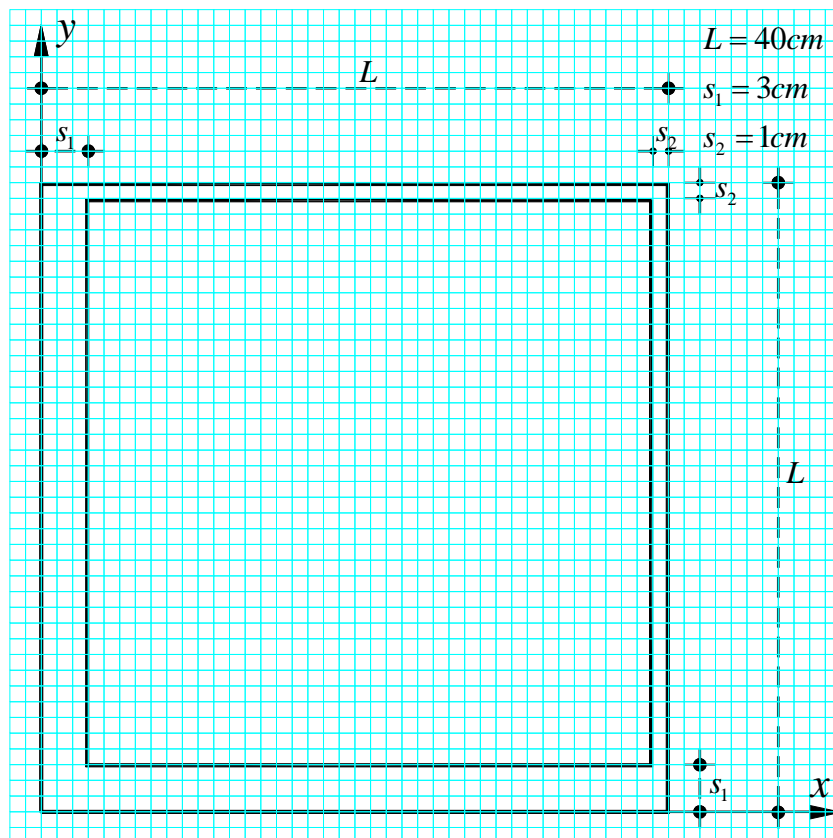


## ESERCIZIO n.7

Data la sezione cava riportata in Figura, determinare:

- gli assi principali centrali di inerzia;
- l'ellisse principale centrale di inerzia;
- il nocciolo centrale di inerzia.



### 1. Determinazione del baricentro della sezione

La sezione in esame presenta un asse di simmetria inclinato di  $45^\circ$  rispetto all'asse  $x$ , dunque il baricentro viene a trovarsi su tale asse. Per individuare le coordinate del baricentro espresse nel sistema di riferimento  $(x, y)$  indicato in Figura, si può considerare la sezione ottenibile come differenza di due quadrati, di cui uno di lati  $L = 40\text{cm}$ , il secondo di lato  $L - s_1 - s_2 = 36\text{cm}$ . Si procede quindi all'individuazione del baricentro e al calcolo dell'area per ciascuno dei quadrati:

Quadrato I

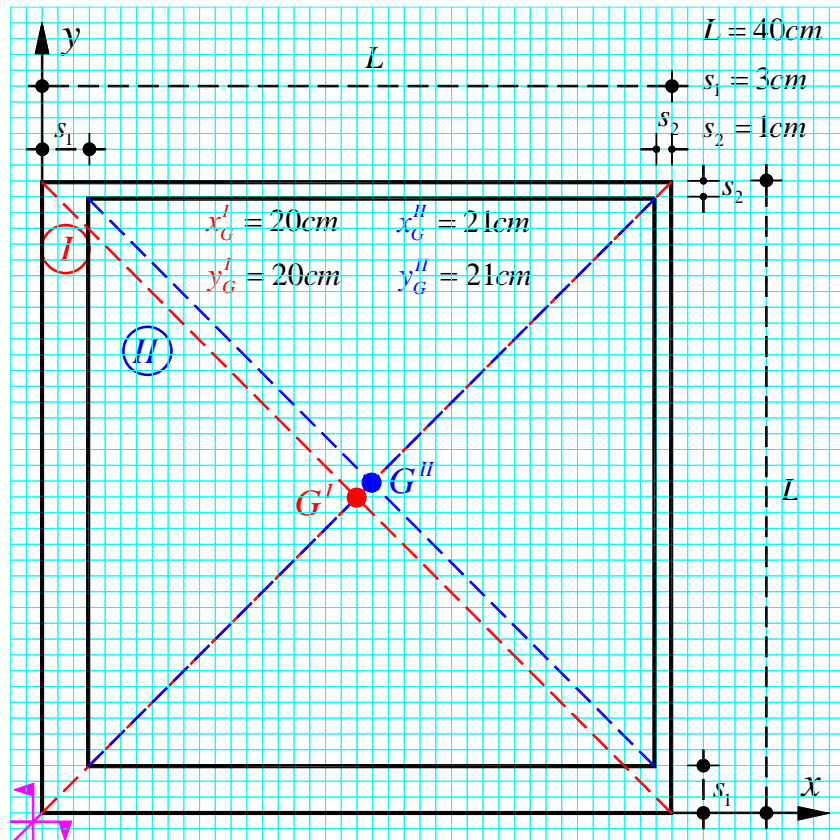
$$A^I = L^2 = 40^2 = 1600 \text{ cm}^2$$

$$\begin{cases} x_G^I = \frac{L}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm} \\ y_G^I = \frac{L}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm} \end{cases}$$

Quadrato II

$$A^{II} = (L - s_1 - s_2)^2 = (40 - 3 - 1)^2 = 1296 \text{ cm}^2$$

$$\begin{cases} x_G^{II} = s_1 + \frac{L - s_1 - s_2}{2} = 3 + \frac{40 - 3 - 1}{2} = 21 \text{ cm} \\ y_G^{II} = s_1 + \frac{L - s_1 - s_2}{2} = 3 + \frac{40 - 3 - 1}{2} = 21 \text{ cm} \end{cases}$$



