CAPITOLO V

CIRCUITO EQUIVALENTE MONOFASE
E MODELLO MATEMATICO DEL SISTEMA
IN REGIME PERMANENTE

1. Generalità

Per lo studio del regime permanente, cioè di condizioni di funzionamento elettrico "normale" sinusoidale trifase simmetrico, è lecito supporre anche che il sistema sia fisicamente simmetrico, cioè costituito o da componenti già di per sé simmetrici (generatori sincroni, carichi e trasformatori) o resi tali (per esempio, per la linea mediante la "trasposizione"). Poiché, quindi, le correnti e le tensioni delle tre fasi, in ogni punto, sono terne di vettori di sequenza diretta, è possibile limitarsi ad analizzare una sola delle tre fasi, essendo evidente che, determinate le tensioni e correnti relative ad una fase, le analoghe tensioni e correnti relative alle altre due si calcolano semplicemente moltiplicando per gli operatori complessi α e α^2. Per la rappresentazione dei componenti si ricorre, pertanto, ai circuiti monofase equivalenti alla sola sequenza diretta.

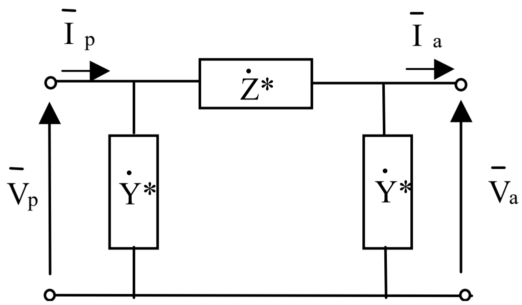
Le equazioni che modellano il funzionamento del predetto circuito equivalente monofase saranno anche il modello matematico del sistema; esse saranno espresse in forma matriciale. Al circuito equivalente monofase del sistema si perviene "per ispezione" dello stesso (analisi della sua costituzione fisica), dopo aver rappresentato ogni suo componente mediante il relatico circuito equivalente monofase.

2. Rappresentazione dei componenti del sistema

Anche in relazione agli studi già svolti, vengono considerati i circuiti monofase equivalenti alla sequenza diretta dei seguenti componenti del sistema: linea, trasformatore, carico e generatore sincrono.

2.1 Linea

Lo studio delle costanti primarie ha posto in evidenza che, in un sistema trifase in condizioni di funzionamento normale, è lecito attribuire a ciascuna fase un'unica induttanza L_s, detta induttanza di servizio, che contemporaneamente porta in conto sia i fenomeni di auto che di mutua induzione con gli altri conduttori, ed un'unica capacità C_s, detta capacità di servizio, che contemporaneamente porta in conto gli accoppiamenti capacitivi del conduttore in esame con gli altri conduttori e con il terreno. Tali costanti consentono di disaccoppiare dal punto di vista elettromagnetico ed elettrostatico le tre fasi della linea che possono, pertanto, essere considerate indipendenti tra loro e, ciascuna, caratterizzata dalle quattro costanti primarie: induttanza, capacità, resistenza e conduttanza, essendo anche queste ultime, ovviamente, attribuibili separatamente a ciascuna delle tre fasi. Sfruttando la proprietà dei doppi bipoli e l'equivalenza, ai morsetti di ingresso e di uscita, con una linea trifase si può, in conclusione rappresentare quest'ultima attraverso un circuito monofase equivalente a parametri concentrati; tale circuito è quello della fig.V.1.



$$\dot{Z}^* = \dot{B} = \dot{Z}_0 \operatorname{senh}(\dot{K}a)$$

$$\dot{Y}^* = \frac{\dot{A}-1}{\dot{B}} = \frac{\cosh(\dot{K}a) - 1}{\dot{Z}_0 \operatorname{senh}(\dot{K}a)}$$

Fig. V.1 – Circuito monofase equivalente a parametri concentrati di una linea trifase

Il circuito equivalente riportato nella fig.V.1 è valido qualunque sia la lunghezza della linea; nel caso, invece, di linee non molto lunghe (a < 400 km) si può pervenire ad un circuito equivalente semplificato. In pratica, il circuito monofase equivalente alla sequenza diretta di una linea corta è quello della fig.V.2.

