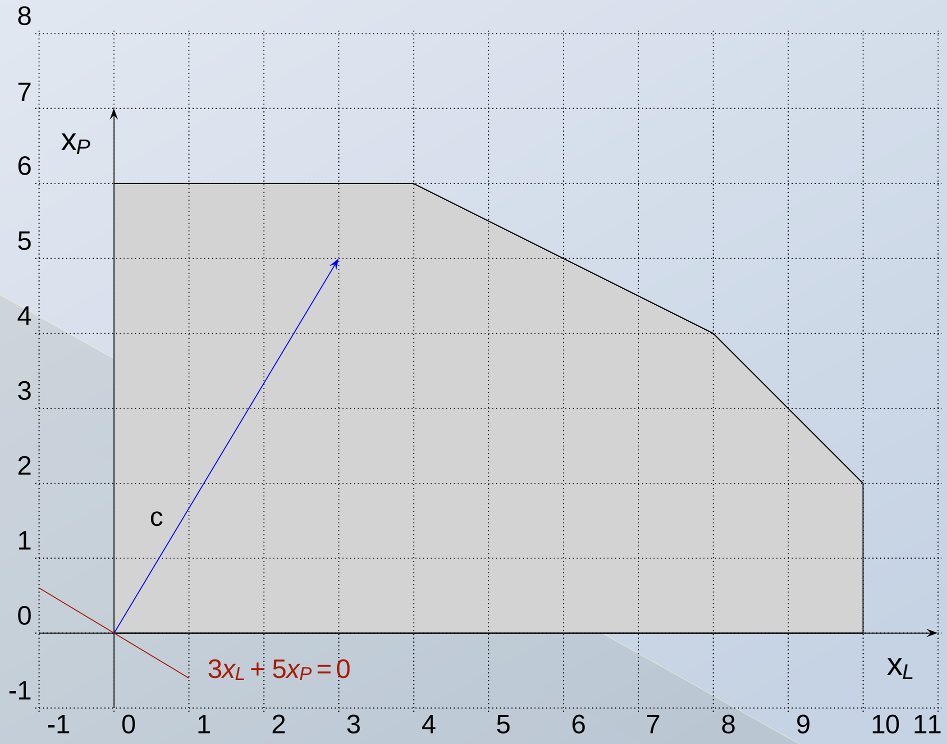
$$
\begin{aligned}
\max \; & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \leq 12 \\
& x_L \leq 10 \\
& x_P \leq 6 \\
& x_L + 2x_P \leq 16 \\
& -x_L \leq 0 \\
& -x_P \leq 0
\end{aligned}
$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in R^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in R$ è un valore fissato.

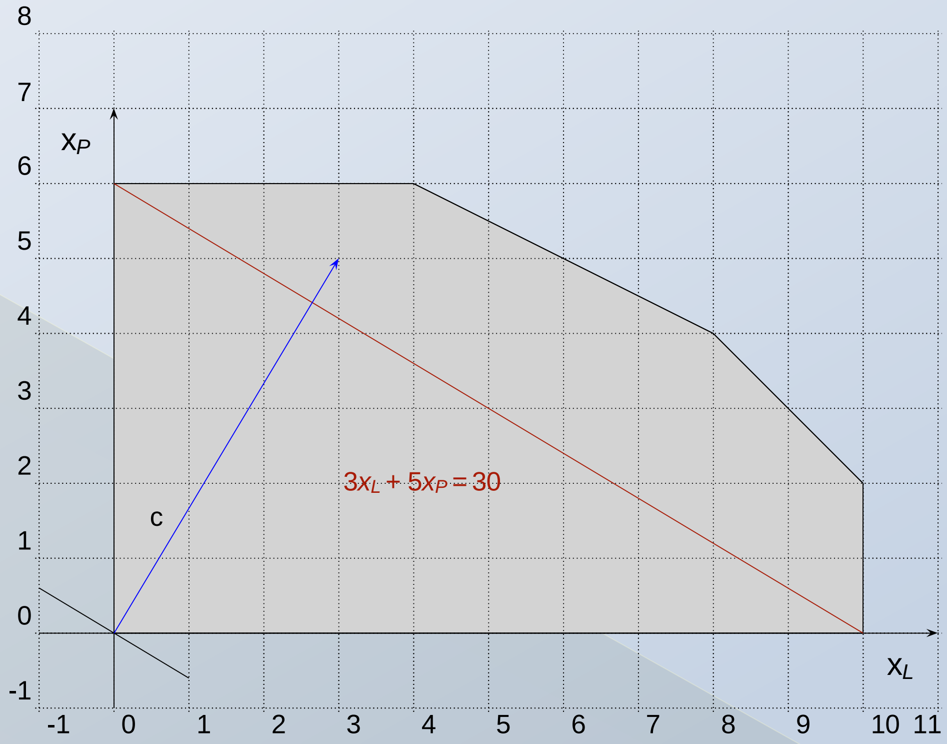
$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \le 12 \\
& x_L \le 10 \\
& x_P \le 6 \\
& x_L + 2x_P \le 16 \\
& -x_L \le 0 \\
& -x_P \le 0
\end{aligned}
$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

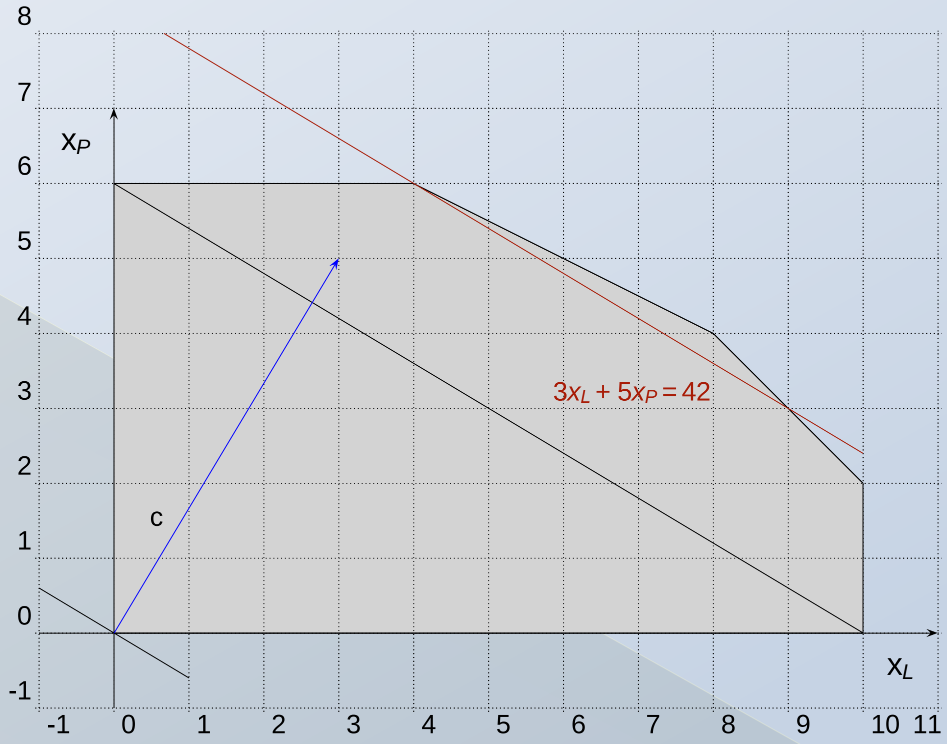
$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \le 12 \\
& x_L \le 10 \\
& x_P \le 6 \\
& x_L + 2x_P \le 16 \\
& -x_L \le 0 \\
& -x_P \le 0
\end{aligned}
$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