L'area complessiva della sezione è ovviamente pari alla differenza:

$$A = A^I - A^{II} = 1600 - 1296 = 304 \text{ cm}^2$$

Si calcolano quindi i momenti statici della sezione rispetto agli assi  $x$  e  $y$  e ciò sfruttando la proprietà additiva del momento statico:

Momento statico  $S_x$  rispetto all'asse  $x$ :

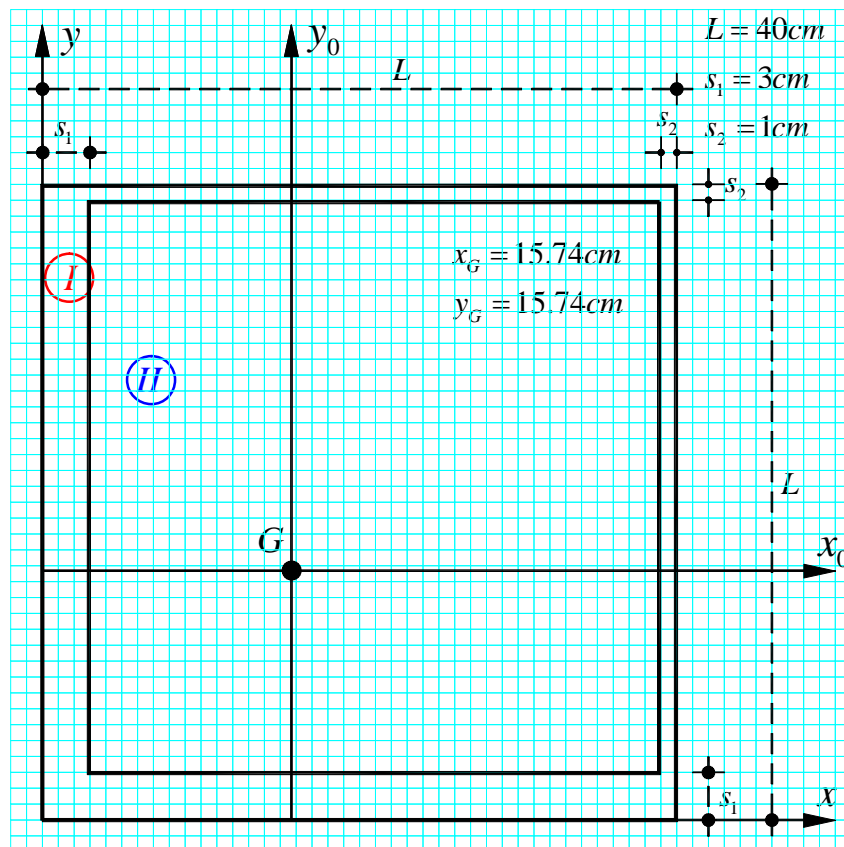
$$S_x = S_x^I - S_x^{II} = A^I y_G^I - A^{II} y_G^{II} = 1600 \cdot 20 - 1296 \cdot 21 = 4784 \text{ cm}^3$$

Momento statico  $S_y$  rispetto all'asse  $y$ :

$$S_y = S_y^I - S_y^{II} = A^I x_G^I - A^{II} x_G^{II} = 1600 \cdot 20 - 1296 \cdot 21 = 4784 \text{ cm}^3$$

La posizione del baricentro della sezione nel riferimento  $(x, y)$  considerato si determina applicando le formule di seguito riportate ed esplicitate numericamente per il caso in esame, risulta:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{4784 \text{ cm}^3}{304 \text{ cm}^2} = 15.74 \text{ cm}, \quad y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{4784 \text{ cm}^3}{304 \text{ cm}^2} = 15.74 \text{ cm}.$$

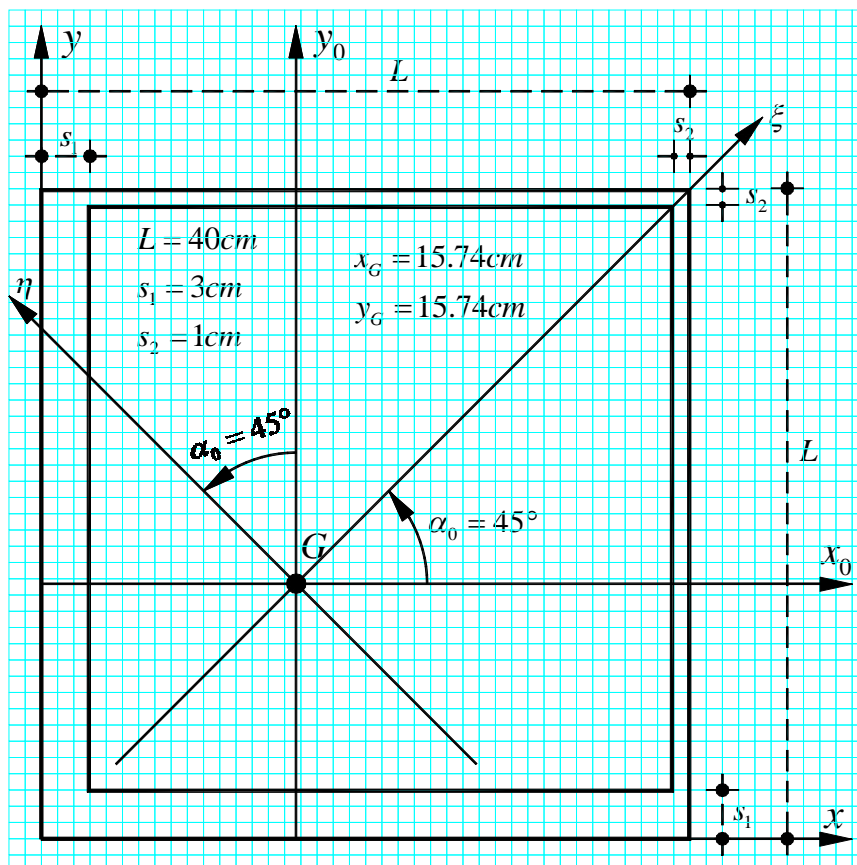


Si noti che le coordinate del baricentro, nel riferimento  $(x, y)$ , hanno lo stesso valore; questa circostanza era prevedibile ed è legata al fatto che l'asse di simmetria della sezione è inclinato di  $45^\circ$  nel riferimento  $(x, y)$ , dunque tutti i suoi punti sono caratterizzati dall'aver le stesse coordinate  $x$  e  $y$ .

