Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di Analisi Matematica 2
del 25/06/2019

1) Calcolare

$$\iiint_D (x+y)\, dx\, dy\, dz$$

dove D è il dominio compreso fra il piano xy e il paraboloide $z = x^2+y^2$, al di sopra del triangolo T del piano xy con $T = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 \le y \le x\}$

2) a) Calcolare

$$I = \int_{\Gamma} [x y\, dx + dy]$$

lungo la curva Γ di equazioni param. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t\, e^{2t} \end{cases}$ percorsa da $P_1(1,0)$ a $P_2 \equiv (e^{-1}, e^2)$

b) Dire se si ritiene, senza dover procedere al calcolo, che il valore dello stesso integrale calcolato lungo Γ_1 dove Γ_1 è il segmento $\overline{P_1P_2}$, percorso da P_1 a P_2 sia necessariamente lo stesso ottenuto per I nel caso a), motivando la risposta.

3) Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} 4y'' - 4y = 16x\, e^{2x} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

4) a) Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n+5}} (x-1)^n$$

b) puntualizzare dove la serie converge uniformemente

5) Assegnata la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 3e^{-4t} & \text{per } t \ge 0 \\ e^{2t} & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

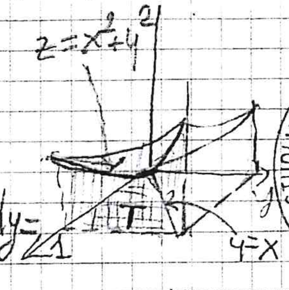
calcolarne la trasformata di Fourier dopo averne verificato l'esistenza

6) Determinare il max e il min assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$$

nel triangolo $T = \{x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 4\}$

Tempo 2h e mezzo



1) $\iiint_D (x+y)\,dx\,dy\,dz = \iint_T (x+y)\,dx\,dy \int_0^{x^2+y^2} dz =$

$= \iint_T (x+y)\left[z\right]_0^{x^2+y^2} dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x (x^2+y^2)(x+y)\,dy =$

$= \int_0^1 dx \int_0^x (x^3+x^2y+xy^2+y^3)\,dy = \int_0^1 \left[x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{xy^3}{3}+\frac{1}{4}y^4\right]_0^x dx =$

$= \int_0^1 \left[x^4+\frac{1}{2}x^4+\frac{x^4}{3}+\frac{1}{4}x^4\right] dx = \int_0^1 \frac{25}{12}x^4\,dx = \frac{5}{12}\left[x^5\right]_0^1 = \frac{5}{12}$

2) Osserviamo che dalla parametrizzazione data per Γ il parametro t varia fra $t=0$ a $t=1$. Inoltre $x'(t) = -e^{-t}$ e $y'(t)=(e^{2t}+2te^{2t})\,dt$. Dunque

a) $\int_\Gamma [xy\,dx + dy] = \int_0^1 \left[te^t(-e^{-t})\,dt + (e^{2t}+2te^{2t})\,dt\right] = \int_0^1 \left[-t+e^{2t}+2te^{2t}\right]dt =$

$= \left[-\frac{1}{2}t^2+te^{2t}\right]_0^1 = e^2-\frac{1}{2}$

b) Poiché la curva $\Gamma_1=\overline{P_1P_2}$ ha gli stessi estremi di Γ e lo stesso verso di percorrenza, ma, posto $X=xy$ e $Y=1$ si può facilmente verificare che X e $Y \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ma $X_y = x \neq Y_x = 0$ e dunque la forma differenziale non è esatta, di conseguenza non si ritiene per il teorema sulle f.d.e. che tale integrale avrà necessariamente lungo il segmento $\overline{P_1P_2}$ lo stesso valore trovato in a), perché il valore di un integrale curvilineo di una f.d. non dipende dalle curve che unisce due punti se solo se la f.d. è esatta.

3) Risolviamo l'omogenea associata: $4(y''-y)=0 \Rightarrow y''-y=0 \Rightarrow$ E. car.: $\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm 1$

$\Rightarrow$ L'int. gen. dell'omogenea assoc. è $\eta(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$. Poiché 2 non è sol. dell'eq. caratt. l'int. part. della non omogenea avrà la forma $y_0=e^{2x}(Ax+B)$

$\Rightarrow y_0' = 2e^{2x}Ax+2e^{2x}B+e^{2x}A,\quad y_0''=4e^{2x}Ax+2Ae^{2x}+4Be^{2x}+2Ae^{2x}$

$\Rightarrow e^{2x}\left[(4Ax+4A+4B)-(Ax+B)\right]=4xe^{2x} \Rightarrow \begin{cases}3A=4\\4A+3B=0\end{cases} \quad \begin{cases}A=4/3\\B=-\frac{16}{9}\end{cases}$

$\Rightarrow y_0=\left(\frac{4}{3}x-\frac{16}{9}\right)e^{2x} \Rightarrow$ l'int. generale sarà:

$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+\left(\frac{4}{3}x-\frac{16}{9}\right)e^{2x}$; $y'(x)=c_1e^x-c_2e^{-x}+\frac{4}{3}e^{2x}+\frac{8}{3}xe^{2x}-\frac{32}{9}e^{2x}$

$\begin{cases}c_1+c_2-\frac{16}{9}=1\\c_1-c_2+\frac{4}{3}-\frac{32}{9}=0\end{cases} \quad \begin{cases}c_2=\frac{5}{18}\\c_1=\frac{5}{2}\end{cases} \Rightarrow y(x)=\frac{5}{2}e^x+\frac{5}{18}e^{-x}+\left(\frac{4}{3}x-\frac{16}{9}\right)e^{2x}$ è la sol. del pb. C.