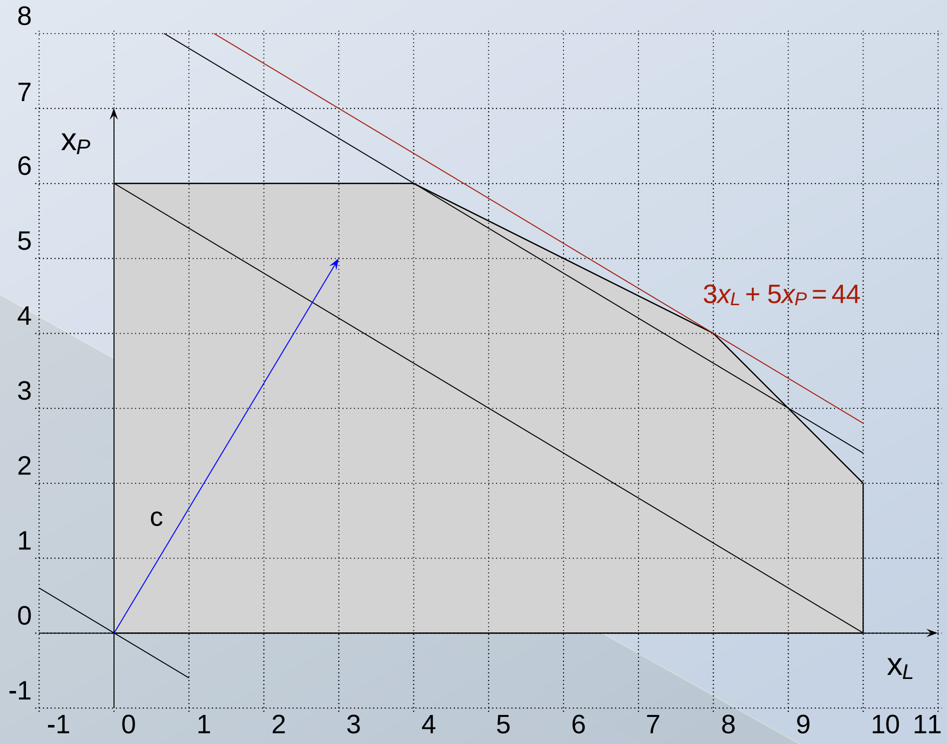
$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
x_L + x_P &\leq 12 \\
x_L &\leq 10 \\
x_P &\leq 6 \\
x_L + 2x_P &\leq 16 \\
-x_L &\leq 0 \\
-x_P &\leq 0
\end{aligned}
$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v\}$, dove $v \in \mathbb{R}$ è un valore fissato.

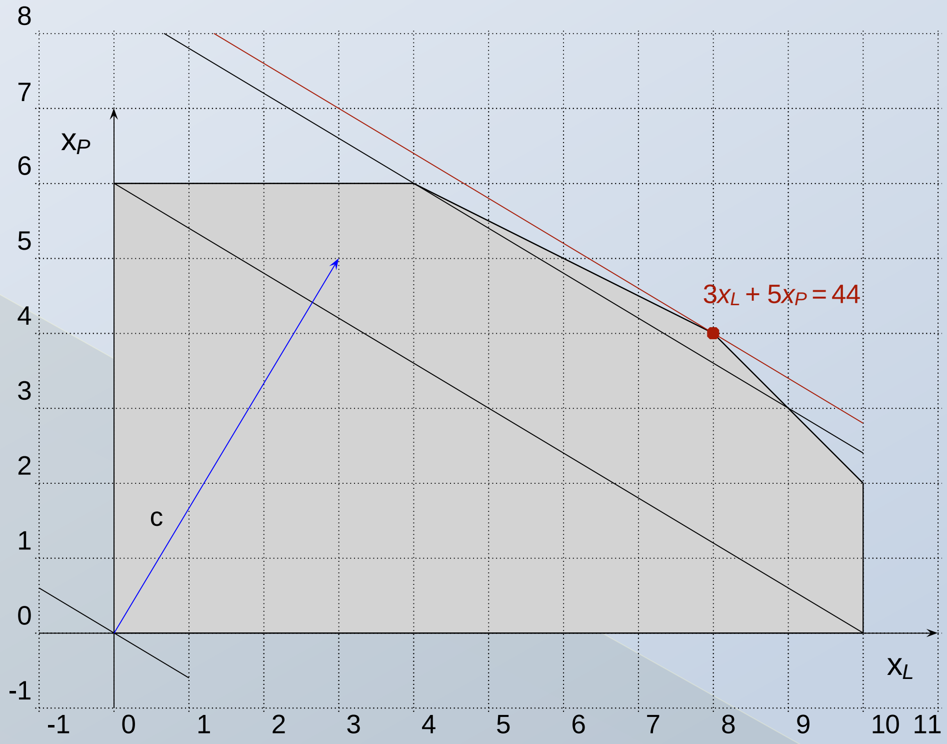
$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \le 12 \\
& x_L \le 10 \\
& x_P \le 6 \\
& x_L + 2x_P \le 16 \\
& -x_L \le 0 \\
& -x_P \le 0
\end{aligned}
$$



Rappresentazione grafica della regione ammissibile

Gli insiemi di livello della funzione obiettivo sono $L(v) = \{x \in R^n : \; c^T x = v\}$, dove $v \in R$ è un valore fissato.

