3) Poiché se poniamo $y = x-2$ il $\lim_{x\to 2^+} y = 0$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{5^{x-2}-1}{tg(x-2)} = \lim_{y\to 0} \frac{5^y-1}{y} \cdot \frac{y}{sen(y)} \cdot \cos y = \log 5$$

$$\lim_{x\to 2^-} e^{\frac{3x-7}{x^2-2x}} = +\infty$$

$x^2-2x>0$ per $x<0 \vee x>2$

La funzione è discontinua ed abbiamo una discontinuità di seconda specie per $x=2$

4) a) Poiché $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$sen\,x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow sen\,x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$

sopprimiamo x gli infinitesimi di ordine superiore (P.S.I.)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2) - sen\,x^2}{\cos 2x + e^{2x^2} - 2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} + \cancel{o(x^4)} - \cancel{x^2} + \cancel{\frac{x^6}{6}} - \cancel{o(x^6)}}{\cancel{1} - \cancel{2x^2} + \frac{2}{3}x^4 + \cancel{o(x^4)} + \cancel{1} + \cancel{2x^2} + 2x^4 + \cancel{o(x^4)} - \cancel{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^4}{2}}{\frac{8}{3}x^4} = -\frac{3}{16}$$

b) Per calcolare $\log\frac{7}{5}$ dobbiamo usare lo sviluppo di Mac-Laurin di $\log(1+x)$ in $x=\frac{2}{5}$:

$f(0)=0$; $f'(x) = \frac{1}{1+x}$; $f'(0)=1$; $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$; $f''(0)=-1$; $f'''(x) = +\frac{2}{(1+x)^3}$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R_3$; $\log\frac{7}{5} \simeq \frac{2}{5} - \frac{2}{25}$; $|R_3| = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^3 \left|\frac{2}{(1+\bar{x})^3}\right| < \frac{8}{3\cdot 6}\cdot\frac{2}{125} = 0.02\times 10^{-1}$

poiché è una f. decrescente, $0<\bar{x}<\frac{2}{5}$

5a) Studiamo il segno di $f(x)$: Poiché $1+sen^2x>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$ in $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$

Calcoliamo la primitiva $\int \frac{\cos x}{1+sen^2x}\,dx = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = arctg\,t + c = arctg\,sen\,x + c$

$t = sen\,x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$

$$A = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\cos x}{1+sen^2x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+sen^2x}\,dx = -\left[arctg\,sen\,x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} + \left[arctg\,sen\,x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -arctg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{2}$$

5b) E' un integrale improprio. L'integrale esiste perché per $x\to+\infty$ la funzione integranda è un infinitesimo perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\,arctg\frac{1}{x} = 0$, di ordine $>2>1$ perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\,arctg\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$

$$\int \frac{1}{x^2}\,arctg\frac{1}{x}\,dx = -\int arctg\,t\,dt = -\left[t\,arctg\,t - \int \frac{t}{1+t^2}\,dt\right] = -t\,arctg\,t + \frac{1}{2}\log(1+t^2) + c$$

$\frac{1}{x} = t$; p.p.; si risolve ponendo $1+t^2 = s \Rightarrow 2t\,dt = ds$

$$\int_1^p \frac{1}{x^2}\,arctg\frac{1}{x}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\,arctg\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\right]_1^p = -\frac{1}{p}\,arctg\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{p^2}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

$$\lim_{p\to+\infty} \int_1^p \frac{1}{x^2}\,arctg\frac{1}{x}\,dx = +\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

6) La serie è convergente per il crit. di Leibniz. Infatti $\frac{1}{\sqrt{n}+\log n} > 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\log n} = 0$

Inoltre, poiché $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ e $\log(n+1) > \log n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\log(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n}+\log n}$ $\forall n$

cioè $\frac{1}{\sqrt{n}+\log n}$ è il t. generale di una succ. decrescente