Università Mediterranea di Reggio Calabria
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
Compito di Analisi Matematica I (Classe M-Z)
03/07/2018

Durata della prova: 2 ore e trenta minuti

1) Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2} + 1} + \frac{\arcsin(2^x - 1)}{|\arctan(x+2)|}$$

2) Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \log(x-1)$$

3) Calcolare il seguente limite con la formula di Mac Laurin

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x + x^2)}{x^2}$$

4a)Calcolare

$$\int \frac{\log x}{x^3}\, dx$$

4b) Calcolare, dopo aver verificato l'esistenza,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$$

5) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

6) Risolvere nel campo complesso

$$z^2 - 2iz - 1 + i = 0$$

Compito 03/07/2018

Analisi Matematica I (M-Z)

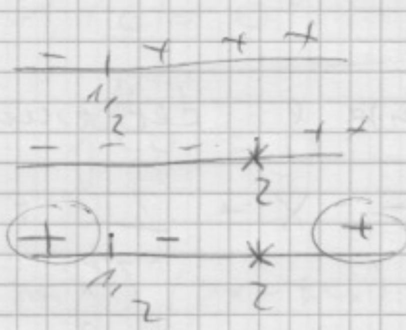
1) $$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2} + 1} + \frac{\arcsin(2^x - 1)}{|\operatorname{arctg}(x+2)|}$$

CE : $$\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} + 1 \geq 0 \\ -1 \leq 2^x - 1 \leq 1 \\ \operatorname{arctg}(x+2) \neq 0 \end{cases}$$

I) $\frac{x+1}{x-2} + 1 \geq 0 \iff \frac{x+1+x-2}{x-2} \geq 0 \iff \frac{2x-1}{x-2} \geq 0$

$\Rightarrow$ N: $2x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1/2$

D: $x - 2 > 0 \iff x > 2$



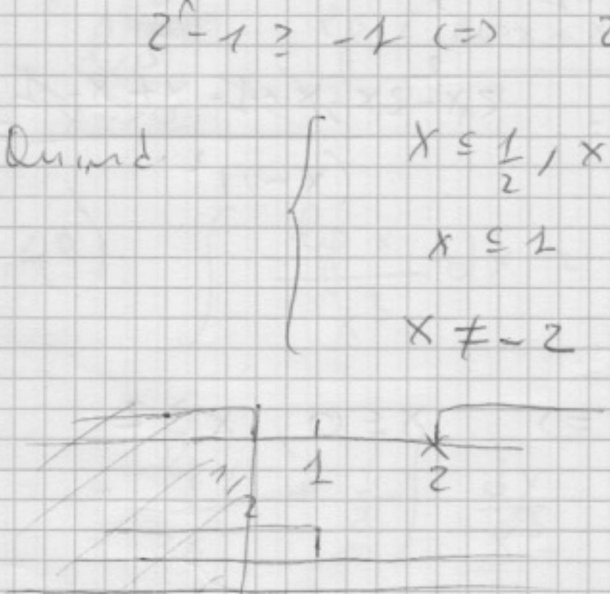
$x \leq 1/2$; $x > 2$

II) $2^x - 1 \leq 1 \iff 2^x \leq 2 \iff x \leq 1$

$2^x - 1 \geq -1 \iff 2^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi $$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}, x > 2 \\ x \leq 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \iff \text{CE} : x \in \mathbb{R} :$$

$x \leq \frac{1}{2}, x \neq -2$



2) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \lg(x-1)$

C.E. $x > 1$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} + \lg(x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} + \underbrace{\frac{\lg(x-1)}{x}}_{0} = +\infty$$

Né asintoti orizzontali né obliqui

$$\lim_{x \to 1^+} \left[\frac{x^2}{2} + \lg(x-1)\right] = -\infty$$

Crescenza e decrescenza

$$f'(x) = x + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

$f'(x) \geq 0 \iff x^2-x+1 \geq 0$ $\quad \Delta = 1-4 = -3 < 0$

quindi $x^2-x+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in C.E.$

1 ↗

Concavità e convessità

$$f''(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x\cancel{-x}\cancel{+1}-x^2\cancel{+x}\cancel{-1}}{(x-1)^2} =$$