## 2. Determinazione degli assi principali centrali di inerzia

Si ricorda che se una sezione possiede un asse di simmetria esso risulta essere principale centrale di inerzia, come pure l'asse ad esso ortogonale e passante per il baricentro. Pertanto, con riferimento alla figura in esame, gli assi principali centrali di inerzia si identificano con l'asse di simmetria obliquo indicato con  $\xi$  e l'asse baricentrico ad esso ortogonale indicato con  $\eta$ .

Rispetto a tali assi il momento centrifugo risulta essere nullo, cioè  $I_{\xi\eta} = 0$ .



### 3. Determinazione dell'ellisse centrale di inerzia

L'ellisse centrale di inerzia, riferita agli assi principali centrali di inerzia  $\xi$  e  $\eta$ , ha equazione:

$$\frac{\xi^2}{\rho_\eta^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\xi^2} = 1$$

nella quale  $\rho_\xi$  e  $\rho_\eta$  sono i semiassi dell'ellisse che coincidono, com'è noto, con i raggi giroatori di inerzia della sezione espressi da:

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}}, \quad \rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}}.$$

Nelle relazioni precedenti:  $A$  è l'area totale della sezione in esame;  $I_\xi$  e  $I_\eta$  sono i momenti principali centrali di inerzia della sezione esprimibili in funzione dei momenti del secondo ordine  $I_{x_0}, I_{y_0}, I_{x_0 y_0}$  rispetto al sistema di riferimento baricentrico  $(x_0, y_0)$ .

#### 3.1 Calcolo del momento di inerzia della sezione rispetto all'asse $x_0$

Il calcolo dei momenti del secondo ordine rispetto al riferimento  $(x_0, y_0)$  è effettuato avvalendosi della proprietà additiva per i momenti del secondo ordine, sfruttando la scomposizione in due quadrati operata in precedenza e applicando, ove necessario, il teorema del trasporto.

Il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse  $x_0$  è dato dalla differenza dei momenti di inerzia rispetto all'asse  $x_0$  dei singoli quadrati  $I$  e  $II$ , cioè:

$$I_{x_0} = I_{x_0}^I - I_{x_0}^{II}$$

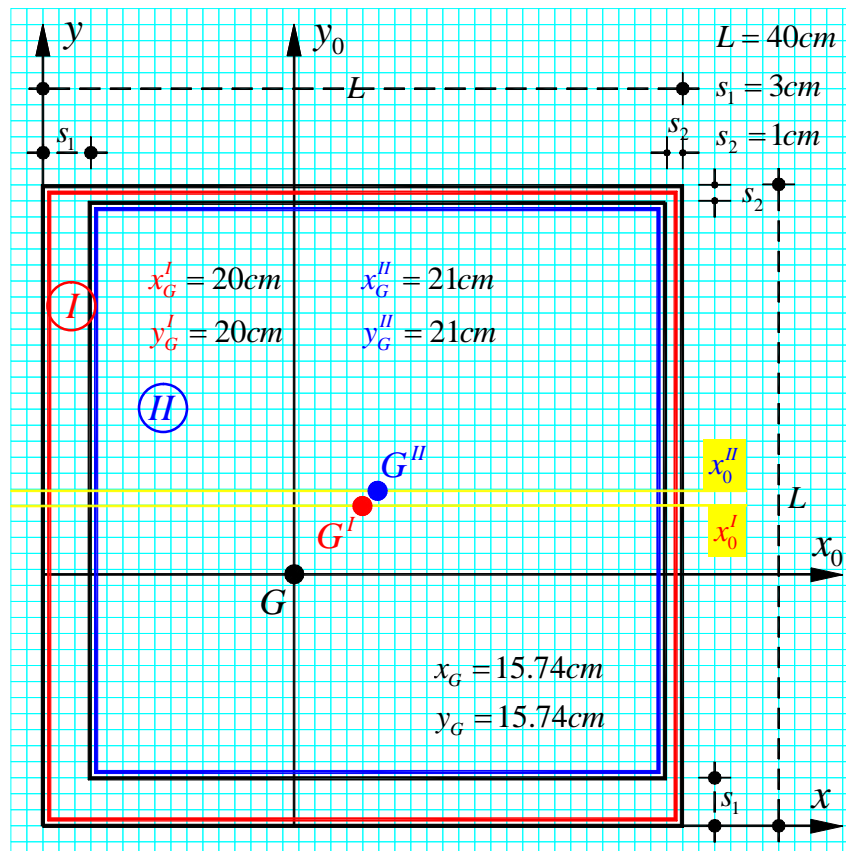
Per la valutazione di  $I'_{x_0}$  e  $I''_{x_0}$  si applica il teorema del trasporto; nel seguito  $I'_{x'_0}$  indica il momento di inerzia del quadrato  $I$  rispetto ad un asse  $x'_0$  parallelo all'asse  $x_0$  e passante per il baricentro  $G^I$ , analogamente  $I''_{x''_0}$  indica il momento di inerzia del quadrato  $II$  rispetto ad un asse  $x''_0$  parallelo all'asse  $x_0$  e passante per il baricentro  $G^{II}$ .