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_L + 5x_P \\
& x_L + x_P \le 12 \\
& x_L \le 10 \\
& x_P \le 6 \\
& x_L + 2x_P \le 16 \\
& -x_L \le 0 \\
& -x_P \le 0
\end{aligned}
$$



Soluzione ottima: $x_L = 8$, $x_P = 4$ (8 ettari di lattuga, 4 ettari di patate)
Valore ottimo = 44 (ricavo massimo 44000 €)

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = x_1 + 2x_2$$

$$s.v.$$

$$7x_1 + 9x_2 \leq 35$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

il cui poliedro, limitato, P è rappresentato nella Figura successiva

Esercizio

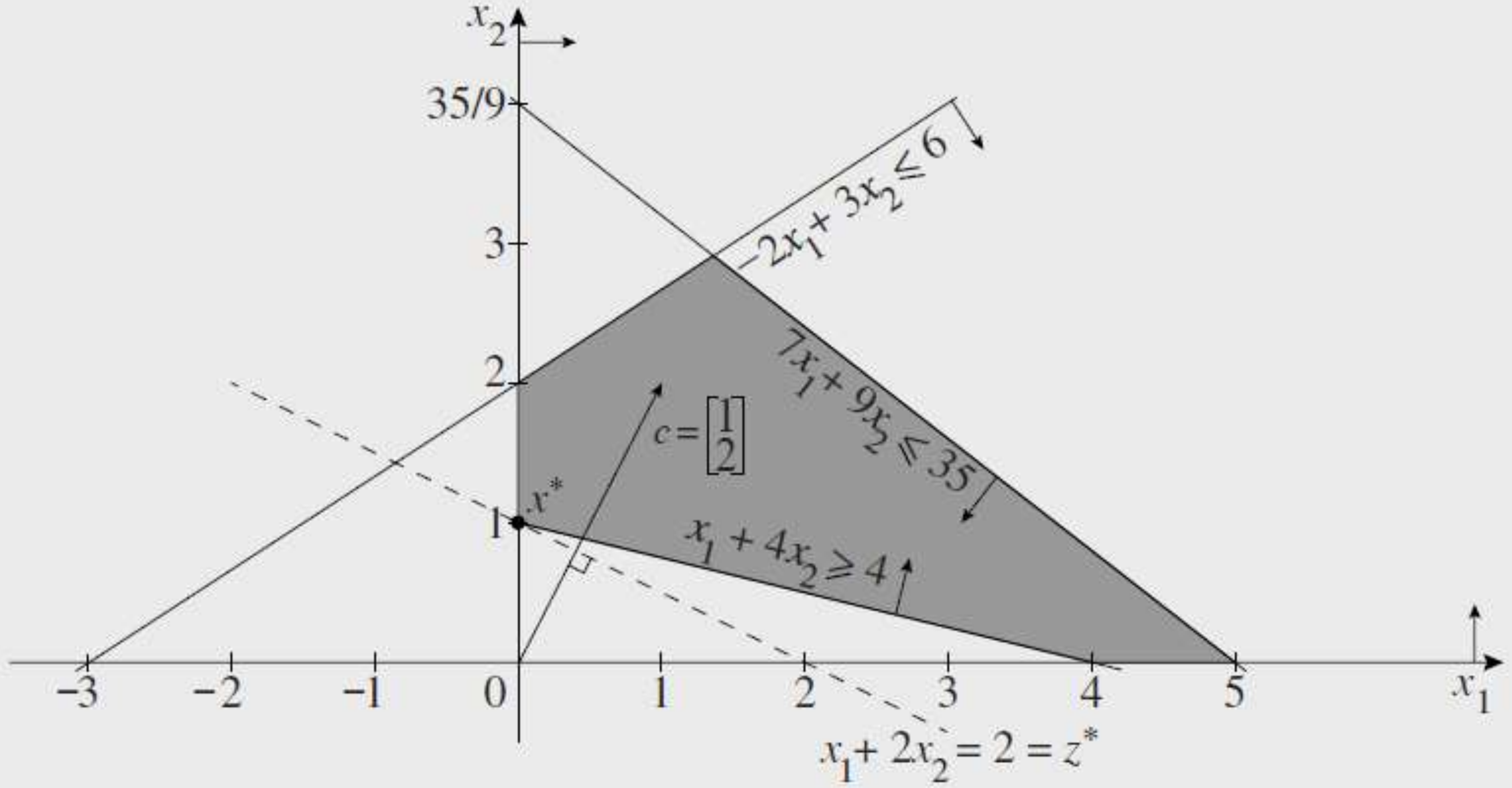


Figura 6.1. Caso di problema che ammette soluzione ottima.

Esercizio

La soluzione ottima del problema corrisponde al punto $x^* = [0\ 1]^T$, con valore $z^* = 2$.

Si osserva, infatti, che non esiste alcun’altra soluzione appartenente a P di valore inferiore.

La funzione obiettivo $z(x) = x_1 + 2x_2$ rappresenta, in R^2, il fascio di rette parallele che sono ortogonali al gradiente $c = [1\ 2]^T$ e risolvere il problema significa trovare la retta appartenente al fascio che abbia il più piccolo valore di $z(x)$ e che contenga almeno un punto di P.

Concetti preliminari

se $P = \emptyset$, allora il problema si dice «inammissibile».

Un problema inammissibile non ammette soluzione ottima e, per convenzione, si scrive che $z^* = +\infty$.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = {}^{3}/_{2}\, x_1 + x_2$$

$$s.v.$$

$$6x_1 + 17x_2 \leq 51$$

$$-3x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$6x_1 - 10x_2 \geq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il poliedro P a esso associato è vuoto (vedi Figura successiva, 6.2).

Il problema è dunque inammissibile.

