

Geometria

I settimana

I lezione del **30 settembre 2013**

Presentazione del corso.

Nozioni e notazioni: concetti primitivi di insieme, elemento ed appartenenza.

Insiemi numerici: i numeri naturali  $\mathbb{N}$ , gli interi  $\mathbb{Z}$ , i numeri razionali  $\mathbb{Q}$ , i numeri reali  $\mathbb{R}$  e l'insieme dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ . Prodotto cartesiano di due insiemi.

Spazio vettoriale sui reali. Il prodotto cartesiano  $\mathbb{R}^2$ .

Sottospazi. Esempi. Legge di annullamento del prodotto negli spazi vettoriali ed applicazioni.

Esercizi proposti

- 1) Quali dei seguenti sottoinsiemi del campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$  sono sottospazi vettoriali?
  - a)  $W_1 = \{\text{multipli interi di } \frac{1}{5}\}$
  - b)  $W_2 = \{\text{insieme dei numeri interi}\}$
  - c)  $W_3 = \{\text{insieme dei numeri razionali}\}$ .
  
- 2) Quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  sono sottospazi vettoriali?
  - i)  $V_1 = \{(x, y): x = y\}$
  - ii)  $V_2 = \{(x, y): y = x + 2\}$
  - iii)  $V_3 = \{(x, y): (x, y) = a(1, 2), a \text{ appartenente al campo dei numeri reali}\}$ , ossia le coppie  $(a, 2a)$  con  $a$  variabile in  $\mathbb{R}$ .
  - iv)  $V_4 = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\}$
  
- 3) Si consideri il vettore  $v=(1,2)$  di  $\mathbb{R}^2$  e si trovi un vettore  $w$  tale che  $123 \cdot (v+w)=(0,0)$ .
  
- 4) Consideriamo l'insieme  $\mathbb{R}^3$  costituito dalle terne ordinate di numeri reali.
  - (a) Verificare che  $\mathbb{R}^3$  è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare, così definite:  
 $(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z') \quad \forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$   
 $a \cdot (x, y, z) = (ax, ay, az) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall a \in \mathbb{R}$ .
  - (b) Verificare che  $\mathbb{R}^3$  *non* è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare, così definite:  
 $(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x'+1, y+y', z+z') \quad \forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$   
 $a \cdot (x, y, z) = (ax, ay, az) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall a \in \mathbb{R}$ .

## Il lezione 2 ottobre 2013

**Argomenti** della seconda lezione di Geometria: Operazioni con i sottospazi: intersezione, unione e somma di sottospazi.

Combinazione lineare di vettori. Vettori linearmente indipendenti (l.i.) e l.d. Generatori di uno spazio vettoriale. Base di uno spazio vettoriale. Componenti di un vettore rispetto ad una base. Basi canoniche. Criterio per la lineare indipendenza. Dimensione di uno spazio vettoriale.

### Esercizi proposti

- 1) Si considerino i due sottospazi di  $\mathbb{R}^3$ :

$$V = \{(x, y, z): x = y\},$$

$$W = \{(x, y, z): y = z\}.$$

Si descriva il sottospazio intersezione

$$Z = V \cap W.$$

Si descriva il sottospazio somma  $V+W$ .

- 2) Esiste un sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  che non contiene nessuno dei seguenti vettori:  $v=(1,0)$  e  $w(0,1)$ ?
- 3) Si stabilisca per quali valori di  $a$  reale i vettori  $(5,5)$  e  $(2,a)$  sono linearmente dipendenti.
- 4) Si trovi la dimensione del sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$   
$$V = \mathcal{L}((1,1,1), (2,0,0), (3,1,1)).$$
- 5) Si trovi una base di  $\mathbb{R}^2$  che non contiene nessuno dei seguenti vettori:  $v=(1,0)$  e  $w(0,1)$ .
- 6) Si trovino le componenti del vettore  $v=(5,2)$  rispetto alla base trovata nell'esercizio 5.
- 7) Si provi che i vettori  $(1,5,5)$  e  $(2,2,-1)$  non formano una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- 8) Si provi che i vettori  $(1,5,5)$ ,  $(2,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  e  $(2,2,-1)$  non formano una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- 9) I vettori  $v=(1,1,0)$  e  $w=(0,4,-1)$  formano una base del sottospazio vettoriale  $V$  di  $\mathbb{R}^3$  definito dall'equazione  $x-y=4z$ ?
- 10) Si trovino due sottospazi distinti  $V$  e  $W$  di  $\mathbb{R}^3$  contenenti entrambi i due vettori  $v=(1,1,1)$  e  $w=(0,0,3)$ .
- 11) Si stabilisca per quali valori reali di  $h$  i vettori  $\mathbf{v}=\mathbf{i}-h\mathbf{j}$  e  $\mathbf{w}=2\mathbf{i}-h\mathbf{j}$  sono linearmente indipendenti.

