Università Mediterranea di Reggio Calabria
Ingegneria dell'Informazione
Compito di Analisi Matematica I (Classe M-Z)
09/02/2018

Durata della prova: 2 ore e trenta minuti

1) Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}+2} + \frac{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\arctan|x-2|}$$

2) Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = (x^2-2)\, e^{x+3}$$

3) Calcolare il seguente limite con la formula di Mac Laurin

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{x^2} + 4x^2}{x^2}$$

4a)Calcolare

$$\int (x+1)\sqrt[3]{x-2}\, dx$$

4b) Stabilire se esiste il seguente integrale. In caso affermativo, calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\, dx$$

5) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+2}$$

6) Risolvere nel campo complesso

$$(z+2)^3 = -27$$

Gli studenti, che hanno superato la prova intermedia, devono svolgere gli esercizi 4a), 4b), 5), 6).

Svolgimento Compito 09/02/2018

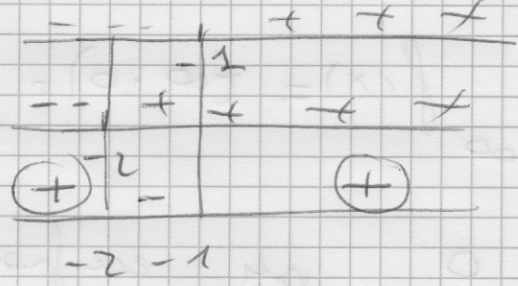
1) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}+2} + \frac{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\operatorname{arctg}|x-2|}$

$$\begin{cases} \text{i)}\ \frac{x-1}{x+2}+2\geq 0 \\ x\neq 2 \\ \text{ii)}\ -1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^x\leq 1 \end{cases}$$

i) $\frac{x-1}{x+2}+2\geq 0 \iff \frac{x-1+2x+4}{x+2}\geq 0 \qquad \frac{3x+3}{x+2}\geq 0$

N: $3x+3\geq 0 \iff x\geq -1$

D: $x+2>0 \iff x>-2$



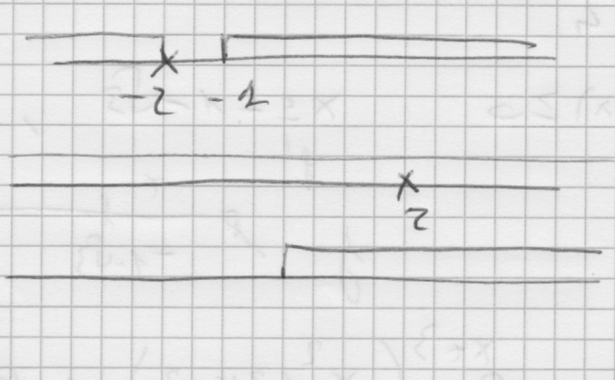
$x<-2;\ x\geq -1$

iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\leq 1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^x\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0 \iff x\geq 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x\geq -1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Quindi il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x<-2;\ x\geq -1 \\ x\neq 2 \\ x\geq 0 \end{cases}$$



C.E. $\{x\geq 0,\ x\neq 2\}$

2) $f(x) = (x^2-2)\, e^{x+3}$

C.E. $\forall x \in \mathbb{R}$

f né pari né dispari

$x = 0 \iff y = -2e^3 \qquad (0, -2e^3)$

$y = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

$f(x) \geq 0 \iff x^2 - 2 \geq 0 \iff x \leq -\sqrt{2},\ x \geq \sqrt{2}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \,, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2}{x} e^{x+3}$

$= +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (+\infty \cdot 0) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-2}{e^{-x-3}} = \frac{\infty}{\infty}$