Esercizio

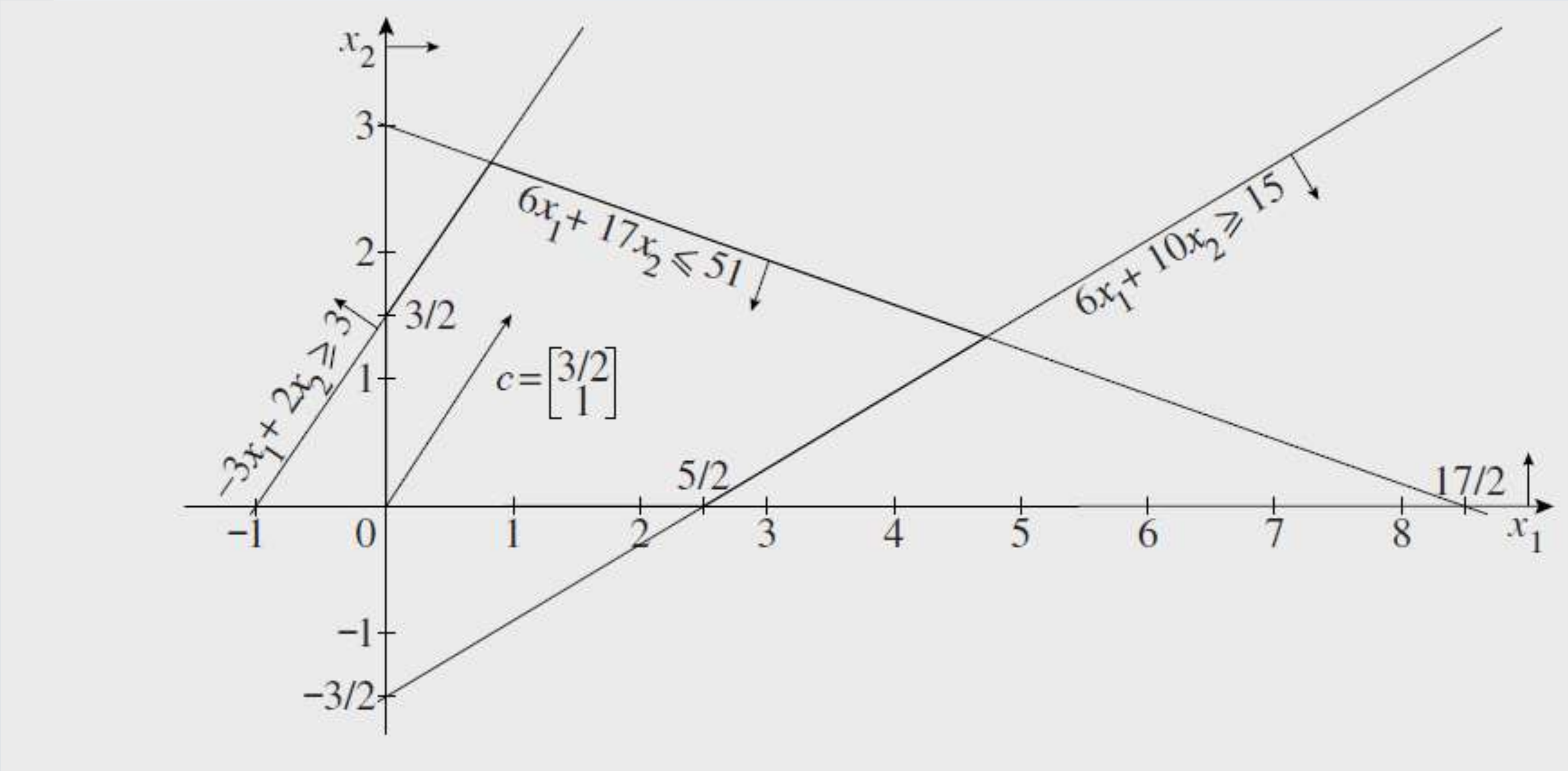


Figura 6.2. Caso di problema inammissibile.

Concetti preliminari

Se, per ogni punto $x \in P$, esiste un punto $\hat{x} \in P$ tale che $c^T\hat{x} < c^T x$, allora il

problema si dice «illimitato inferiormente».

Anche i problemi illimitati inferiormente non ammettono soluzione ottima, e si scrive che $z^* = -\infty$.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = x_1 - 2x_2$$

$$s.v.$$

$$-6x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 4$$

$$4x_1 + 46x_2 \geq 23$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il poliedro P a esso associato è illimitato

In questo caso, il problema è illimitato inferiormente giacché, per qualsiasi soluzione ammissibile, è sempre possibile trovarne un'altra di valore inferiore.

Esercizio

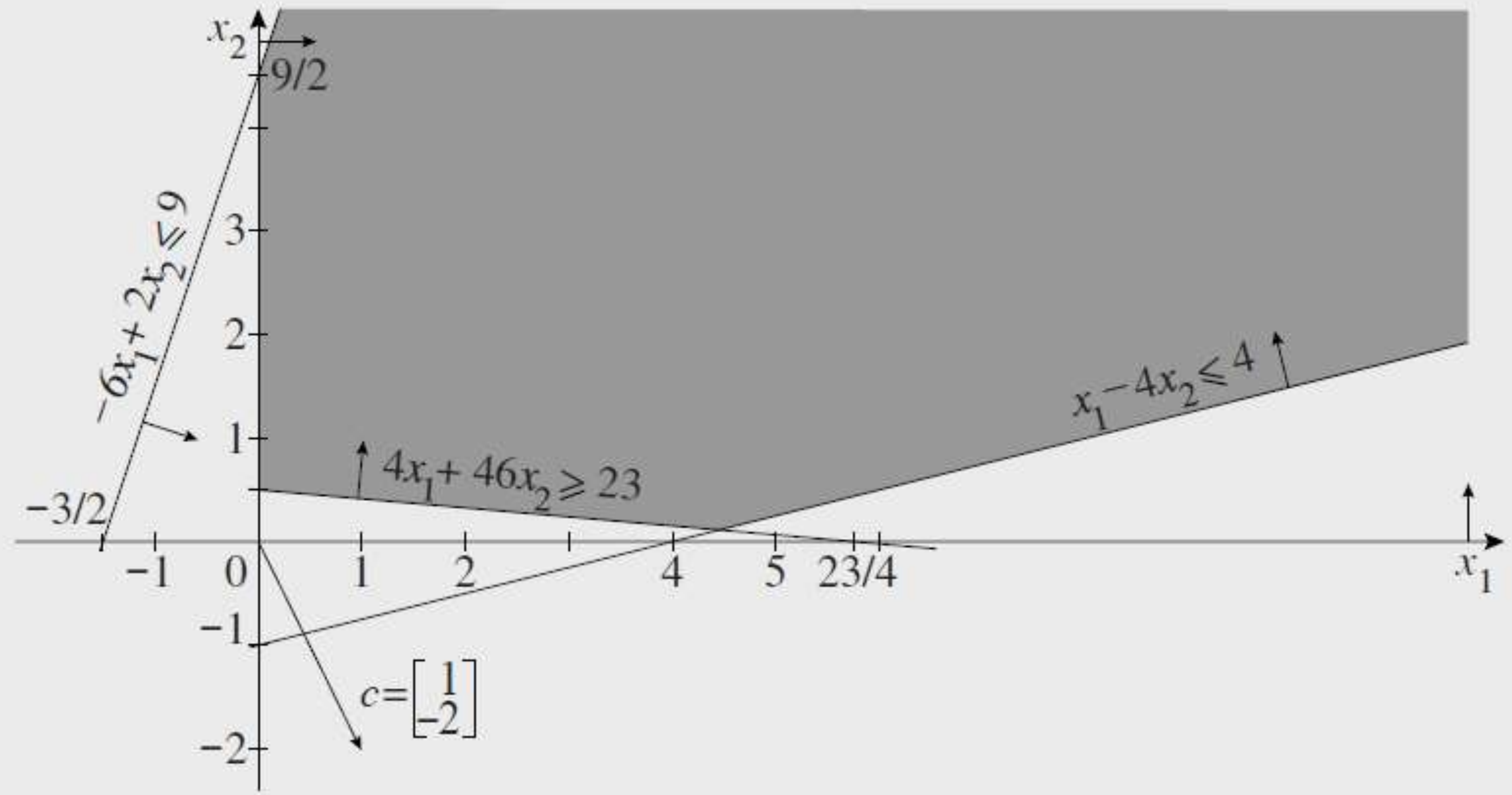


Figura 6.3. Caso di problema illimitato inferiormente.