Il settimana

III lezione **7 ottobre 2013**

Unicità della scrittura di un vettore mediante gli elementi di una base. Insieme libero. Proprietà sulla dimensione di un sottospazio. Determinazione di una base a partire da un insieme di generatori. (Metodo degli scarti). Determinazione di una base a partire da un insieme di vettori linearmente indipendenti. (Metodo del completamento). Matrici e notazioni. Somma tra matrici. Moltiplicazione di un numero per una matrice. Insieme delle matrici come spazio vettoriale sui reali. Matrice nulla. Matrice opposta. Matrice ridotta per righe. Trasformazioni elementari per la riduzione di una matrice. Rango o caratteristica di una matrice. Spazio delle righe e spazio delle colonne di una matrice. Teorema sulla dimensione dello spazio delle righe e lo spazio delle colonne di una matrice. Rango di una matrice ridotta.

Dimensione di un sottospazio utilizzando una matrice associata ai generatori del sottospazio.

Formula di Grassmann. Esercitazioni sul calcolo del rango, sulle dimensioni di sottospazi, sull'intersezione e sulla somma, sul calcolo di una base di un sottospazio.

Esercizi.

- 1) Dati i sottospazi di  $\mathbb{R}^2$ :  $U=\langle(1,3)\rangle$  e  $V=\langle(0,1)\rangle$ , calcolare la dimensione di U ed una sua base, la dimensione di V ed una sua base, la dimensione del sottospazio intersezione ed una sua base se è definita, la dimensione del sottospazio somma ed una sua base.
- 2) Calcolare il rango della matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

A è una matrice ridotta per righe?

Con trasformazioni elementari trasforma A in una matrice equivalente ridotta per righe, detta B tale matrice. Quante sono le righe non nulle di B? Calcolare il rango di B.

- 3) Si trovi una base di  $\mathbb{R}^3$  contenente il vettore  $v=(1,1,5)$ .
- 4) Si trovi una base del seguente sottospazio

$$V = \{(x, y, z): x + y = 0 = y - z\}$$

di  $\mathbb{R}^3$ .

- 5) Si trovi la dimensione ed una base del sottospazio di  $\mathbb{R}^4$ :

$$V=\langle(1,1,1,1), (2,0,7,8), (1,-1,6,7)\rangle.$$

- 6) Si trovi una base di  $\mathbb{R}^2$  che non contenga i vettori della base canonica.

#### IV lezione 9 ottobre 2013

Prodotto tra matrici. Matrice identica. Matrice invertibile. Matrice inversa. Unicità della matrice inversa (con dimostrazione). Trasposta di una matrice. Matrice diagonale. Matrici simmetriche. Matrici antisimmetriche. Proprietà del prodotto. Matrice inversa della matrice prodotto. Matrice quadrata somma di una matrice simmetrica ed una antisimmetrica. Sottospazi di matrici.

#### Esercizi

- 1) Calcolare i prodotti tra matrici  $A \cdot B$  e  $B \cdot A$  dove

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

- 2) Trovare due matrici di ordine tre non nulle il cui prodotto è la matrice nulla.
- 3) Calcolare la trasposta di A, la trasposta di B, la trasposta di A+B e la trasposta di A · B.
- 4) Calcolare il sottospazio T delle matrici antisimmetriche di ordine 2 nello spazio vettoriale sui reali delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Determinare la dimensione di T ed una sua base.  
Detto S il sottospazio delle matrici simmetriche di ordine 2 nello spazio vettoriale sui reali delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Determinare la dimensione di S+T ed una sua base. Determinare la dimensione di  $S \cap T$  ed una sua base se è definita.
- 5) Calcolare la dimensione ed una base del sottospazio delle matrici diagonali di ordine 3.
- 6) Stabilire se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  è invertibile. Determinare la matrice inversa di  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

#### III settimana

#### V lezione 14 ottobre 2013

Sistemi lineari. Soluzione di un sistema lineare. Teorema di Rouchè-Capelli (I e II parte), sulla risolubilità di un sistema lineare e sul numero di soluzioni di un sistema lineare. Sistemi lineari equivalenti. Sistema lineare ridotto. Risoluzione di un sistema lineare ridotto. Risoluzione di un sistema con il metodo di riduzione. Discussione di un sistema lineare parametrico con il metodo di riduzione.