$$I'_{x_0} = I'_{x'_0} + A^I (y'_G - y_G)^2 = \frac{1}{12} L^4 + L^2 (y'_G - y_G)^2 = \frac{1}{12} \cdot 40^4 + 40^2 (20 - 15.74)^2 = 242369.49 \text{ cm}^4$$

$$I''_{x_0} = I''_{x''_0} + A^{II} (y''_G - y_G)^2 = \frac{1}{12} (L - s_1 - s_2)^4 + (L - s_1 - s_2)^2 (y''_G - y_G)^2 = \frac{1}{12} \cdot 36^4 + 36^2 (21 - 15.74)^2 = 175825.21 \text{ cm}^4$$

Si ha in definitiva:

$$I_{x_0} = I'_{x_0} - I''_{x_0} = 242369.49 - 175825.21 = 66544.28 \text{ cm}^4$$



### 3.2 Calcolo del momento di inerzia della sezione rispetto all'asse $y_0$

Il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse  $y_0$  è dato dalla differenza dei momenti di inerzia rispetto all'asse  $y_0$  dei singoli quadrati  $I$  e  $II$ , cioè:

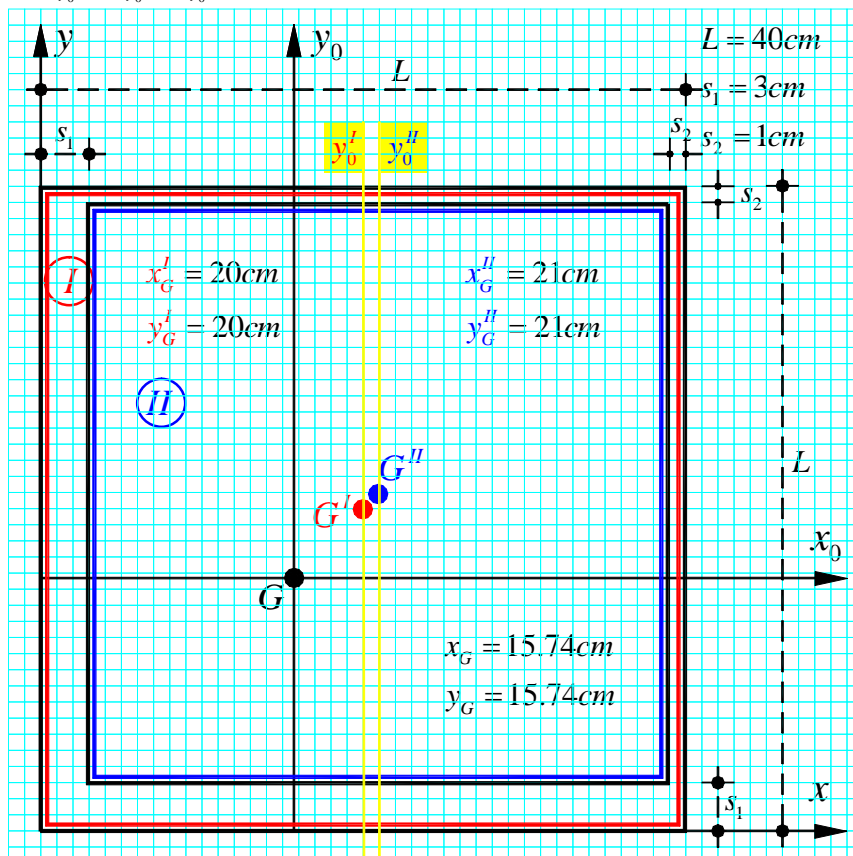
$$I_{y_0} = I_{y_0}^I - I_{y_0}^{II}$$

Per la valutazione di  $I_{y_0}^I$  e  $I_{y_0}^{II}$  si applica il teorema del trasporto; nel seguito  $I_{y_0}^I$  indica il momento di inerzia del quadrato  $I$  rispetto ad un asse  $y_0^I$  parallelo all'asse  $y_0$  e passante per il baricentro  $G^I$ , analogamente  $I_{y_0}^{II}$  indica il momento di inerzia del quadrato  $II$  rispetto ad un asse  $y_0^{II}$  parallelo all'asse  $y_0$  e passante per il baricentro  $G^{II}$ .

$$I_{y_0}^I = I_{y_0^I}^I + A^I (x_G^I - x_G)^2 = \frac{1}{12} L^4 + L^2 (x_G^I - x_G)^2 = \frac{1}{12} \cdot 40^4 + 40^2 (20 - 15.74)^2 = 242369.49 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_0}^{II} = I_{y_0^{II}}^{II} + A^{II} (x_G^{II} - x_G)^2 = \frac{1}{12} (L - s_1 - s_2)^4 + (L - s_1 - s_2)^2 (x_G^{II} - x_G)^2 = \frac{1}{12} \cdot 36^4 + 36^2 (21 - 15.74)^2 = 175825.21 \text{ cm}^4$$

Si ha in definitiva:  $I_{y_0} = I_{y_0}^I - I_{y_0}^{II} = 242369.4 - 175825.21 = 66544.28 \text{ cm}^4$