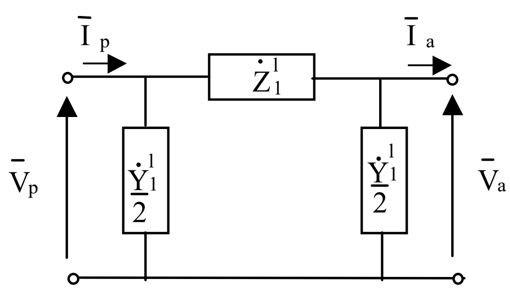


Fig. V.2. Circuito monofase equivalente di una linea corta

Il circuito equivalente della fig.V.2 può subire un'ulteriore semplificazione se si fa riferimento alle linee di distribuzione dell'energia; tali linee sono caratterizzate da lunghezze sicuramente inferiori ai 100 km e da tensioni di esercizio non elevate. In tali condizioni si può tranquillamente trascurare l'ammettenza trasversale $\dot{Y}_1^1$ e rappresentare la linea con la sola impedenza serie $\dot{Z}_1^1$; si perviene, pertanto, al circuito equivalente della fig.V.3.

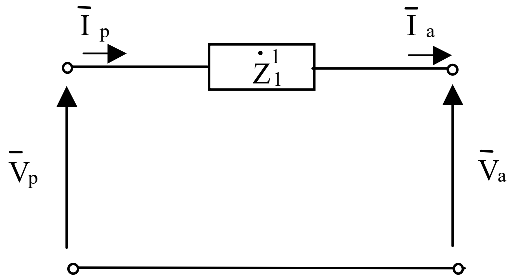


Fig. V.3 - Circuito monofase equivalente di una linea di distribuzione

2.2 Trasformatore a due avvolgimenti (uno primario ed uno secondario)

Nei trasformatori di grande potenza la resistenza degli avvolgimenti è piccola rispetto alla reattanza di dispersione X_1^t, per cui l'impedenza di dispersione si può ritenere data da:

$$\dot{Z}_1^t \cong jX_1^t. \tag{V.1}$$

A maggior ragione, sono anche trascurabili le impedenze trasversali (funzionamento a vuoto) rispetto a quelle longitudinali e, in definitiva, ameno del rapporto di trasformazione da imputare al trasformatore ideale, il circuito monofase equivalente alla sequenza diretta di un trasformatore a due avvolgimenti è quello della fig. V.4.

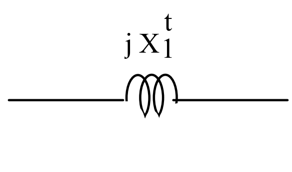


Fig. V.4 - Circuito monofase equivalente di un trasformatore di potenza.

Poiché è noto il valore della tensione di corto circuito percentuale $V_{cc\%}$, in quanto riportato sulla targa del trasformatore, *la relazione che permette il calcolo* della reattanza X_1^t è, con buona approssimazione, la seguente:

$$\frac{Vn}{In} \text{ x } \frac{V_{cc\%}}{100} \cong X_1^t. \tag{V.2}$$

2.3 Carico elettrico e generatore

Un carico o un generatore collegato a un nodo di un sistema può essere rappresentato da una corrente $\bar{J}$ entrante in rete attraverso il nodo in esame (fig.V.5).

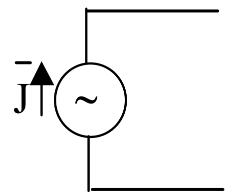


Fig. V.5 – Circuito monofase equivalente di un carico o di un generatore

E' utile notare anche gli eventuali nodi di "scambio" (o di interconnessione) tra diversi sistemi elettrici possono essere considerati nodi da cui sono derivati carichi (correnti prelevate) o generatori (correnti iniettate) fittizi di valore non nullo; come pure i nodi "di transito" (esempio, di semplice collegamento fra più linee dello stesso sistema) possono essere considerati nodi da cui sono derivati carichi elettrici fittizi di valore nullo; pertanto, anche essi possono essere rappresentati come in fig. V.5, con opportuni vincoli al valore della corrente entrante (esempio, per i nodi di transito deve essere zero).