#### Esercizi proposti.

- 1) Calcolare il rango delle seguenti matrici:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 12 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{array} \right).$$

2) Stabilire se i seguenti sistemi lineari sono risolubili e trovare le eventuali soluzioni:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ \frac{2}{5}x - y = 3 \end{cases}; b) \begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}; c) \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 5 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

3) Stabilire se i seguenti sistemi lineari sono risolubili e trovare le eventuali soluzioni:

$$d) \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}; e) \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}; f) \begin{cases} x - y + 2z + w = 0 \\ x + y - z + 2w = 0 \end{cases}$$

4) Stabilire se i seguenti sistemi lineari sono risolubili e trovare le eventuali soluzioni:

$$g) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 2 \\ 7x + 8y + 9z = 3 \end{cases}; h) \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -3x - y - 7z = 4 \\ 5x + 2y + 9z = -10 \\ x + \frac{1}{2}y + z = -3 \end{cases}; i) \begin{cases} x - y - z + 2w = 5 \\ 2x - y - z + w = -4 \\ -x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - w = -\frac{1}{3} \\ 5x - 3y - 3z + 4w = -3 \end{cases}$$

5) Per ciascuno dei seguenti sistemi lineari seguenti, determinare, se possibile, i valori del parametro reale k per cui esso è compatibile:

$$1) \begin{cases} x = 3 \\ 3x - 5y = 4 \\ x + y + z = k \end{cases}; 2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 + k \\ 4x + 5y + 6z = k \\ 7x + 8y + 9z = k + 1 \end{cases}; 3) \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 2x + y = 7 \\ 8x + 3y = k^2 \end{cases}$$

6) Stabilire se i seguenti sistemi lineari sono risolubili e trovare le eventuali soluzioni:

$$i) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \\ 5x + 9y = 6 \end{cases}; ii) \begin{cases} x + 2y - z + 5w = 7 \\ 2x - 4y - z - 2w = -1 \\ 5x - 6y - 3z + w = 0 \end{cases}; iii) \begin{cases} x + 2y - 8z + w + 3t = 0 \\ 2x - 7y - 3z - 2w + 2t = 0 \\ -3x + 27y - 15z + 9w + 3t = 0 \\ 3x - 16y + 2z - 5w + t = 0 \end{cases}$$

IV settimana

VI lezione 21 ottobre

Esercitazioni tenute dal dott. Fabio Versaci

V settimana

VII lezione 28 ottobre 2013

Equazioni matriciali. Calcolo dell'inversa di una matrice utilizzando un'equazione matriciale. Teorema di Rouchè-Capelli per le equazioni matriciali. Determinante di una matrice di ordine 1, 2 e 3. Teorema di Laplace. Regola di Sarrus. Proprietà dei determinanti. Complemento algebrico di un elemento. Matrice aggiunta. Inversa di una matrice tramite la matrice aggiunta. Criterio di invertibilità di una matrice. Utilizzo del determinante per calcolare la lineare indipendenza di n vettori in spazio vettoriale di dimensione n.

- 1) Stabilire se la seguente matrice è invertibile  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  e calcolare la sua inversa  $A^{-1}$  utilizzando le equazioni matriciali ed il metodo della matrice aggiunta. Verificare che il prodotto di A per la sua inversa è uguale alla matrice identica.

- 2) Calcolare i seguenti determinanti

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

- 3) Calcolare l'inversa della matrice  $A^{-1}$  dell'esercizio (1)

- 4) Calcolare per quali valori del parametro reale k la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & k \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  è invertibile e calcolare l'inversa di A per k=3.

- 5) Stabilire se i vettori (1,2,3) (0,4,0) e (1,1,5) sono linearmente indipendenti.

VIII lezione **30 ottobre 13**

Matrici triangolari alte e basse. Proprietà dei determinanti. Teorema di Binet. Determinante della trasposta. Determinante di una matrice triangolare. Matrici ortogonali. Determinante di una matrice ortogonale (con dimostrazione). Regola di Cramer. Studio di sistemi lineari parametrici. Teorema di Kronecher.

Esercizi

- 1) Stabilire quali delle seguenti matrici sono triangolari, quali simmetriche, quali antisimmetriche, quali diagonali, quali ortogonali e calcolare il determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x \\ -\operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2) Calcolare il determinante dei seguenti matrici prodotto:  $A \cdot C, A \cdot D, C \cdot D, e A \cdot C \cdot D, E \cdot F, B \cdot F$ .