### 3.3 Calcolo del momento di inerzia centrifugo rispetto agli assi $x_0$ e $y_0$

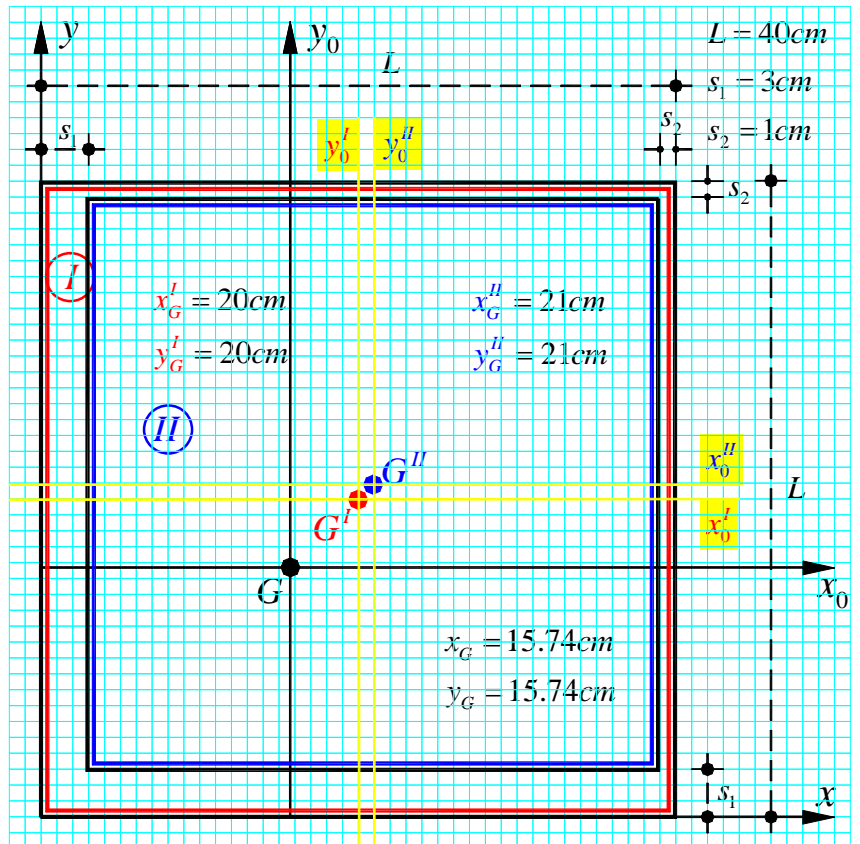
Il momento di inerzia centrifugo della sezione rispetto agli assi  $x_0$  e  $y_0$  è dato dalla differenza dei momenti di inerzia centrifughi rispetto agli assi  $x_0$  e  $y_0$  dei singoli quadrati  $I$  e  $II$

$$I_{x_0 y_0} = I_{x_0 y_0}^I - I_{x_0 y_0}^{II}$$

Per la valutazione di  $I_{x_0 y_0}^I$  e  $I_{x_0 y_0}^{II}$  si applica il teorema del trasporto; nel seguito  $I_{x'_0 y'_0}^I$  indica il momento di inerzia centrifugo del quadrato  $I$  rispetto agli assi  $x'_0$  e  $y'_0$  passanti per il baricentro  $G^I$  e paralleli agli assi  $x_0$  e  $y_0$ , analogamente  $I_{x''_0 y''_0}^{II}$  indica il momento di inerzia del quadrato  $II$  rispetto agli assi  $x''_0$  e  $y''_0$  passanti per il baricentro  $G^{II}$  e paralleli agli assi  $x_0$  e  $y_0$ . I momenti centrifughi  $I_{x'_0 y'_0}^I$  e  $I_{x''_0 y''_0}^{II}$  sono riportati nelle formule che seguono solo per completezza, infatti essendo  $(x'_0, y'_0)$  e  $(x''_0, y''_0)$  assi principali centrali di inerzia, rispettivamente, per i quadrati  $I$  e  $II$ , risulta  $I_{x'_0 y'_0}^I = I_{x''_0 y''_0}^{II} = 0$ .

$$\begin{aligned} I_{x_0 y_0}^I &= I_{x'_0 y'_0}^I + A^I (x'_G - x_G)(y'_G - y_G) = \\ &= L^2 (x'_G - x_G)(y'_G - y_G) = \\ &= 40^2 (20 - 15.74)(20 - 15.74) = \\ &= 29036.16 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x_0 y_0}^{II} &= I_{x''_0 y''_0}^{II} + A^{II} (x''_G - x_G)(y''_G - y_G) = \\ &= (L - s_1 - s_2)^2 (x''_G - x_G)(y''_G - y_G) = \\ &= 36^2 (21 - 15.74)(21 - 15.74) = \\ &= 35857.21 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



Si ha in definitiva:  $I_{x_0 y_0} = I_{x_0 y_0}^I - I_{x_0 y_0}^{II} = 29036.16 - 35857.21 = -6821.05 \text{ cm}^4$



### 3.4 Ellisse centrale di inerzia

Noti  $I_{x_0}$ ,  $I_{y_0}$  e  $I_{x_0y_0}$ , i momenti principali centrali di inerzia  $I_\xi$  e  $I_\eta$  possono calcolarsi attraverso la relazione:

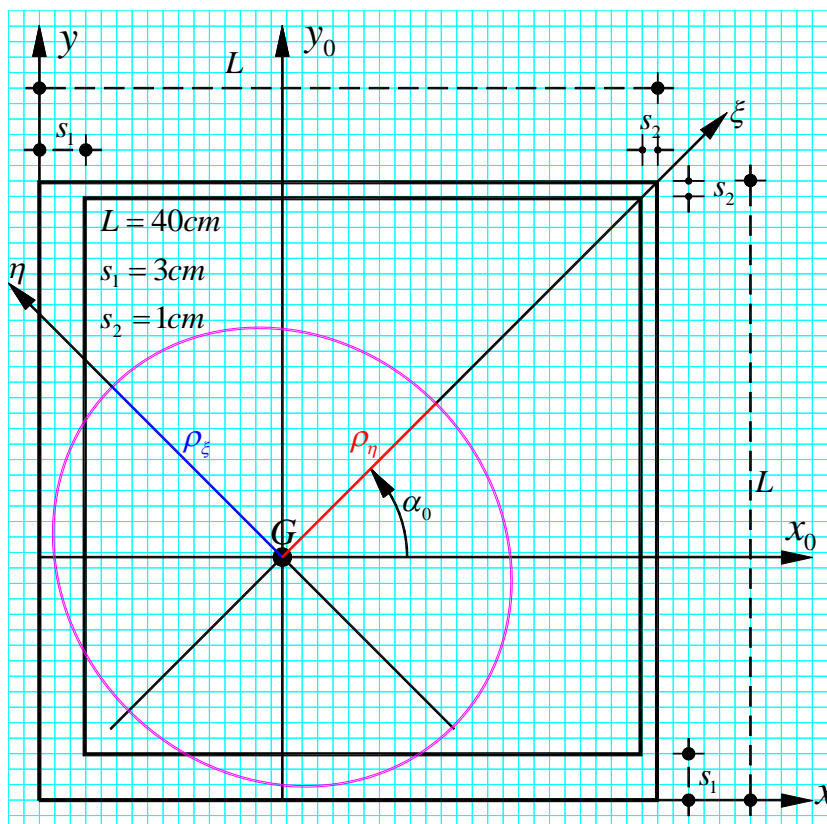
$$\left. \begin{array}{l} I_\xi \\ I_\eta \end{array} \right\} = \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_0} - I_{y_0})^2 + 4I_{x_0y_0}^2} =$$