3. Circuito equivalente monofase del sistema e modello matematico

Si faccia riferimento al caso di un semplice sistema di trasmissione su rete come quello della fig. V.6a) (schema unifilare); il numero di nodi di tale sistema oltre il neutro è n=5 (i nodi sono rappresentati con dei cerchietti numerati).

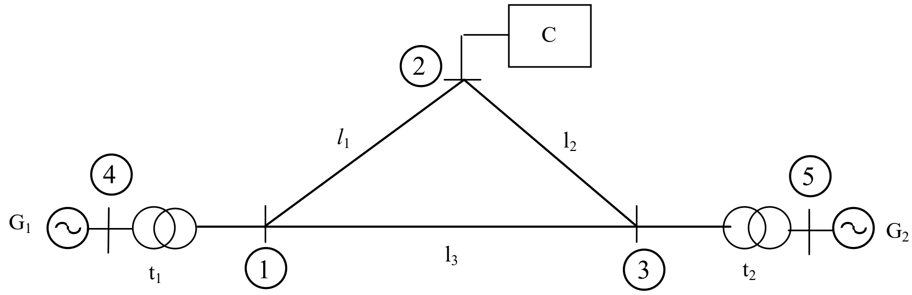
Per il sistema della fig.V.6a) il circuito monofase equivalente alla sequenza diretta, ottenuto sostituendo a ciascun componente il relativo circuito monofase equivalente ricavato come specificato nel paragrafo 2, è quello riportato nella fig. V.6b); nella figura V.6)c è rapprensetato il circuito equivalente "ridotto" ricavato sommando le ammettenze nodali in parallelo nel circuito di fig. V.6.b) e ponendo:

$$\dot{y}_{12} = \frac{1}{R_1^{l_1} + jX_1^{l_1}} \quad , \quad \dot{y}_{13} = \frac{1}{R_1^{l_3} + jX_1^{l_3}} \quad , \quad \dot{y}_{23} = \frac{1}{R_1^{l_2} + jX_1^{l_2}}$$

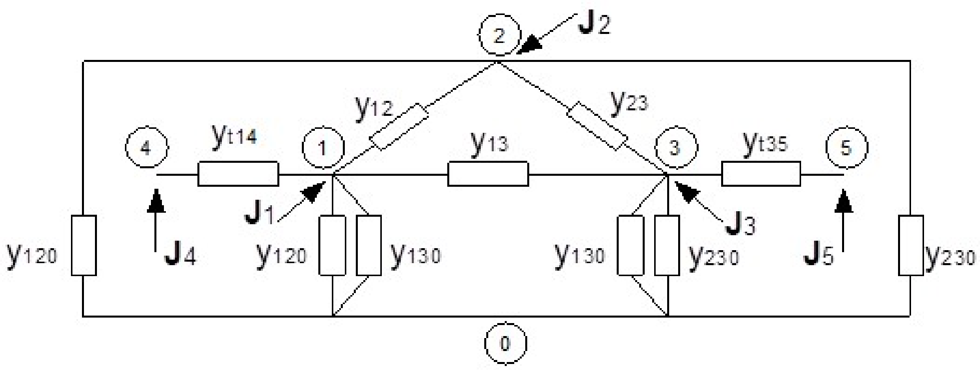
$$\dot{y}_{14} = \frac{1}{jX_1^{T_1}} \quad , \quad \dot{y}_{35} = \frac{1}{jX_1^{T_2}} \quad , \qquad (V.3)$$

$$\dot{y}_{10} = \frac{\dot{Y}_1^{l_1}}{2} + \frac{\dot{Y}_1^{l_3}}{2} \quad , \quad \dot{y}_{20} = \frac{\dot{Y}_1^{l_1}}{2} + \frac{\dot{Y}_1^{l_2}}{2} \quad , \quad \dot{y}_{30} = \frac{\dot{Y}_1^{l_2}}{2} + \frac{\dot{Y}_1^{l_3}}{2}$$