3) Studiare il seguente sistema lineare  $A \cdot X = B$  con la regola di Cramer:

$$\text{dove } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5) Studiare i seguenti sistemi lineari al variare del parametro reale  $k$ :

(a)

$$\begin{cases} x + ky + 3z + (k-1)t = 0 \\ 3x + 5y + 2z + 2t = 0 \\ 4x + 3y + t = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} (k-3)x - y + 5z = 1 \\ (3-k)y + 6z = 3 \\ (k-3)z = 3 - k \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (k+5)x = -k-5 \\ x + 2y = -3 \\ 7x - y + (k+5)z = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x + ky + z = 1 \\ 4x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

VI settimana

IX lezione **4 novembre 2013**

Applicazioni al teorema di Kronecher. Calcolo del rango. Determinante di una matrice di ordine 4.  
Applicazioni lineari. Esempi. Proprietà delle applicazioni lineari.

## Esercizi

- 1) Calcolare il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 0 & 00 & -1 \\ 2 & 22 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 2) Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro reale k:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ k & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ k-2 & 2 & k-1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & k-1 & -1 \\ 3 & k-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 3) Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0100 \\ 0030 \\ 6128 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1100 \\ 0291 \\ 0030 \\ 0028 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1101 \\ 0291 \\ 2030 \\ 3008 \end{pmatrix}$$

- 4) Stabilire se le seguenti applicazioni sono lineari motivando la risposta:

- a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x + 3y, x)$   
b)  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x + 3y, x^2)$   
c)  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x + 3y + 2, 0)$ .

## X lezione 6 Novembre 2013

Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Matrice associata ad un'a.l. Teorema della dimensione.

Calcolo del nucleo di un'a.l. mediante la matrice associata. A.l. iniettive, suriettive e biunivoche.

Isomorfismi. Criterio di iniettività. Criterio per gli isomorfismi. Esercitazioni.

## Esercizi

- 1) Data l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (x + y + z, 2y, x - y + z)$ .

- a) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio.  
b) Determinare la dimensione del nucleo ed una sua base.  
c) Determinare la dimensione dell'immagine di f ed una sua base.  
d) f è iniettiva?  
e) f è suriettiva?  
f) f è un isomorfismo?

- 2) Data l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = \left(-y + z, 5x - 3y - \frac{3}{4}z, -4x + 3z\right)$ .

- b) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio.  
b) Determinare la dimensione del nucleo ed una sua base.  
c) Determinare la dimensione dell'immagine di f ed una sua base.  
d) f è iniettiva?  
e) f è suriettiva?  
f) f è un isomorfismo?

- 3) Data l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + 2y + 3z, x + 2y + 3z)$ .

- c) Scrivere la matrice A associata ad f rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio.  
b) Determinare la dimensione del nucleo ed una sua base.  
c) Determinare la dimensione dell'immagine di f ed una sua base.  
d) f è iniettiva?  
e) f è suriettiva?



f)  $f$  è un isomorfismo?

- 4) Data l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $f(x, y, z) = (2x + 2y + 3z, -x, 3x - y + kz)$  al variare del parametro reale  $k$ .
- Scrivere la matrice  $A$  associata ad  $f$  rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio.
  - Determinare la dimensione del nucleo ed una sua base al variare del parametro reale  $k$ .
  - Determinare la dimensione dell'immagine di  $f$  ed una sua base, al variare del parametro reale  $k$ .
  - Stabilire se  $f$  è iniettiva, suriettiva ed isomorfismo al variare del parametro reale  $k$ .
- 5) Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare definita da:  
 $f(x, y, z, t) = (x+y+z+t, x+y+z+t, x+y+z+t, x+y+z+t)$ .
- Stabilire se il vettore  $(1;1;1;1)$  appartiene al sottospazio intersezione  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$ .
  - Stabilire se il vettore  $(1;1;1;1)$  appartiene al nucleo di  $f$ .
  - Stabilire se il vettore  $(1;1;1;1)$  appartiene all'immagine di  $f$ .
- 6) Data l'applicazione lineare  $: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $f(x, y, z) = (2x + 2y - z, -2x - 2y + z)$  stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false:
- Il nucleo di  $f$  contiene solo il vettore nullo.
  - Il nucleo di  $f$  è generato da  $(1;0;2)$ ,  $(0;1;2)$  e  $(2;-1;2)$ .
  - Il nucleo di  $f$  ha come base  $((1;0;2), (0;1;2), (2;-1;2))$ .
  - Il nucleo di  $f$  è generato da  $(1;1;4)$ .

XI lezione **7 novembre 2013**

Esercitazione tenuta dal dott. Fabio Versaci

VII settimana

XII lezione **11 novembre 2013**

Applicazione lineare associata ad una matrice. Applicazione lineare inversa. Composizione di applicazioni lineari. Immagine di un vettore mediante la matrice associata all'applicazione lineare. Controimmagine di un vettore. Matrice associata all'a. l. inversa. Matrice di passaggio o del cambiamento di base. Come varia la matrice associata ad un'a. l. al variare della base. Esercitazioni, applicazione del teorema sulla matrice associata ad una a.l. e calcolo diretto.