$$= \frac{66544.28 + 66544.28}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(66544.28 - 66544.28)^2 + 4 \cdot (-6821.05)^2} = \begin{cases} 73365.33 \text{ cm}^4 \\ 59723.23 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Noti  $I_\xi$  e  $I_\eta$ , si possono in definitiva calcolare i raggi giratori di inerzia, si ha:

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}} = \sqrt{\frac{73365.33}{304}} = 15.53 \text{ cm}, \quad \rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}} = \sqrt{\frac{59723.23}{304}} = 14.02 \text{ cm}.$$

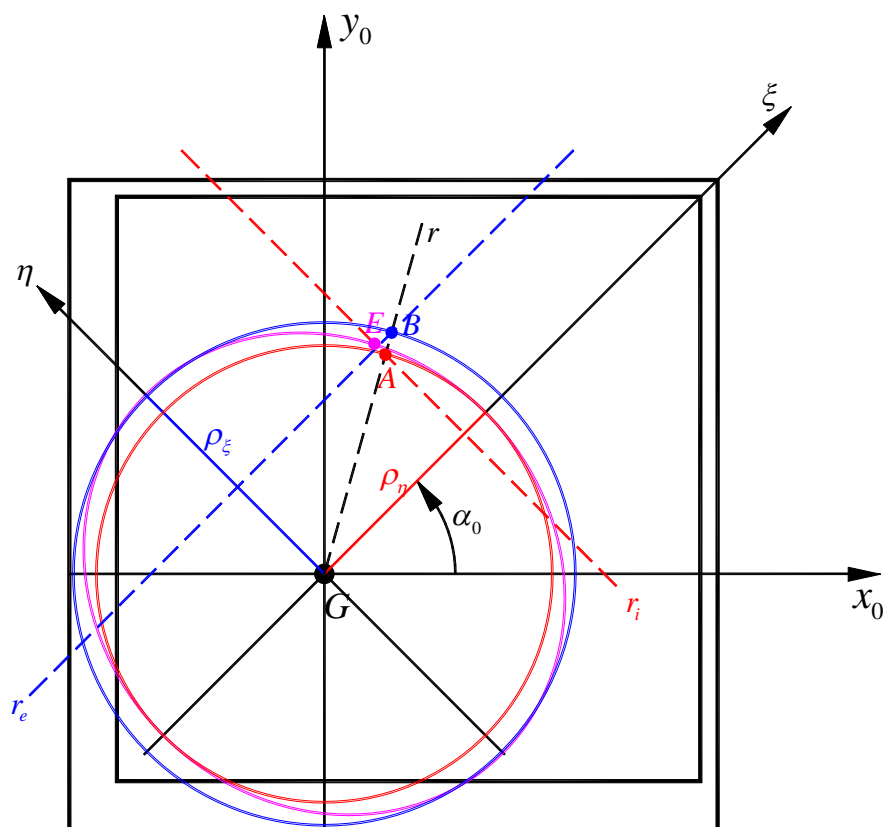
Questi ultimi definiscono l'equazione dell'ellisse centrale di inerzia nel riferimento principale  $(\xi, \eta)$  permettendone così la sua individuazione (effettuabile per punti ad esempio) così come indicato in Figura.



L'individuazione dell'ellisse, noti i semiassi  $\rho_\xi$  e  $\rho_\eta$ , può condursi anche sfruttando una semplice costruzione grafica di seguito illustrata e riportata schematicamente nella Figura seguente.

**Costruzione grafica di un'ellisse noti che siano i suoi semiassi**

1. Tracciare i semiassi dell'ellisse e le circonferenze di centro  $G$  aventi per raggi i semiassi stessi;
2. Tracciata per  $G$  la generica semiretta  $r$ , condurre dalla sua intersezione  $A$  con la circonferenza interna la retta  $r_i$  parallela al semiasse maggiore, e dall'intersezione  $B$  con la circonferenza esterna la retta  $r_e$  parallela al semiasse minore;
3. Il punto  $E$  intersezione di  $r_i$  e  $r_e$  è punto dell'ellisse;
4. Ripetere la costruzione per un numero di punti sufficiente alla costruzione dell'ellisse.



#### 4. Determinazione del nocciolo centrale di inerzia

Il nocciolo centrale di inerzia di una figura piana è il luogo dei centri relativi delle rette del piano che non tagliano la figura o, nella polarità d'inerzia di centro il baricentro  $G$  della figura (polarità esistente tra le rette del piano e i simmetrici rispetto a  $G$  dei loro centri relativi), il nocciolo centrale di inerzia è il luogo degli antipoli delle rette del piano che non tagliano la figura. Il nocciolo è qui di seguito individuato attraverso la costruzione del suo contorno e ciò, in particolare, attraverso la determinazione della posizione dei vertici dello stesso, determinati come antipoli delle rette tangenti alla frontiera (o contorno) della figura resa convessa. Il contorno del nocciolo centrale di inerzia della sezione in esame è quindi una figura a 4 vertici ciascuno dei quali rappresenta l'antipolo di una delle tangenti al contorno della sezione resa convessa.