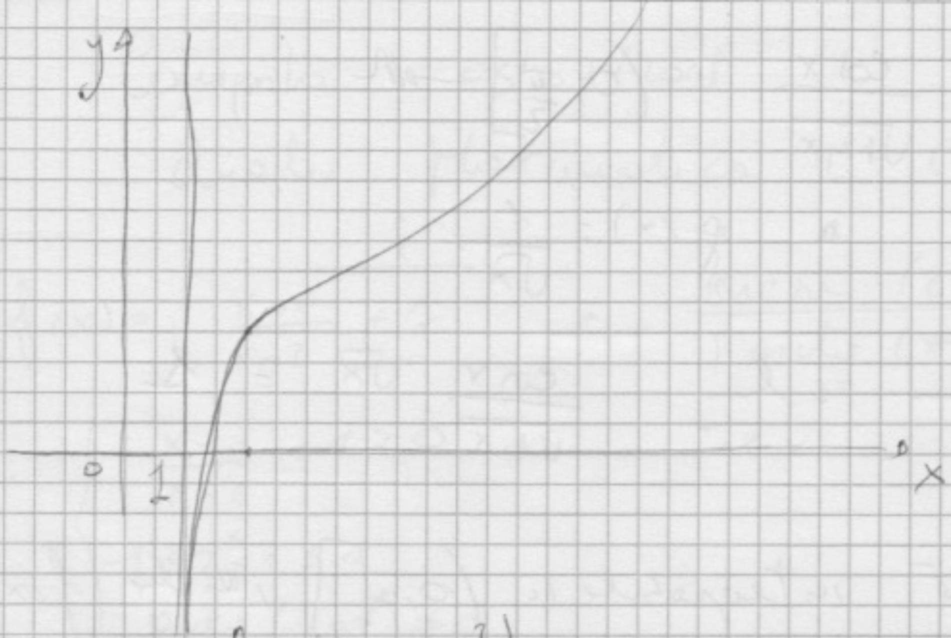
$$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$f''(x) \geq 0 \iff x^2-2x \geq 0 \iff x \leq 0,\ x \geq 2$

f: $\cap$ $\cup$

f'': 1 $-$ 2 $+$

$x=2$ punto di flesso $\quad f(2) = 2$



3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(\cos x + x^2)}{x^2}$

$f(x) = \lg(\cos x + x^2)$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{-\sin x + 2x}{\cos x + x^2}$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(0) = \dfrac{(-\cos x + 2)(\cos x + x^2) - (2x - \sin x)(2x - \sin x)}{(\cos x + x^2)^2}$

$f''(0) = 1$

$f(x) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(\cos x + x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

4e) $\displaystyle\int \frac{\lg x}{x^3}\,dx =$

$f(x) = \lg x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$g'(x) = \dfrac{1}{x^3} \qquad g(x) = -\dfrac{x^{-2}}{2}$

$= -\dfrac{\lg x}{2x^2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dx}{x^3} =$

$= -\dfrac{\lg x}{2x^2} - \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{x^2} + c$

4) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \quad (0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

è asintotica a $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \sqrt{x} = 1$$

Poiché $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in $(0, \frac{\pi}{2}]$, anche $f(x)$ è integrabile in $(0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{(\sin x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right]_\varepsilon^{\pi/2} = 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[1 - \sqrt{\sin \varepsilon} \right] = 2$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Serie a termini non negativi. Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

La serie è divergente.

6) $z^2 - 2iz - 1 + i = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = -1 + 1 - i = -i$

$z = i \mp \sqrt{-i}$

$\sqrt{-i}$

$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$w_k = \cos \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} \qquad k = 0, 1$

$w_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$w_0 = +\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione di partenza sono:

$$z = i \mp \sqrt{-i} =$$

$$= \begin{cases} i - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\[2ex] i + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$