### Esercizi

- 1) Data l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $f(x, y, z) = (x + y - z, 2y + 3z, y + z)$
- determinare l'applicazione lineare inversa se è definita.
  - determinare la controimmagine del vettore  $(0,5,0)$
  - determinare la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base  $B = ((1,2,-1), (2,0,3), (1,0,0))$  nel dominio e nel codominio.
  - determinare la matrice di passaggio dalla base canonica di  $\mathbb{R}^3$  alla base  $B$ .

e) determinare la matrice di passaggio dalla base B alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

2) Determinare la composizione delle applicazioni  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $f(x,y)=(3x-y, x+y)$  e  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $g(x,y)=(x,x)$ . Stabilire se l'applicazione  $f$  composta  $g$  è iniettiva, suriettiva ed isomorfismo.

3) Data l'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $f(x, y, z) = (x + 5y + z, 3y + z, -8z)$

b) determinare la controimmagine del vettore  $(1,2,3)$

c) determinare la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base  $B=((1,2,-1), (2,0,3),(1,0,0))$  nel dominio e nel codominio.

d) determinare la matrice di passaggio dalla base canonica di  $\mathbb{R}^3$  alla base B.

e) determinare la matrice di passaggio dalla base B alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

### XIII lezione **13 novembre 2013**

Applicazione lineare definita su una base: teorema ed applicazioni. Autovalori, autovettori ed autospazi di un endomorfismo. Polinomio caratteristico. Molteplicità di un autovalore. Esercitazioni.

#### Esercizi

1) Stabilire se esiste un'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che

$$f(1,0,0,0)=(0, 0,1,0),$$

$$f(0,1,1,0)=(2,1,1,0)$$

$$f(0,1,1,1)=(0,0,0,0).$$

In caso di risposta affermativa stabilire se esiste una sola di tali applicazioni lineari o più di una.

2) Stabilire se esiste un'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$f(1,3,0)=(0, 1,0),$$

$$f(0,1,1)=(0,0,1)$$

$$f(1,5,2)=(0,1,1).$$

In caso di risposta affermativa stabilire se esiste una sola di tali applicazioni lineari o più di una.

3) Stabilire se esiste un'applicazione lineare  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$f(1,3,0)=(0, 1,0),$$

$$f(0,1,1)=(0,0,1)$$

$$f(1,5,2)=(0,1,2).$$

In caso di risposta affermativa stabilire se esiste una sola di tali applicazioni lineari o più di una.

4) Data l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $f(x,y,z)=(x+5y+z, 3y+z, -8z)$

- i. Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine, una base del nucleo ed una base dell'immagine quando sono definite.
- ii. Calcolare autovalori con le rispettive molteplicità e autospazi dell'endomorfismo  $f$
- iii. Calcolare la controimmagine del vettore  $(1,-1,3)$ .

5) Data l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $f(x,y,z)=(x, y, z)$

- i. Calcolare il polinomio caratteristico di  $f$
- ii. Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine, una base del nucleo ed una base dell'immagine quando sono definite.
- iii. Calcolare autovalori con le rispettive molteplicità e autospazi dell'endomorfismo  $f$
- iv. Calcolare la controimmagine del vettore  $(1,-1,3)$ .

6) Data l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $f(x,y,z)=(5x,5x, 5x)$

- a) Calcolare il polinomio caratteristico di  $f$
- b) Calcolare autovalori con le rispettive molteplicità e autospazi dell'endomorfismo  $f$
- c) Calcolare la controimmagine del vettore  $(1,1,1)$ .

VIII settimana

XIV lezione **18 novembre 2013**

Legame tra l'esistenza dell'autovalore nullo ed il nucleo di un endomorfismo. Endomorfismo semplice. Matrice diagonalizzabile. Matrici simili. Criteri per gli endomorfismi semplici. Procedura per determinare se un endomorfismo è semplice. Teorema sulla dimensione degli autospazi. Teorema sulla lineare indipendenza di autovettori non nulli associati ad autovalori a due, a due distinti. Autovalori di una matrice triangolare.

Esercizi

- 1) Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  ad elementi reali. Trovare autovalori e autospazi di  $A$  e stabilire se  $A$  è diagonalizzabile.
- 2) Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  ad elementi reali. Trovare autovalori e autospazi di  $A$  e stabilire se  $A$  è diagonalizzabile.
- 3) Data l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $f(x,y,z)=(-2x+z, 4x-2z, 4x-2z)$ 
  - i) stabilire se  $f$  è semplice.
  - ii) Determinare una matrice diagonale  $D$  simile ad  $A=M_f^{C,C}$  (essendo  $A$  la matrice associata ad  $f$  rispetto alle basi canoniche.
  - iii) Determinare una matrice  $P$  che diagonalizza  $A$ .