##### 4.1 Metodo analitico

Le coordinate dei vertici  $R_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) del nocciolo centrale di inerzia possono essere calcolate nel riferimento ortogonale  $(x_0, y_0)$  prima considerato previa determinazione, nello stesso riferimento, delle equazioni delle rette  $r_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) tangenti al contorno della figura resa convessa. Nota infatti l'equazione di una retta nel riferimento  $(x_0, y_0)$ , nella forma  $ax + by + 1 = 0$ , dove  $x$  e  $y$  sono da intendersi valutate nel riferimento  $(x_0, y_0)$  e il pedice  $0$  è omesso per comodità, il suo antipolo, nello stesso riferimento, ha coordinate  $P \equiv (x_p, y_p)$  fornite da:

$$x_p = (a I_{y_0} + b I_{x_0 y_0}) / A; \quad y_p = (a I_{x_0 y_0} + b I_{x_0}) / A$$

nelle quali compaiono, oltre ai coefficienti  $a$  e  $b$  dell'equazione della retta considerata, l'area  $A$  della sezione e i momenti del secondo ordine della stessa sezione rispetto al riferimento  $(x_0, y_0)$  valutati in precedenza.

In particolare: per rette di equazione  $y = -1/b$ , cioè parallele all'asse  $x_0$ , ponendo per semplicità  $q = -1/b$ , dalle precedenti risulta:

$$x_p = -\frac{I_{x_0 y_0}}{qA}; \quad y_p = -\frac{I_{x_0}}{qA}$$

per rette di equazione  $x = -1/a$ , quindi parallele all'asse  $y_0$ , ponendo  $q^* = -1/a$  si ha invece:

$$x_p = -\frac{I_{y_0}}{q^* A}; \quad y_p = -\frac{I_{x_0}}{q^* A}$$

Con riferimento alla Figura, le rette tangenti al contorno della sezione resa convessa hanno, nel riferimento  $(x_0, y_0)$ , le seguenti equazioni:

retta  $r_1$  (parallela all'asse  $x_0$ ):  $y = L - y_G = 24.26$ ;

retta  $r_2$  (parallela all'asse  $y_0$ ):  $x = -x_G = -15.74$ ;

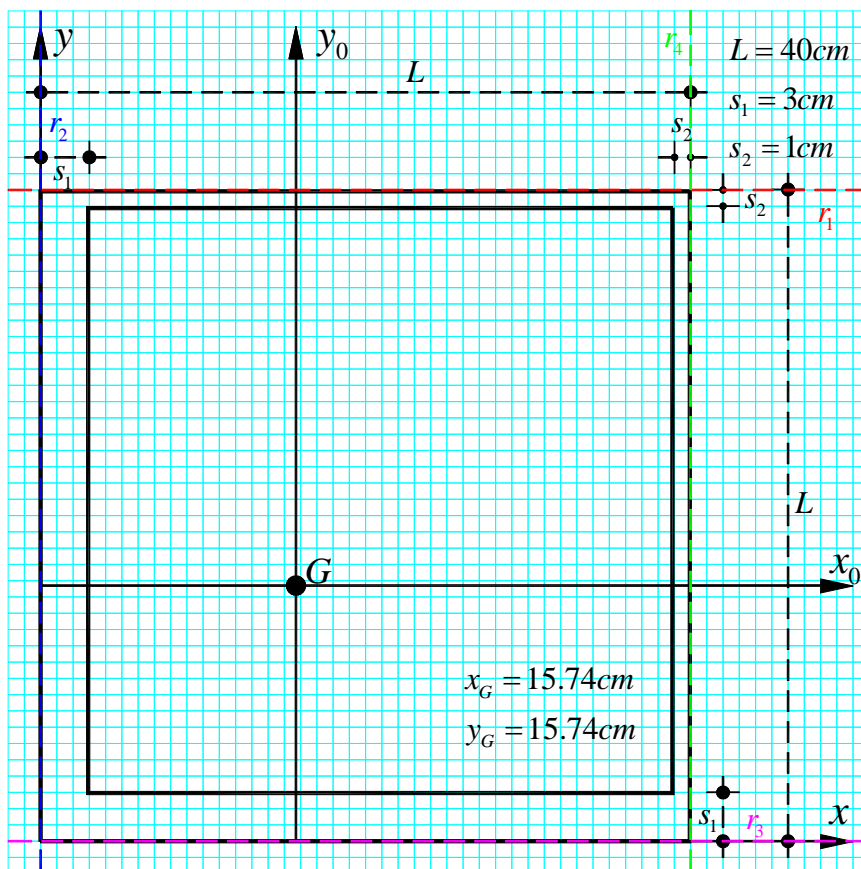
retta  $r_3$  (parallela all'asse  $x_0$ ):  $y = -y_G = -15.74$ ;

retta  $r_4$  (parallela all'asse  $y_0$ ):  $x = L - x_G = 24.26$ .

Riepilogando, nel riferimento  $(x_0, y_0)$ ,

le rette tangenti alla figura resa convessa hanno equazioni:

$$\begin{cases} r_1 : y = 24.26 \\ r_2 : x = -15.74 \\ r_3 : y = -15.74 \\ r_4 : x = 24.26 \end{cases}$$



Applicando le formule prima richiamate, si possono quindi calcolare le coordinate dei vertici  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$ , antipoli rispettivamente delle rette  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  e  $r_4$ . Si calcola:

coordinate punto  $R_1$  (antipolo della retta  $r_1$  di equazione  $y = 24.26$ , parallela all'asse  $x_0$ ):

$$x_{R_1} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{qA} = -\frac{(-6821.05)}{24.26 \cdot 304} = 0.92 \text{ cm}; \quad y_{R_1} = -\frac{I_{x_0}}{qA} = -\frac{66544.28}{24.26 \cdot 304} = -9.02 \text{ cm};$$

coordinate punto  $R_2$  (antipolo della retta  $r_2$  di equazione  $x = -15.74$ , parallela all'asse  $y_0$ ):

$$x_{R_2} = -\frac{I_{y_0}}{q^*A} = -\frac{66544.28}{(-15.74) \cdot 304} = 13.91 \text{ cm}; \quad y_{R_2} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{q^*A} = -\frac{(-6821.05)}{(-15.74) \cdot 304} = -1.43 \text{ cm};$$

coordinate punto  $R_3$  (antipolo della retta  $r_3$  di equazione  $y = -15.74$ , parallela all'asse  $x_0$ ):