Esercizio

Vale la pena osservare che se la funzione obiettivo fosse stata, ad esempio,

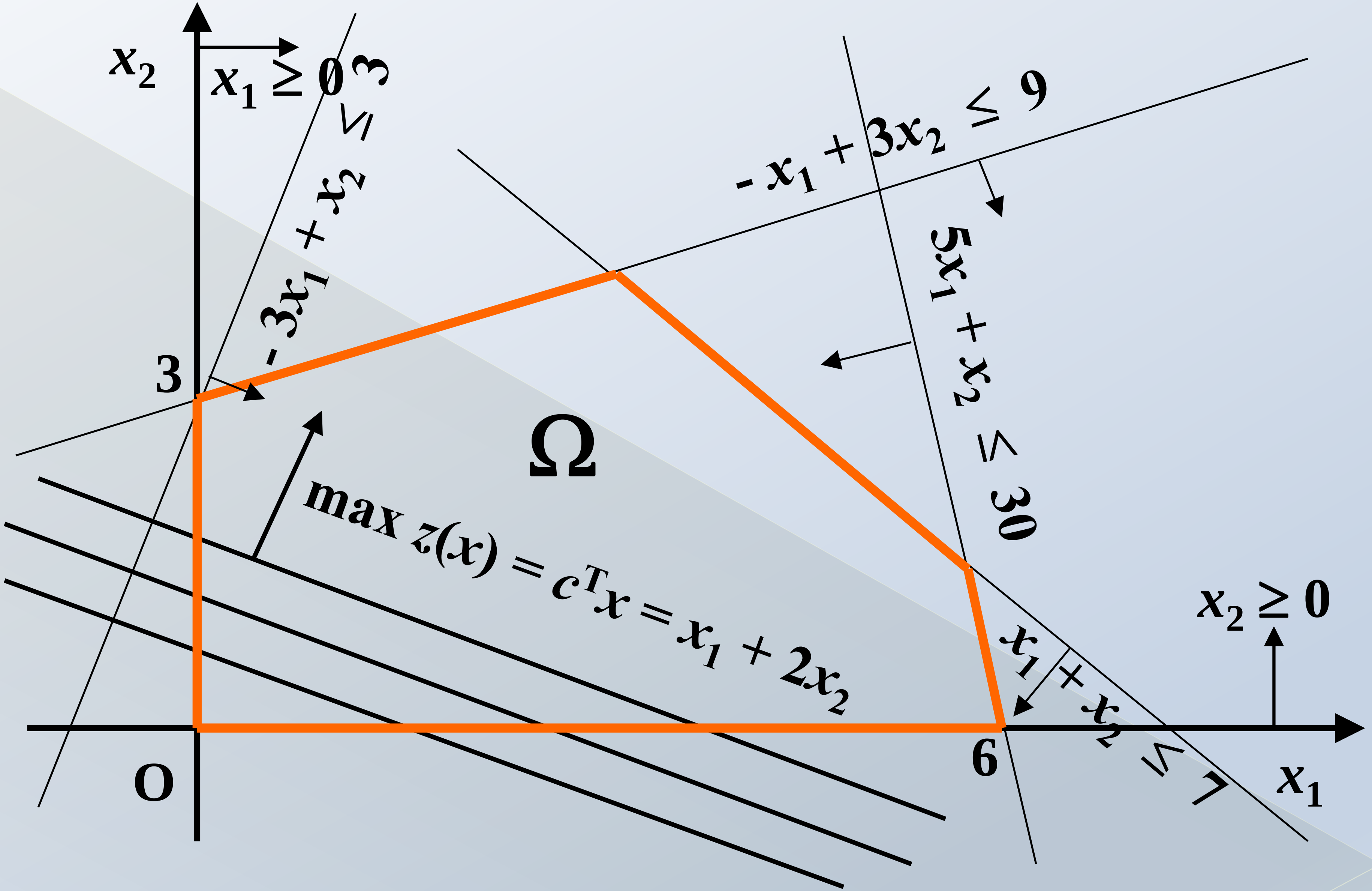
$$\min z(x) = 2x_1 + 3x_2$$

il problema avrebbe avuto soluzione ottima, in corrispondenza del punto $x^* = [0 \;\; {}^1/_2]^T$, con valore $z^* = {}^3/_2$.

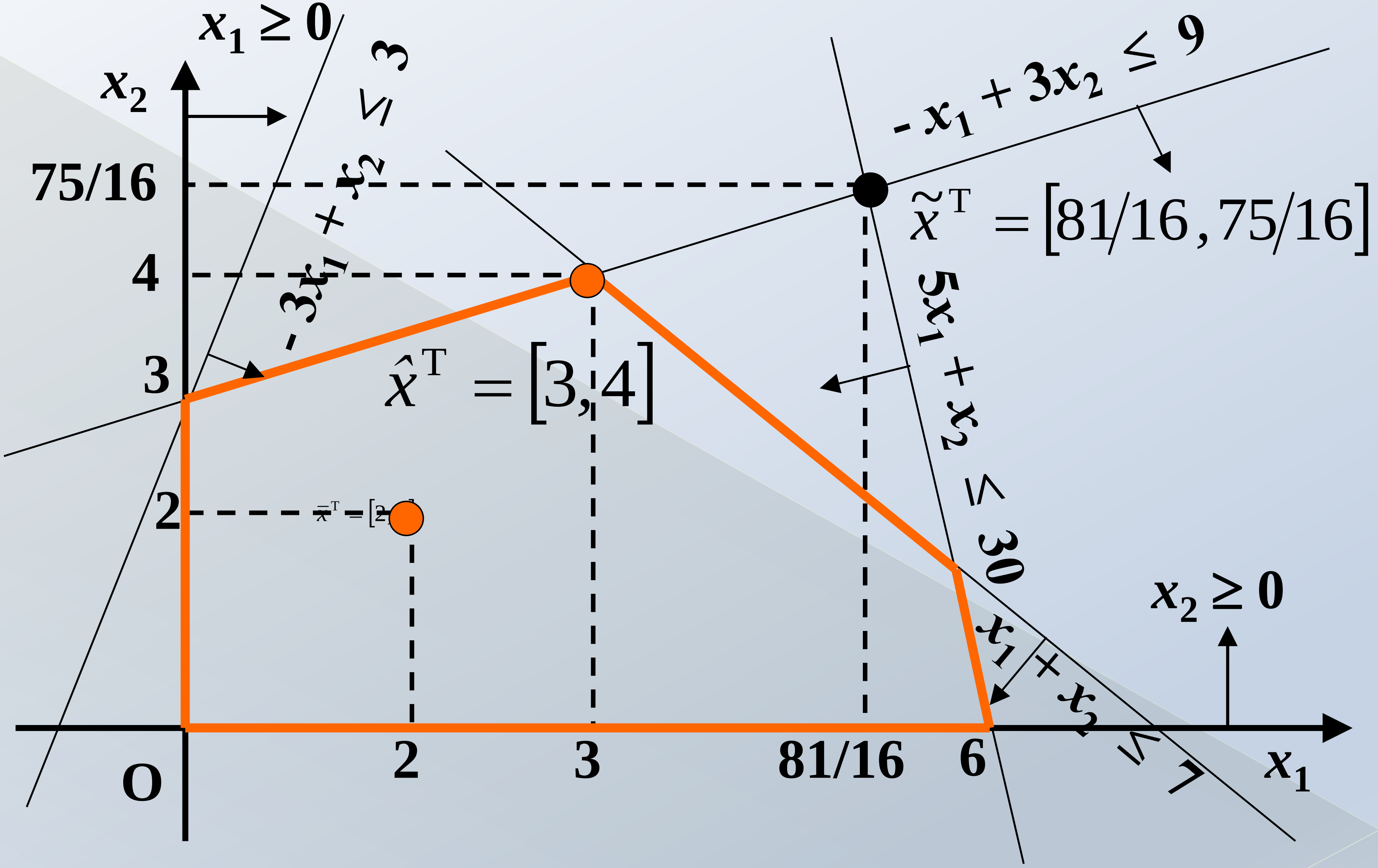
Ciò significa che, affinché un problema di PL sia illimitato inferiormente, è condizione necessaria che il poliedro P corrispondente sia illimitato, ma non sufficiente.