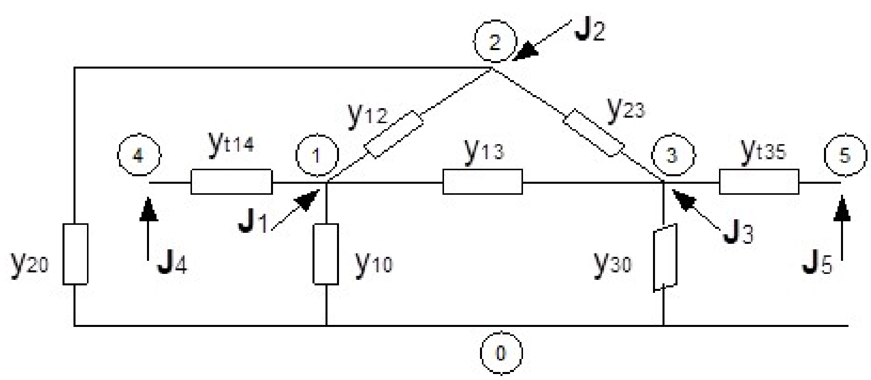
con ovvio significato dei simboli.



a)



b)



c)

Fig V.6 – Esempio di Sistema con trasmissione su rete:
a) schema unifiliare; b) circuito monofase equ.; c) circuito monofase equ. ridotto

Come già detto, le correnti entranti nei nodi “transito” 1 e 3 sono nulle.

La corrente che fluisce dal generico nodo i al generico nodo j si può sempre porre nella forma:

$$\bar{I}_{ij} = \dot{y}_{ij}\left(\bar{V}_i - \bar{V}_j\right) \tag{V.4}$$

si noti, inoltre, che il neutro è al potenziale di riferimento.

Il primo principio di Kirkhhoff applicato a tutti i nodi del sistema nella fig.V.6b) tranne che al neutro (sarebbe superfluo) porge le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
\bar{J}_1 &= 0 = \dot{y}_{12}\left(\bar{V}_1 - \bar{V}_2\right) + \dot{y}_{13}\left(\bar{V}_1 - \bar{V}_3\right) + \dot{y}_{14}\left(\bar{V}_1 - \bar{V}_4\right) + \dot{y}_{10}\bar{V}_1 \\
\bar{J}_2 &= \dot{y}_{12}\left(\bar{V}_2 - \bar{V}_1\right) + \dot{y}_{23}\left(\bar{V}_2 - \bar{V}_3\right) + \dot{y}_{20}\bar{V}_2 \\
\bar{J}_3 &= 0 = \dot{y}_{13}\left(\bar{V}_3 - \bar{V}_1\right) + \dot{y}_{23}\left(\bar{V}_3 - \bar{V}_2\right) + \dot{y}_{35}\left(\bar{V}_3 - \bar{V}_5\right) + \dot{y}_{30}\bar{V}_3 \\
\bar{J}_4 &= \dot{y}_{14}\left(\bar{V}_4 - \bar{V}_1\right) \\
\bar{J}_5 &= \dot{y}_{35}\left(\bar{V}_5 - \bar{V}_3\right)
\end{aligned} \tag{V.5}$$

Per quanto attiene al nodo di neutro, si nota esplicitamente che nelle (V.5) non è stato applicato il primo principio di Kirkhhoff anche ad esso in quanto l'equazione che si otterrebbe sarebbe una "superflua" combinazione lineare delle cinque equazioni (V.5), che sono, invece, equazioni indipendenti che legano tra loro le tensioni e le correnti di nodo. Riordinando le (V.5), si ha:

$$\begin{aligned}
0 &= (\dot{y}_{10} + \dot{y}_{12} + \dot{y}_{13} + \dot{y}_{14})\bar{V}_1 - \dot{y}_{12}\bar{V}_2 - \dot{y}_{13}\bar{V}_3 - \dot{y}_{14}\bar{V}_4 \\
\bar{J}_2 &= -\dot{y}_{12}\bar{V}_1 + (\dot{y}_{20} + \dot{y}_{23} + \dot{y}_{12})\bar{V}_2 - \dot{y}_{23}\bar{V}_3 \\
0 &= -\dot{y}_{13}\bar{V}_1 - \dot{y}_{23}\bar{V}_2 + (\dot{y}_{30} + \dot{y}_{13} + \dot{y}_{23} + \dot{y}_{35})\bar{V}_3 - \dot{y}_{35}\bar{V}_5 \\
\bar{J}_4 &= -\dot{y}_{14}\bar{V}_1 + \dot{y}_{14}\bar{V}_4 \\
\bar{J}_5 &= -\dot{y}_{35}\bar{V}_3 + \dot{y}_{35}\bar{V}_5
\end{aligned} \tag{V.6}$$