4) Si tratta di una serie di potenze di centro $x_0=1$. Per calcolare il raggio di convergenza, calcoliamo $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+6}}\cdot\frac{\sqrt{n+5}}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\overbrace{\frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n+6}}}^{\to 1}\cdot 3=3$

$\Rightarrow r=\frac{1}{3} \Rightarrow$ il campo di convergenza è $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$. In questo intervallo la serie

Studiamo il comportamento agli estremi:

Per $x=\frac{2}{3}$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n+5}}\frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}$ che converge per il criterio di Leibniz perché $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}=0$ e $\frac{1}{\sqrt{n+6}}<\frac{1}{\sqrt{n+5}}\ \forall n$

Per $x=\frac{4}{3}$ la serie diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n+5}}\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$$ che diverge perché $\lim_{n\to\infty} n^{1/2}\frac{1}{\sqrt{n+5}}=1$

(cor. crit. confronto con $p=\frac{1}{2}$). Dunque la nostra serie converge in $\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

b) Essa converge unif. in ogni int. chiuso contenuto in $\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ (2p)

5) La $f(t)$ è di classe C^1 a tratti, poiché lo sono sia $3e^{-4t}$ che e –

Verifichiamo ora se f è assolutamente integrabile in $(-\infty,+\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\,dt + 3\int_{0}^{+\infty} e^{-4t}\,dt = \lim_{b\to-\infty}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_b^0 + 3\lim_{c\to+\infty}\left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^c =$$

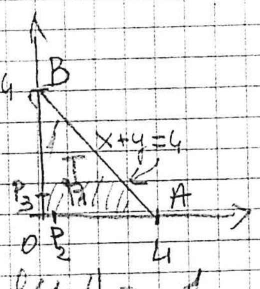
$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to-\infty}\left[1-e^{2b}\right] - \frac{3}{4}\lim_{c\to+\infty}\left[e^{-4c}-1\right] = \frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}<+\infty$$

Possiamo allora calcolare la trasformata:

$$\hat{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-2\pi i\nu x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{2x}\cdot e^{-2\pi i\nu x}\,dx + 3\int_{0}^{+\infty} e^{-4x}\,e^{-2\pi i\nu x}\,dx =$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\frac{1}{2(1-\pi\nu i)}\left[e^{2(1-\pi\nu i)x}\right]_b^0 + 3\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{-2(2+\pi\nu i)}\left[e^{-2(2+\pi\nu i)x}\right]_0^c =$$

$$=\frac{1}{2(1-\pi\nu i)}+\frac{3}{2}\frac{1}{2+\pi\nu i}$$



6) La funzione $f(x,y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$ e T è un dominio chiuso e limitato. Pertanto per il teorema di Weierstrass $\exists$ max e min assoluto. Cerchiamo i punti critici interni

$$\begin{cases} f'_x = 2x-y-1=0 \\ f'_y = 2y-x-1=0 \end{cases}$$ in $P_1(1,1)$ che è interno al dominio (infatti $1+1\leq 4$); $f(1,1)=-1$

Non ci sono punti di non derivabilità.

Studiamo la f sulla frontiera: $\overline{OA}$ $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ 0\leq t\leq 4\end{cases}$ $f_{OA}(t)=t^2-t$; $f'_{OA}(t)=2t-1=0$ per $t=\frac{1}{2}$ interno che corrisponde al punto $P_2\left(\frac{1}{2},0\right)$; $f(P_2)=-\frac{1}{4}$;

$\overline{OB}$: $\begin{cases} x=0 \\ y=t,\ 0\leq t\leq 4\end{cases}$ $f_{OB}(t)=t^2-t$; $f'_{OB}(t)=2t-1 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$ che corrisp. al punto $P_3\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$f(P_3)=-\frac{1}{4}$

$\overline{AB}$ $\begin{cases} x=t \\ y=4-t \\ \text{con } 0\leq t\leq 4\end{cases}$ $f_{AB}(t)=t^2+(4-t)^2-t(4-t)-t-(4-t)=t^2+(4-t)^2-4t+t^2-\cancel{t}-4+\cancel{t}=$

$=t^2+16+t^2-8t-4t+t^2-4=3(t-2)^2$; $f'_{AB}(t)=6(t-2)=0$ per $t=2$ (interno) che corrisponde al punto $(2,2)=P_4$; $f(2,2)=0$; Inoltre $f(0,0)=0$; $f(A)=12=f(B)$

... A e B ... punti di max assol. che vale 12