- iv) Verificare che  $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ .
  - v) Determinare una base di autovettori di  $\mathbb{R}^3$
- 4) Data l'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  definita da  $f(x,y,z,t)=(x+z, y, 0,z-t)$ .
- a) Stabilire se  $f$  è iniettiva.
  - b) Stabilire se  $f$  ha l'autovalore nullo.
  - c) Stabilire se la matrice associata ad  $f$  rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio è diagonalizzabile.
  - d) Stabilire se  $f$  è semplice.

#### XV lezione 20 novembre 2013

Proprietà delle matrici simili. Traccia di una matrice. Proprietà: Matrici simili hanno lo stesso determinante. (con dimostrazione) Matrici ortogonalmente diagonalizzabili. Teorema sulle matrici simmetriche reali. Prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$ . Vettori ortogonali. Norma di un vettore. Versore. Normalizzato di un vettore. Base ortogonale. Base ortonormale. Procedimento di Gram-Schmidt per determinare una base ortonormale.

#### Esercizi

- 1) Stabilire se le matrici  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sono simili.
- a) Hanno la stessa traccia?
  - b) Hanno lo stesso determinante?
  - c) Hanno lo stesso rango?
  - d) Hanno lo stesso polinomio caratteristico?
  - e) Provare che esiste una matrice  $P$  invertibile tale che  $P \cdot A = B \cdot P$  e determinare una tale matrice.
  - f) Determinare due differenti matrici  $P$  e  $P'$  che soddisfano la relazione precedente del punto e).
- 2) Stabilire se le matrici  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  sono simili.
- a) Hanno la stessa traccia?
  - b) Hanno lo stesso determinante?
  - c) Hanno lo stesso rango?
  - d) Hanno lo stesso polinomio caratteristico?
  - e) Provare che non esiste una matrice  $P$  invertibile tale che  $P \cdot A = B \cdot P$ .
- 3) In  $\mathbb{R}^3$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ , dati i vettori  $(k+1,1,0)$ ,  $(1,0,k)$ ,  $(2,0,2)$  stabilire quali delle seguenti affermazioni è vera:
- a) Sono linearmente dipendenti per ogni valore reale di  $k$ .
  - b) Generano un sottospazio di dimensione 2 per ogni valore reale di  $k$ .
  - c) Per  $k=0$  formano una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$ .
  - d) Sono linearmente dipendenti per  $k=1$ .
- 4) Stabilire se la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  è diagonalizzabile.

- 5) Stabilire se la matrice  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  è ortogonalmente diagonalizzabile.
- 6) Determinare una base ortonormale del sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato dai vettori:  $(1,1,1)$  e  $(0,1,-2)$ .
- 7) Determinare il prodotto scalare dei vettori  $(1,-1,3,5)$  e  $(3,1,-4,0)$ .
- 8) I vettori  $(2,-2,0)$  e  $(1,1,0)$  sono ortogonali?
- 9) Calcolare la norma del vettore  $(1,7,1)$  ed il normalizzato del vettore  $(1,7,1)$ .
- 10) Determinare una base ortonormale del sottospazio  $W = \langle (0, 0, 1, 0), (2, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 0) \rangle$ .

#### XVI lezione **21 novembre 2013**

Esercitazioni tenute dal dott. Fabio Versaci.

IX settimana

#### XVII lezione **25 novembre 2013**

Coordinate cartesiane e coordinate polari nel piano e nello spazio. Relazioni tra coordinate polari e cartesiane nel piano. Cambiamenti di riferimento: Traslazioni, Rotazioni e Rototraslazioni nel piano e nello spazio. Proprietà della matrice di rotazione. Parallelismo tra vettori e ortogonalità tra vettori. Nel piano: Equazione cartesiana della retta, determinata da un punto della retta ed un vettore perpendicolare alla retta. Forma esplicita dell'equazione di una retta e coefficiente angolare. Equazione parametrica di una retta, determinata da un punto della retta e da un vettore parallelo alla retta. Parametri direttori di una retta. Passaggio dalla forma cartesiana a quella parametrica.