le (V.6), scritte in forma compattate generale, diventano:

$$
\begin{aligned}
&\overline{J}_1 = \dot{Y}_{11}\,\overline{V}_1 + \dot{Y}_{12}\,\overline{V}_2 + \dot{Y}_{13}\,\overline{V}_3 + \dot{Y}_{14}\,\overline{V}_4 + \dot{Y}_{15}\,\overline{V}_5 \\
&\overline{J}_2 = \dot{Y}_{21}\,\overline{V}_1 + \dot{Y}_{22}\,\overline{V}_2 + \dot{Y}_{23}\,\overline{V}_3 + \dot{Y}_{24}\,\overline{V}_4 + \dot{Y}_{25}\,\overline{V}_5 \\
&\overline{J}_3 = \dot{Y}_{31}\,\overline{V}_1 + \dot{Y}_{32}\,\overline{V}_2 + \dot{Y}_{33}\,\overline{V}_3 + \dot{Y}_{34}\,\overline{V}_4 + \dot{Y}_{35}\,\overline{V}_5 \\
&\overline{J}_4 = \dot{Y}_{41}\,\overline{V}_1 + \dot{Y}_{42}\,\overline{V}_2 + \dot{Y}_{43}\,\overline{V}_3 + \dot{Y}_{44}\,\overline{V}_4 + \dot{Y}_{45}\,\overline{V}_5 \\
&\overline{J}_5 = \dot{Y}_{51}\,\overline{V}_1 + \dot{Y}_{52}\,\overline{V}_2 + \dot{Y}_{53}\,\overline{V}_3 + \dot{Y}_{54}\,\overline{V}_4 + \dot{Y}_{55}\,\overline{V}_5\,.
\end{aligned}
\qquad \text{(V.7)}
$$

Per confronto tra le (V.6) e le (V.7) si possono individuare immediatamente le espressioni dei coefficienti complessi $\dot{Y}_{rs}$ presenti nelle (V.7) stesse nonché i termini che devono essere assunti pari a zero.

In particolare, si può facilmente constatare che i termini $\dot{Y}_{ii}$ (i=1,…,n), cui è dato il nome di auto-ammettenze nodali, sono la somma delle ammettenze di tutti i lati afferenti al nodo i, mentre i termini $\dot{Y}_{ij}$, cui è dato il nome di mutue ammettenze nodali, sono pari alla ammettenza, cambiata di segno, del lato compreso tra i nodi i e j; le mutue ammettenze tra due nodi non collegati direttamente sono, ovviamente, pari a zero.

Ad esempio, l'auto-ammettenza del nodo 1 è data da:

$$\dot{Y}_{11} = \dot{y}_{10} + \dot{y}_{12} + \dot{y}_{13} + \dot{y}_{14}\,,$$

la mutua ammettenza tra i nodi 1 e 2 è data da:

$$\dot{Y}_{12} = -\dot{y}_{12}\,,$$

mentre la mutua ammettenza tra i nodi 1 e 5 è data da:

$$\dot{Y}_{15} = 0 + j0\,.$$

Le equazioni (V.7) sono denominate equazioni dei potenziali ai nodi, o semplicemente equazioni ai nodi, del sistema elettrico in studio.

