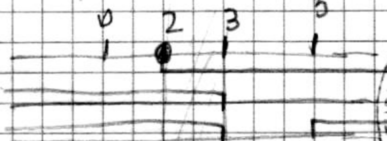
Prova di esonero di Analisi 1 (A-L) 20/11/17 Pag 1

1) $\begin{cases} \arccos(2x-5) > 0 \\ -1 \le 2x-5 \le 1 \\ (a)\ \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-2x+9} > 0 \\ x^2-2x+9 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-5 \ge -1 \\ 2x-5 < 1 \\ x<3 \vee x>5 \end{cases} \begin{cases} x \ge 2 \\ x < 3 \\ x<3 \vee x>5 \end{cases}$



$2 \le x < 3$

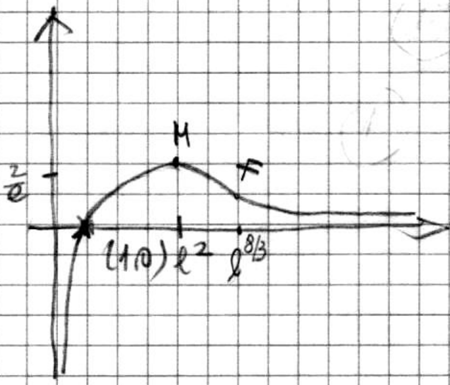
$D = [2, 3)$

a) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-2x+9} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-8x+15>0 \\ x^2-2x+9>0 \end{cases} \begin{cases} x<3 \vee x>5 \\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ perché } \Delta < 0 \end{cases}$ $x<3 \vee x>5$

$\vee$

$\begin{cases} x^2-8x+15<0 \\ x^2-2x+9<0 \end{cases} \begin{cases} 3<x<5 \\ \emptyset \end{cases}$ $\emptyset$ $\qquad \emptyset$ $\qquad x<3 \vee x>5$

2) $y = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$; D: $\begin{cases} x>0 \\ x \ge 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ $x>0 \Rightarrow D =]0, +\infty[$



Int. assi;

Asse x $\begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}} \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ \log x = 0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$ (1,0)

Asse y $\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}} \end{cases}$ $\nexists$ perché $0 \notin D$

Segno $f(x) > 0$ $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \log x > 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \begin{cases} x>1 \\ \forall x \in D \end{cases} \Rightarrow x>1$

(l'altra eventualità è impossibile perché $\sqrt{x} \ge 0$ sempre

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{\sqrt{x}} = -\infty$ ($\log x \to -\infty$, $\sqrt{x} \to 0^+$) (l'asse y è as. vert.); $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$ perché $\sqrt{x}$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $\log x$

Quindi l'asse x è un as. orizz. (oppure dopo aver verif. hp T. dell'Hospital, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$)

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{\log x}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$ $\quad f'(x)$ esiste $\forall x \in D$

x essendo in D, $|x| = x$

$f'(x) > 0$ $\begin{cases} 2-\log x > 0 \\ 2x\sqrt{x} > 0 \end{cases} \begin{cases} \log x < 2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < e^2$ per questi valori la f. cresce

(l'altra event. è impossibile in D.

$f(e^2) = \dfrac{2}{e} \Rightarrow$ in e^2 c'è un punto di max rel. che vale $2/e$ $\quad M\left(e^2, \dfrac{2}{e}\right)$

$f''(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^{3/2} - (2-\log x)\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}}{x^3} = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^3}\left(-1-3+\dfrac{3}{2}\log x\right) = \dfrac{1}{2x^{5/2}}\left(-4+\dfrac{3}{2}\log x\right)$

Poiché $x^{5/2} > 0\ \forall x \in D$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -4 + \dfrac{3}{2}\log x > 0 \Leftrightarrow \log x > \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow x > e^{8/3}$

Dunque la nostra funzione è convessa per $x > e^{8/3}$, concava in $(0, e^{8/3})$ ed in $e^{8/3}$ ha un punto di flesso che vale:

$f(e^{8/3}) = \dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{1}{e^{4/3}}$ $\qquad F = \left(e^{8/3}, \dfrac{8}{3}\dfrac{1}{e^{4/3}}\right)$

La tangente al flesso ha coeff. angolare $f'(e^{8/3}) = \dfrac{2-\frac{8}{3}}{2e^{\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}}} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{e^4}$