Esercizio

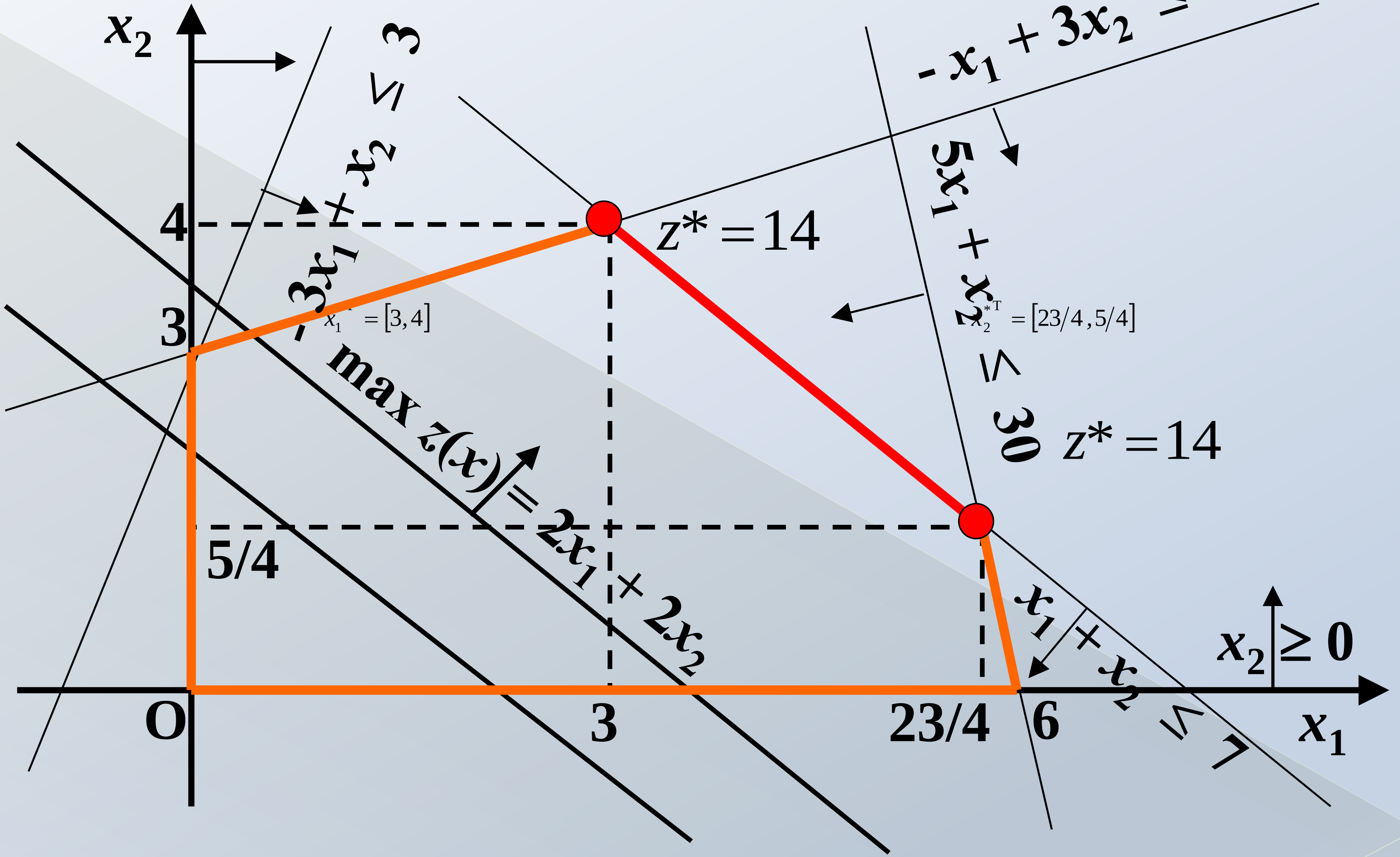
$$
\begin{array}{llllll}
\max & z(x) = & x_1 & +2x_2 & & \\
\text{s.v} & & & & & \\
& & -3x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\
& & -x_1 & +3x_2 & \leq & 9 \\
& & +5x_1 & +x_2 & \leq & 30 \\
& & +x_1 & +x_2 & \leq & 7 \\
& & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