Applicando lo stesso procedimento ad un sistema elettrico comunque complesso di n nodi oltre al neutro si ottengono n equazioni vettoriali indipendenti del tutto simili alle (V.7). La forma più generale delle equazioni dei potenziali ai nodi è, pertanto:

$$\bar{J}_1 = \dot{Y}_{11}\,\bar{V}_1 + \dot{Y}_{12}\,\bar{V}_2 + \dots\dots\dots\dots + \dot{Y}_{1n}\,\bar{V}_n$$

$$\bar{J}_2 = \dot{Y}_{21}\,\bar{V}_1 + \dot{Y}_{22}\,\bar{V}_2 + \dots\dots\dots\dots + \dot{Y}_{2n}\,\bar{V}_n$$

$$\bullet$$

$$\bullet \qquad\qquad (V.8)$$

$$\bullet$$

$$\bar{J}_{n-1} = \dot{Y}_{n-1,1}\,\bar{V}_1 + \dot{Y}_{n-1,2}\,\bar{V}_2 + \dots\dots\dots + \dot{Y}_{n-1,n}\,\bar{V}_n$$

$$\bar{J}_n = \dot{Y}_{n1}\,\bar{V}_1 + \dot{Y}_{n2}\,\bar{V}_2 + \dots\dots\dots\dots + \dot{Y}_{nn}\,\bar{V}_n$$

Le (V.8) possono porsi nella seguente forma matriciale:

$$\left[\bar{J}\right] = \left[\dot{Y}\right]\left[\bar{V}\right] \qquad (V.9)$$

dove $\left[\bar{J}\right]$ e $\left[\bar{V}\right]$ sono le matrici ad una colonna delle correnti impresse e delle tensioni di nodo ed $\left[\dot{Y}\right]$ è una matrice quadrata di ordine n, che viene chiamata "*matrice delle ammettenze nodali*", i cui termini si ricavano per ispezione del circuito monofase equivalente del sistema elettrico in studio, con le semplici regole enunciate con riferimento alle relazioni (V.7); tale matrice, per ovvi motivi, è simmetrica. In particolare, i termini di tale matrice si possono ricavare con le seguenti semplici espressioni che corrispondono alle regole enunciate in precedenza:

$$\dot{Y}_{ii} = \sum_{j \in a_i} \dot{y}_{ij}$$

$$(V.10)$$

$$\dot{Y}_{ij} = - \dot{y}_{ij}$$

essendo a_i l'insieme dei nodi, incluso il neutro, afferenti al nodo i.

Le equazioni dei potenziali ai nodi nella forma (V.8) o nella forma matriciale (V.9) rappresentano il modello matematico in regime permanente di un sistema elettrico comunque complesso, in quanto legano tra loro le grandezze elettriche, e cioè le tensioni e correnti nodali, che ne definiscono il regime di funzionamento.

4. Alcuni problemi del regime permanente

Il modello matematico ricavato nei paragrafi precedenti rappresenta il punto di partenza per lo studio dei vari problemi che si verificano nei sistemi elettrici per l'energia in condizioni di regime permanente quali, ad esempio, il problema della determinazione dei valori delle tensioni nei nodi di un sistema con trasmissione su rete, che si affronta con il metodo dei flussi di potenza (nella letteratura inglese "load-flow" oppure il problema della regolazione della tensione.

Nel seguito, verranno fornite alcune informazioni di base solo sul problema di "load-flow".

4.1 Impostazione del problema di "Load-flow"

Si consideri un sistema con trasmissione su rete di n nodi oltre il neutro, in cui, per semplicità di trattazione, i nodi si considerano o di sola generazione o di solo carico.

Il metodo dei flussi di potenza (load-flow) consiste nel determinare, attraverso la risoluzione di un sistema non lineare di equazioni, i valori delle tensioni in tutti gli n nodi del sistema, partendo dalla conoscenza della sua struttura e di un numero di parametri elettrici atto a definirne univocamente il regime di funzionamento.

Una volta noti i valori delle tensioni in tutti i nodi del sistema è possibile, poi, calcolare, con semplici espressioni analitiche in forma chiusa, e cioè senza risolvere ulteriori equazioni, qualunque altra grandezza di interesse nel sistema (potenze, attive e reattive, che fluiscono nelle linee, perdite attive e reattive, e così via). Per questo motivo si è soliti dire che le tensioni nodali sono le grandezze elettriche che da sole permettono di definire univocamente lo "stato elettrico" del sistema.