Esercizi

- 1) Determinare le coordinate cartesiane del punto P di coordinate polari  $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ .
- 2) Determinare le coordinate cartesiane del punto P di coordinate  $(1,-1)$  in un riferimento cartesiano Oxy, dopo aver effettuato una traslazione dell'origine nel punto O' di coordinate cartesiane  $(2,3)$  rispetto al riferimento Oxy e dopo aver effettuato una rotazione di  $\frac{\pi}{3}$ .
- 3) Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per P(2,5) ed ortogonale al vettore  $w=(1,-3)$ .
- 4) Determinare l'equazione parametrica della retta passante per P(2,5) ed parallela al vettore  $v=(2,-1)$ .
- 5) Determinare la forma cartesiana della retta r data in forma parametrica  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$ .

- i. Il punto P(1,3) appartiene ad r?
- ii. Il punto Q(-1,4) appartiene ad r?
- iii. Quali sono i parametri direttori della retta r?
- iv. Determinare le componenti di un vettore ortogonale ad r.
- v. (4,-2) sono parametri direttori di r?
- vi. (1,3) sono parametri direttori di r?

### XVIII lezione 27 Novembre 2013

Distanza tra due punti. Punto medio di un segmento. Punti simmetrici rispetto agli assi cartesiani e rispetto all'origine. Retta per due punti. Passaggio dalla forma cartesiana alla parametrica. Parallelismo e perpendicolarità tra rette. Intersezioni tra rette. Distanza punto-retta. Distanza tra due rette parallele. Fascio di rette: forma omogenea e non omogenea. Fascio proprio e improprio.

#### Esercizi

- 1) Calcolare la distanza tra i due punti A e B di coordinate rispettivamente
  - i) (2,3) e (1,8)
  - ii) (1,0) e (7,0)
  - iii) (0,9) e (0,10)
  - iv) (-1,5) e (-2,-3).
- 2) Calcolare le coordinate del punto medio M del segmento AB avente come punti estremi i punti A e B definiti nell'esercizio 1) nei casi i), ii), iii) e iv).
- 3) Calcolare il simmetrico di A(2,3) rispetto all'asse x; il simmetrico di A(2,3) rispetto all'asse y ed il simmetrico di A(2,3) rispetto all'origine.
- 4) Calcolare il simmetrico di A(-2,-3) rispetto all'asse x; il simmetrico di A(-2,-3) rispetto all'asse y ed il simmetrico di A(-2,-3) rispetto all'origine.
- 5) Determinare le equazioni della retta passante per due punti A e B nei differenti casi definiti nell'esercizio 1) : i), ii), iii) e iv).
- 6) A) Determinare la forma parametrica della retta r) di equazione  $3x+8y-1=0$  e della retta s) di equazione  $x=-5$ .
  - B) Determinare i parametri direttori di r e di s.
  - C) Le rette r) ed s) sono perpendicolari?
  - D) Le rette r) ed s) sono parallele?
  - E) Determinare il punto d'intersezione tra r) ed s)
- 7) i) Le rette r ed s di equazioni rispettivamente  $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$  ed  $s: \begin{cases} x = -2t \\ y = 5 + t \end{cases}$  sono perpendicolari?
  - ii) Le rette r) ed s) sono parallele?
  - iii) Scrivere l'equazione omogenea del fascio di rette individuato da r e da s:
  - iv) Scrivere l'equazione non omogenea del fascio di rette individuato da r e da s.
  - v) Il fascio individuato da r ed s è proprio o improprio?
- 8) Determinare il punto d'intersezione tra r) ed s) rispettivamente di equazioni:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases} \text{ ed } s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$$

- 9) Le rette r ed s di equazioni rispettivamente  $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$  ed  $s: 2x+4y-1=0$  sono parallele? Sono perpendicolari? Sono incidenti?
- 10) Determinare la retta parallela alla retta r di equazione  $3x+y-5=0$  e passante per l'origine  $O(0,0)$ .
- 11) Determinare la retta passante per l'origine  $O(0,0)$  e per il punto di intersezione delle rette r)  $2x+3y+1=0$  ed s)  $x-y+5=0$ .
- 12) Calcolare la distanza del punto  $P(1,1)$  dalla retta r di equazione  $2x+y-7=0$ .
- 13) Calcolare la distanza delle due rette r ed s di equazioni: r)  $x+y+5=0$  ed s)  $2x+2y-3=0$ .

X settimana

### XIX lezione 2 dicembre '13

Angoli formati tra due rette. Vettore perpendicolare ad un dato vettore. Retta per un punto perpendicolare ad una retta. Circonferenza. Intersezioni tra una retta ed una circonferenza. Intersezione di due circonferenze. L'asse radicale. Fasci di circonferenze. Fasci di circonferenze secanti.