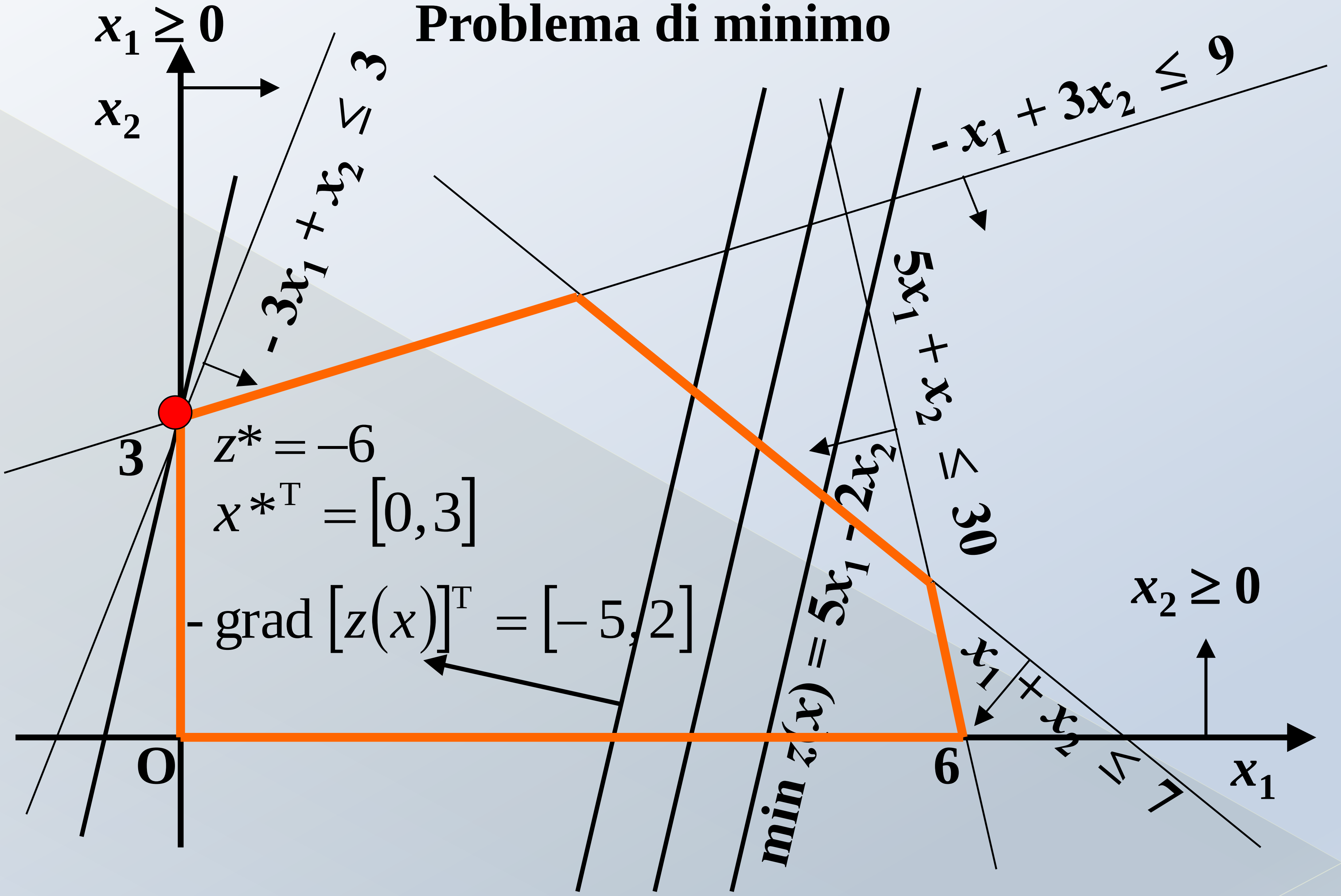
x_2
$x_1 \geq 0$
$-3x_1 + x_2 \leq 3$
$-x_1 + 3x_2 \leq 9$
$5x_1 + x_2 \leq 30$
$x_1 + x_2 \leq 7$
$x_2 \geq 0$
3
Ω
max $z(x) = c^T x = x_1 + 2x_2$
O
6
x_1


$x_1 \geq 0$
x_2
$-3x_1 + x_2 \leq 3$
$-x_1 + 3x_2 \leq 9$
75/16
4
3
2
$\tilde{x}^T = [81/16, 75/16]$
$\hat{x}^T = [3, 4]$
$5x_1 + x_2 \leq 30$
$x_2 \geq 0$
$x_1 + x_2 \leq 7$
O
2
3
81/16
6
x_1