Punto di partenza sono le equazioni matriciali ricavate precedentemente per un sistema con trasmissione su rete avente n nodi oltre il neutro e che si riscrivono di seguito per comodità di esposizione:

$$\left[\bar{J}\right] = \left[\dot{Y}\right]\left[\bar{V}\right] \;;$$

si ricorda che $\left[\bar{V}\right]$ e $\left[\bar{J}\right]$ sono i vettori complessi n-dimensionali, rispettivamente delle tensioni dei nodi riferite al neutro e delle correnti entranti nella rete attraverso i nodi; $\left[\dot{Y}\right]$ è la matrice delle ammettenze nodali, i cui elementi sono noti quando è nota la struttura della rete ed i parametri dei suoi componenti.

Le equazioni (V.9) sono in numero di n e sono scritte in forma vettoriale, perciò equivalgono anche a 2n equazioni scalari. In esse compaiono 2n fasori iso-frequenziali rappresentativi delle correnti e delle tensioni nodali, che equivalgono a 4n variabili scalari. Più precisamente, poiché la fase di una delle 2n grandezze vettoriali deve essere necessariamente fissata come riferimento per le fasi di tutte le altre grandezze (normalmente la si fissa pari a zero), le variabili scalari che compaiono nelle (V.9) sono in numero di 4n-1.

Se le condizioni di esercizio del sistema elettrico fossero rappresentabili imponendo come “vincoli esterni” (o condizioni al contorno) 2n-1 tra le suddette 4n-1 variabili reali, le rimanenti 2n variabili potrebbero calcolarsi risolvendo le (V.9).

Se, ad esempio, fossero note, in modulo e fase, le correnti entranti nei nodi di generazione e di carico, risolvendo il sistema di equazioni lineari (V.9) si potrebbero immediatamente calcolare le tensioni nodali, in modulo e fase, in tutti i nodi del sistema; si avrebbe, cioè:

$$\left[\overline{\mathrm{V}}\right] = \left[\dot{\mathrm{Y}}\right]^{-1} \left[\bar{\mathrm{J}}\right] = \left[\dot{\mathrm{Z}}\right] \; \left[\bar{\mathrm{J}}\right] \qquad \text{(V.11)}$$

con [Z] detta matrice delle impedenze nodali del sistema.

In pratica, però, ciò non accade, in quanto le condizioni di esercizio (o condizioni al contorno) si esprimono fissando grandezze elettriche di altro tipo, che dipendono dalle caratteristiche del nodo a cui si riferiscono.

In particolare, nei nodi di carico le condizioni di esercizio si esprimono fissando i valori di potenza, attiva e reattiva, che si possono considerare, con buona approssimazione, indipendenti dai valori che assumono le tensioni nodali. Infatti, tra i nodi del sistema di trasmissione su rete ed i carichi veri e propri sono interposti trasformatori o autotrasformatori a rapporto variabile sotto carico che garantiscono, entro certi limiti, la costanza della tensione al secondario.

Nei nodi di generazione è, poi, nota la potenza attiva da essi immessa in rete, pari alla potenza che ciascuna centrale è chiamata ad erogare in base al piano di ripartizione della produzione tra le varie centrali che di ora in ora viene programmato dall’Ente distributore dell’energia elettrica; è anche noto il valore efficace della tensione, anch’esso stabilito in base a opportuni programmi di gestione del sistema elettrico e garantito dalla presenza dei regolatori automatici di tensione dei generatori sincroni. Le condizioni di esercizio nei nodi di generazione si esprimono, quindi, assegnandone la potenza attiva ed il modulo della tensione.

Nella realtà, in vero, non è possibile assegnare la potenza attiva in tutti i nodi di generazione, perché, avendo assegnato la potenza attiva anche in tutti i nodi di carico, si arriverebbe all’assurdo di predeterminare le perdite di potenza attiva del sistema [1], che non possono essere note se non *dopo* aver individuato lo stato elettrico del sistema stesso; per questo motivo, in uno dei nodi di generazione, che viene chiamato nodo di “*saldo”*, non viene assegnata la potenza attiva; è questo, invece, il nodo in cui la fase della tensione nodale viene fissata al valore zero e che, pertanto, viene assunto a riferimento per tutti gli altri fasori.