Esercizi

- 1) Determinare gli angoli formati dalle due rette:
- a)  $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$  ed  $s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$
- b)  $r: 3x+5y-1=0$  ed  $s: x+y+8=0$
- 2) Determinare un vettore perpendicolare al vettore  $v(3,5)$ .
- 3) Determinare una retta passante per il punto di coordinate  $(1;-1)$  e perpendicolare alla retta r:  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$ .
- 4) Determinare una retta passante per il punto di coordinate  $(1;-1)$  e parallela alla retta r:  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$ .
- 5) Determinare una retta passante per il punto di coordinate  $(1;-1)$  e perpendicolare alla retta r:  $3x+5y-1=0$ .
- 6) Determinare una retta passante per il punto di coordinate  $(1;-1)$  e parallela alla retta r:  $3x+5y-1=0$ .
- 7) Si trovi l'equazione della circonferenza di centro C e raggio R nei seguenti casi:
- i)  $C(1;-1), R=2$ ;
- ii)  $C(0;3), R=3$ ;
- iii)  $C(-4;-5), R=5$ .
- 8) Si scriva l'equazione della circonferenza di centro C e passante per  $P(2,0)$  in ciascuno dei seguenti casi:
- a)  $C(1;-1)$
- b)  $C(0;3)$
- c)  $C(-4;-5)$ .

- 9) Si trovino centro e raggio delle seguenti circonferenze:
- $2x^2 + 2y^2 - 6x + 3y = 0$
  - $3x^2 + 3y^2 + 4x - 2y = 0$ .
- 10) Si stabilisca per quali valori del parametro reale  $k$  l'equazione
- $$2x^2 + 2y^2 - 6x + 3y + k = 0$$
- rappresenta una circonferenza.
- 11) Si trovi la circonferenza passante per  $O(0;0)$ ,  $A(2;0)$  e  $B(2;2)$ .
- 12) Data la retta  $r: y=1$  e la circonferenza  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ ,
- si determini la posizione reciproca di  $r$  e  $\mathcal{C}$ ;
  - si calcolino le coordinate degli eventuali punti comuni.
- 13) Data la retta  $r: x+y-4=0$  e la circonferenza  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ ,
- si determini la posizione reciproca di  $r$  e  $\mathcal{C}$ ;
  - si calcolino le coordinate degli eventuali punti comuni.
- 14) Data la retta  $r: y=5$  e la circonferenza  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ , si determini la posizione reciproca di  $r$  e  $\mathcal{C}$ .

XX lezione 4 dicembre 2013

Punti comuni ad una retta e ad una circonferenza. Retta tangente ad una circonferenza in un suo punto. Rette tangenti ad una circonferenza uscenti da un punto del piano. Fasci di circonferenze tangenti ad una retta data in un punto dato. Coniche. Matrice associata ad una conica. Coniche degeneri e non degeneri. Invarianti: determinante,  $A_{33}$  e  $I$ . Classificazione delle coniche utilizzando gli invarianti. Componenti di una conica degeneri.

Esercizi

- Data la circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$  calcolare le rette tangenti nei punti  $O(0;0)$ ,  $A(0; 2)$ ,  $C(5;5)$ .
- Si dica se esistono rette tangenti alla circonferenza  $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$  uscenti dal punto  $P(2;1)$  e in caso affermativo si trovino.
- Date le circonferenze  $\mathcal{C}_1: x^2 + y^2 + 2x = 0$ , e  $\mathcal{C}_2: x^2 + y^2 + 4x = 0$ ,

  - si provi che  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  sono tangenti internamente in  $O(0;0)$ ;
  - si trovi la tangente comune a  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  in  $O(0;0)$ ;
  - si trovi in fascio di circonferenze tangenti in  $O$  ed individuato da  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ .
  - Determinare la retta che è il luogo dei centri delle circonferenze del fascio individuato da  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ .

- Siano  $r: 3x+y-5=0$  ed  $A(1; 2)$  un punto di  $r$ . Si trovino le circonferenze tangenti ad  $r$  in  $A$  e passanti per  $O(0;0)$ .
- Si trovino le equazioni delle circonferenze passanti per i punti  $A(1;1)$  e  $B(0;-1)$  e tangenti alla retta  $r: x+y-3=0$ .
- Riconoscere le seguenti coniche:
  - $2x^2 + xy - y^2 - x - 4y - 3 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 2xy + 3x - y + 1 = 0$
  - $2x^2 + 3y^2 + 6xy + y + 5 = 0$
  - $7x^2 + y^2 + 2xy + x + 4 = 0$
  - $4x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$

Stabilire quali delle precedenti coniche definite dalle equazioni a)-e) sono degeneri e spezzate.



Nei casi precedenti calcolare le componenti della conica spezzata, specificando se le rette componenti la conica spezzata sono distinte oppure coincidenti.  
Stabilire se nelle coniche studiate nei casi a)-e) ci sono iperboli equilateri.