Infinite soluzioni ottime



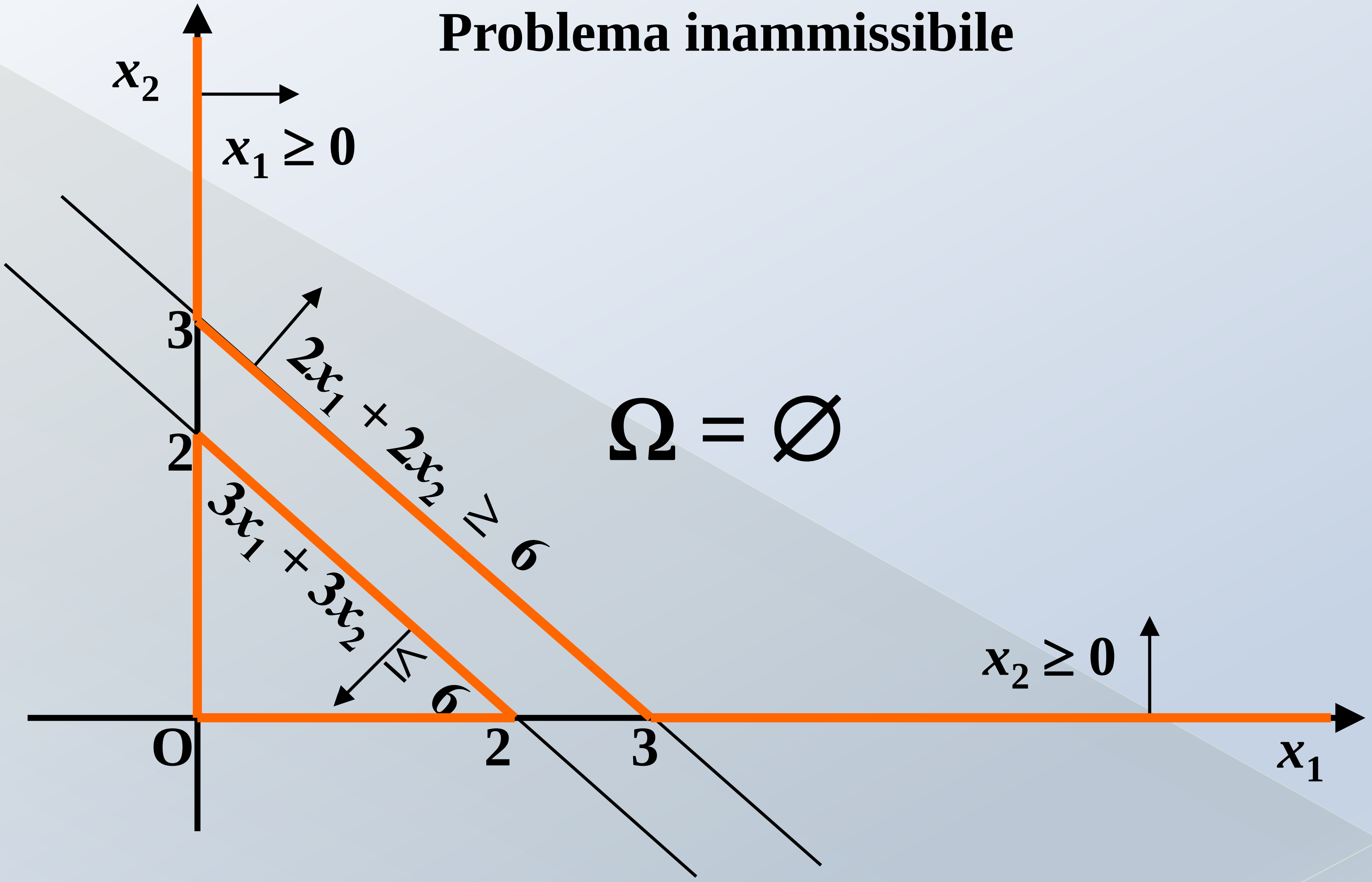
Problema di minimo



Esercizio

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & z(x) & = & -x_1 & -x_2 & & & \\
\text{s.v} & & & & & & & \\
& 2x_1 & + & 2x_2 & & \geq & 6, \\
& 3x_1 & + & 3x_2 & & \leq & 6 \\
& x_1, & & x_2 & & \geq & 0
\end{array}
$$

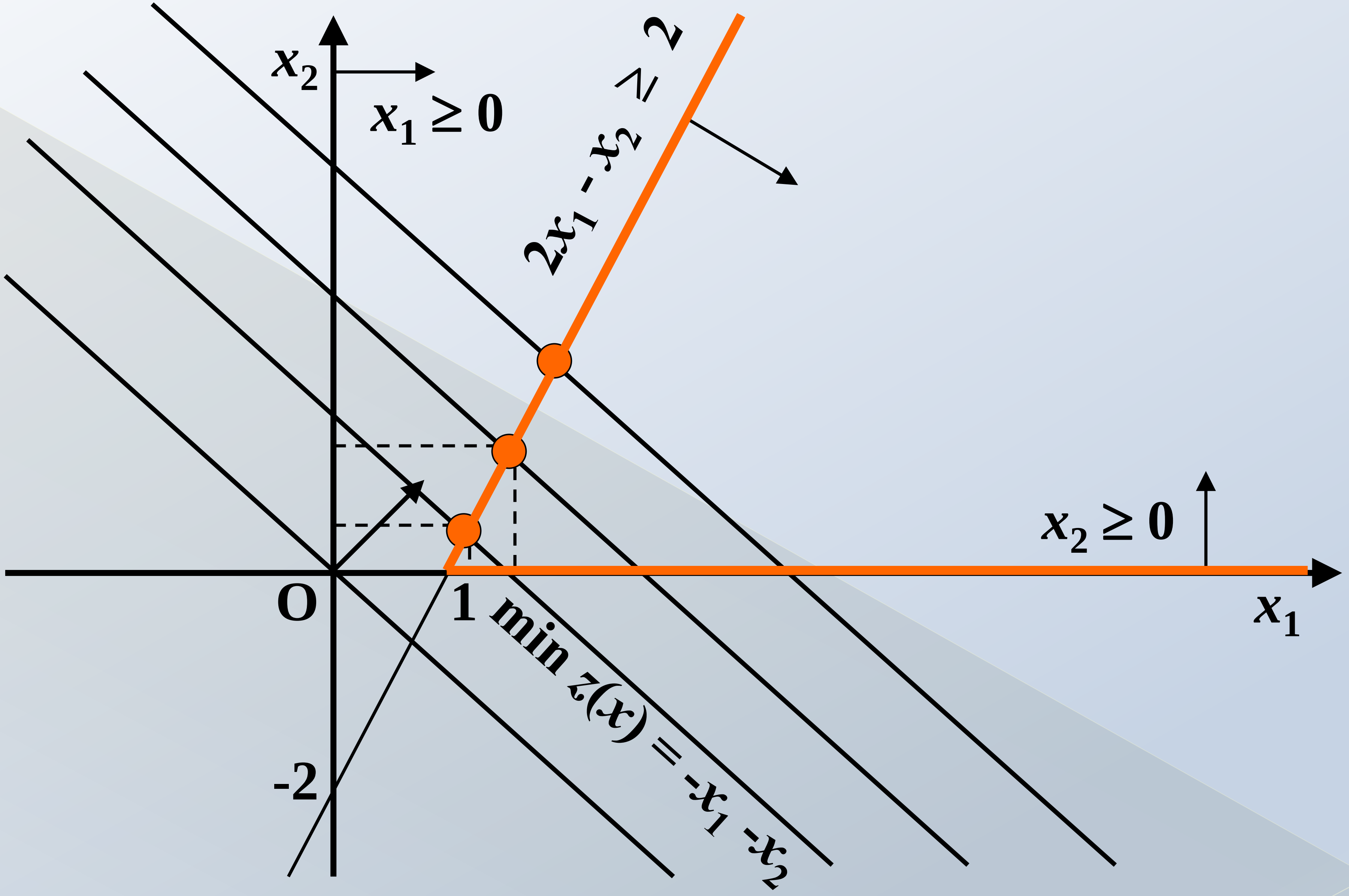
Problema inammissibile



$$\Omega = \varnothing$$

Esercizio

$$
\begin{array}{rrcrrrl}
\min & z(x) & = & -x_1 & -x_2 & & \\
\text{s.v} & & & & & & \\
& 2x_1 & - & x_2 & & \geq & 2 \\
& x_1, & & x_2 & & \geq & 0
\end{array}
$$



x_2
$x_1 \geq 0$
$2x_1 - x_2 \geq 2$
$x_2 \geq 0$
O
1
x_1
-2
min $z(x) = -x_1 - x_2$

Esercizio

- *Un'azienda vuole determinare il tasso di produzione settimanale di due prodotti, in modo da massimizzare il profitto netto totale. Per la produzione si utilizzano due prodotti. La tabella che segue riporta la quantità di materia prima richiesta, le ore di lavoro necessarie per produrre una unità di ciascun prodotto, i profitti netti per unità prodotta, la disponibilità settimanali di materia prima e le ore di lavoro che l'azienda possiede. La direzione ha stabilito che la produzione totale settimanale non può superare 100 kg.*

Esercizio

	Prodotto 1	Prodotto 2	Disponibilità settimanale in kg
Materia prima	20	40	2400
Ore di lavoro	15	5	600
Profitti netti (per unità di prodotto) in Euro	60	100	

1. Formulare il problema con PL

2. Risolvere il problema usando il metodo grafico

Esercizio

Dato il seguente problema di PL:

$$\max z(x) = x_1 - x_2$$

$s.v.$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$-2x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2\,x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Si determinino le coordinate dei vertici della regione ammissibile
- Lo si risolva per via grafica determinando le coordinate del punto di ottimo ed il valore ottimo di funzione obiettivo