In conclusione, in un sistema elettrico con trasmissione su rete in cui sono presenti N_c nodi di carico ed N_g nodi di generazione compreso quello di saldo ($n = N_c + N_g$), le condizioni di esercizio del sistema sono rappresentate imponendo come vincoli esterni:

- N_c potenze attive ed N_c potenze reattive nei nodi di carico;
- $(N_g - 1)$ potenze attive nei nodi di generazione tranne il nodo di saldo;

---

1 Le perdite di potenza attiva del sistema sono evidentemente la somma delle potenze attive di generazione e di quelle di carico.

- N_g valori efficaci delle tensioni nei nodi di generazione.

Complessivamente, cioè, sono assegnate $N_{est} = (2N_c + 2N_g\text{-}1) = 2n\text{-}1$ condizioni di vincolo esterne, nessuno dei quali è, però, relativo alle correnti nodali e solo N_g dei quali sono relativi alle tensioni nodali. Ne consegue che il problema della determinazione dello stato elettrico del sistema attraverso l'impiego delle equazioni (V.9) è, per il momento, ancora non definito.

Fortunatamente, il problema può facilmente risolversi manipolando opportunamente le (V.9) stesse e pervenendo ad un sistema di equazioni in cui non sono più presenti le correnti nodali ed in cui le sole incognite presenti sono rappresentate dai moduli e dalle fasi delle tensioni nodali non assegnate come vincoli esterni; è possibile, cioè, pervenire ad un sistema di $(2N_c + N_g - 1)$ equazioni in cui sono presenti come incognite solo:

- i moduli e le fasi delle tensioni nodali degli N_c nodi di carico;
- le fasi degli N_g-1 nodi di generazione tranne il nodo di saldo.

A tal fine si ricorda che le potenze, attive e reattive, entranti nei nodi del sistema elettrico sono date da:

$$P_i = \mathrm{Re}\left\{\overline{V}_i \overline{J}_i^*\right\} \quad , \quad Q_i = \mathrm{Im}\left\{\overline{V}_i \overline{J}_i^*\right\} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{V.12}$$

dove con il simbolo "*" si è indicato il complesso coniugato.

Sostituendo nelle (V.12) alle correnti nodali le loro espressioni in funzione delle tensioni nodali ricavate dalle (V.9) si ha:

$$P_i = \mathrm{Re}\left\{\overline{V}_i \sum_{j=1}^{n} \dot{Y}_{ij}^* \overline{V}_j^*\right\} \quad . \quad Q_i = \mathrm{Im}\left\{\overline{V}_i \sum_{j=1}^{n} \dot{Y}_{ij}^* \overline{V}_j^*\right\} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{V.13}$$

Posto, infine, nelle (V.13):

$$\overline{V}_i = V_i e^{j\delta_i} \qquad ; \qquad \dot{Y}_{ij} = Y_{ij} e^{j\vartheta_{ij}} \tag{V.14}$$

si ha:

$$P_i = V_i \sum_{j=1}^{n} V_j \left[Y_{ij} \cos\left(\delta_i - \delta_j - \vartheta ij \right) \right]$$

$$Q_i = V_i \sum_{j=1}^{n} V_j \left[Y_{ij} \sin\left(\delta_i - \delta_j - \vartheta ij \right) \right] \qquad \text{(V.15)}$$

i = 1, 2, …, n

Le equazioni (V.15) legano le potenze, attive e reattive, entranti nei nodi alle sole tensioni nodali.

Se si applicano, allora, ambedue le (V.15) agli N_c nodi di carico, in cui sono note le potenze, attive P_i^{sp} e reattive Q_i^{sp}, e la prima delle (V.15) agli N_g-1 nodi di generazione tranne il nodo di saldo, in cui è nota la potenza attiva P_i^{sp}, si perviene, in conclusione, ad un sistema di ($2N_c + N_g – 1$) equazioni in cui sono presenti ($2N_c + N_g – 1$) incognite.

Il sistema di equazioni (V.15) è chiaramente un sistema non lineare di equazioni che va risolto con una delle ben tecniche numeriche disponibili, quali, ad esempio, il metodo di risoluzione di Newton Raphson.