$= 0$ per confronto di infiniti

$y = 0$ As. orizz. sinistro

$f'(x) = (x^2-2)e^{x+3} + 2x\, e^{x+3} = e^{x+3}(x^2+2x-2)$

$\frac{\Delta}{4} = 1 + 2 = 3 \qquad x = -1 \mp \sqrt{3}$

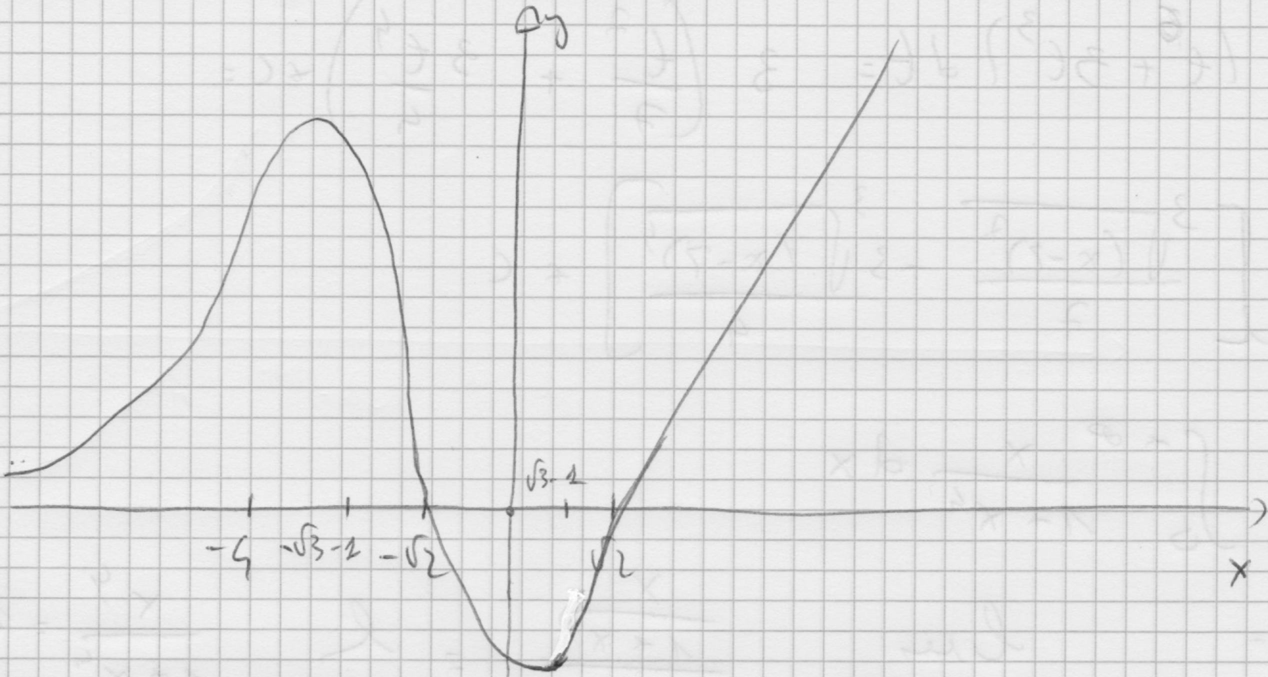
$f'(x) \geq 0 \qquad x \leq -1-\sqrt{3} \,, \quad x \geq -1+\sqrt{3}$

		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$	
f'	+		−		+
f	↗		↘		↗

$f''(x) = e^{x+3}(x^2+2x-2) + e^{x+3}(2x+2) = e^{x+3}(x^2+4x)$

$f''(x) \geq 0 \qquad x \leq -4;\ x \geq 0$

$\cup$	-4	$\cap$	0	$\cup$



3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{x^2} + 4x^2}{x^2}$$

$f(x) = \cos(x^2) - e^{x^2}$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = -\sin(x^2)\cdot 2x - e^{x^2}\cdot 2x$ $\qquad f'(0) = 0$

$= 2x\left(-\sin(x^2) - e^{x^2}\right)$

$f''(x) = 2\left(-\sin(x^2) - e^{x^2}\right) + 2x\left(-\cos(x^2)\cdot 2x - e^{x^2}\cdot 2x\right)$ $\qquad f''(0) = -2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{x^2} + 4x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\frac{x^2}{2!} + 4x^2 + o(x^2)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2} + \frac{o(x^2)}{x^2} = 3$$

4e) $$\int (x+1)\sqrt[3]{x-2}\, dx$$

$\sqrt[3]{x-2} = t$

$x - 2 = t^3, \; x = t^3 + 2$

$dx = 3t^2\, dt$

$$= \int (t^3 + 3)\, t\; 3t^2\, dt =$$

$$= 3\int (t^6 + 3t^3)\, dt = 3\left(\frac{t^7}{7} + 3\frac{t^4}{4}\right) + C =$$

$$= 3\left[\frac{\sqrt[3]{(x-7)^7}}{7} + 3\frac{\sqrt[3]{(x-7)^4}}{4}\right] + C$$

4b) $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\, dx$$

Poiché $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{1+x^4}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1+x^4} = 1$$

e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$ è convergente, anche l'integrale di partenza esiste. In particolare,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2}\int_0^R \frac{2x}{1+x^4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^R = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty} \left[\operatorname{arctg} R\right] = \frac{\pi}{4}$$

5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+2}$$

serie a segno alterno

$$a_n = \frac{1}{n^3+2}$$

i) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

ii) $a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{1}{n^3+2} \geq \frac{1}{(n+1)^3+2} \iff$

(iv)

$\iff (n+1)^3 + 2 \geq n^3 + 2 \quad \iff \quad (n+1)^3 \geq n^3$ vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Per il criterio di Leibniz la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+2}$ è convergente.

6) $(z+2)^3 = -27$

Ponendo $z+2 = w$, l'equazione diventa $w^3 = -27$

Calcoliamo dunque le $\sqrt[3]{-27}$

$-27 = 27 (\cos \pi + i \sin \pi)$

$$w_k = \sqrt[3]{27} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right)$$

$$w_0 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$w_1 = 3 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) = -3$$

$$w_2 = 3 \left(\cos \left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \sin \left(\frac{5}{3}\pi\right) \right) = 3 \left(+\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Quindi le soluzioni di $(z+2)^3 = -27$ sono

$$z_0 = w_0 - 2 = -\frac{1}{2} + \frac{i3\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = w_1 - 2 = -5$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i3\sqrt{3}}{2}$$