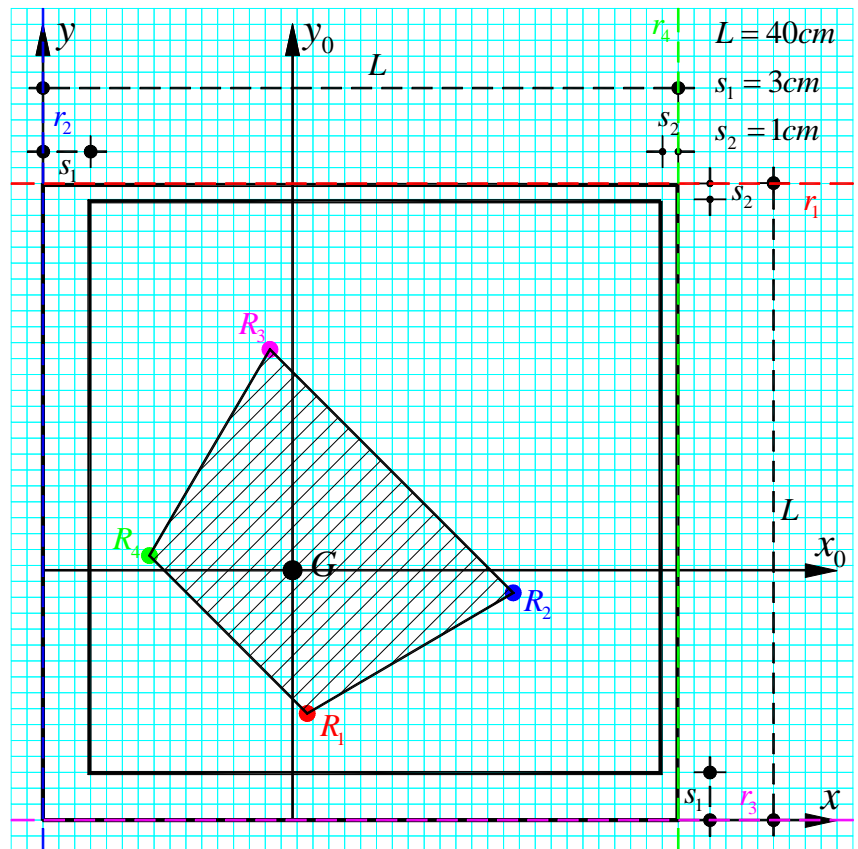
$$x_{R_3} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{qA} = -\frac{(-6821.05)}{(-15.74) \cdot 304} = -1.43 \text{ cm}; \quad y_{R_3} = -\frac{I_{x_0}}{qA} = -\frac{66544.28}{(-15.74) \cdot 304} = 13.91 \text{ cm};$$

coordinate punto  $R_4$  (antipolo della retta  $r_4$  di equazione  $x = 24.26$ , parallela all'asse  $y_0$ ):

$$x_{R_4} = -\frac{I_{y_0}}{q^*A} = -\frac{66544.28}{24.26 \cdot 304} = -9.02 \text{ cm}; \quad y_{R_4} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{q^*A} = -\frac{(-6821.05)}{24.26 \cdot 304} = 0.92 \text{ cm};$$

Unendo i punti  $R_i$  così individuati si ottiene il contorno, e quindi il nocciolo centrale di inerzia della sezione in esame, come illustrato in Figura. Si ricorda che i lati del nocciolo sono le antipolari dei vertici della sezione.

Si osserva inoltre che, data la simmetria della sezione rispetto all'asse principale  $\xi$ , ai fini della individuazione del contorno del nocciolo, è sufficiente determinare le coordinate di due soli vertici, ad esempio  $R_1$  ed  $R_2$  essendo  $R_3$  ed  $R_4$  i punti simmetrici di  $R_1$  ed  $R_2$  rispetto all'asse  $\xi$ .



## 4.2 Metodo grafico

In alternativa alla procedura analitica prima esposta, di seguito si propone un metodo grafico per l'individuazione dei vertici del nocciolo centrale d'inerzia. Il metodo è riportato in sintesi, per passi operativi sequenziali e relativamente alla determinazione di un solo vertice del nocciolo della sezione in esame, essendo la costruzione grafica facilmente ripetibile per i restanti vertici. La costruzione è quella che consente, data una figura piana della quale si sia determinata l'ellisse centrale d'inerzia, di individuare l'antipolo  $R$  di una qualsiasi retta  $r$  del piano. Essa si basa su una relazione notevole della polarità d'inerzia di centro  $G$ , nota come relazione di coniugio, espressa da:

$$\rho_{r_0}^2 = \overline{GR} \cdot \overline{GR'}$$

nella quale:

$r_0$  è la retta parallela ad  $r$  e passante per il baricentro  $G$  della figura;

$\rho_{r_0}$  è il raggio giratore d'inerzia rispetto a  $r_0$ , definito dal semidiametro dell'ellisse appartenente alla direzione  $r^*$  coniugata ad  $r$ ;

$R$  è l'antipolo della retta  $r$ ;

$R'$  è il coniugato di  $R$ ;

$\overline{GR}$  e  $\overline{GR'}$  individuano i segmenti rispetto ai quali  $\rho_{r_0}$  è medio proporzionale, come stabilito dalla relazione di coniugio.

Si rimanda ai libri di testo consigliati per i fondamenti teorici sui quali si basa la costruzione proposta.

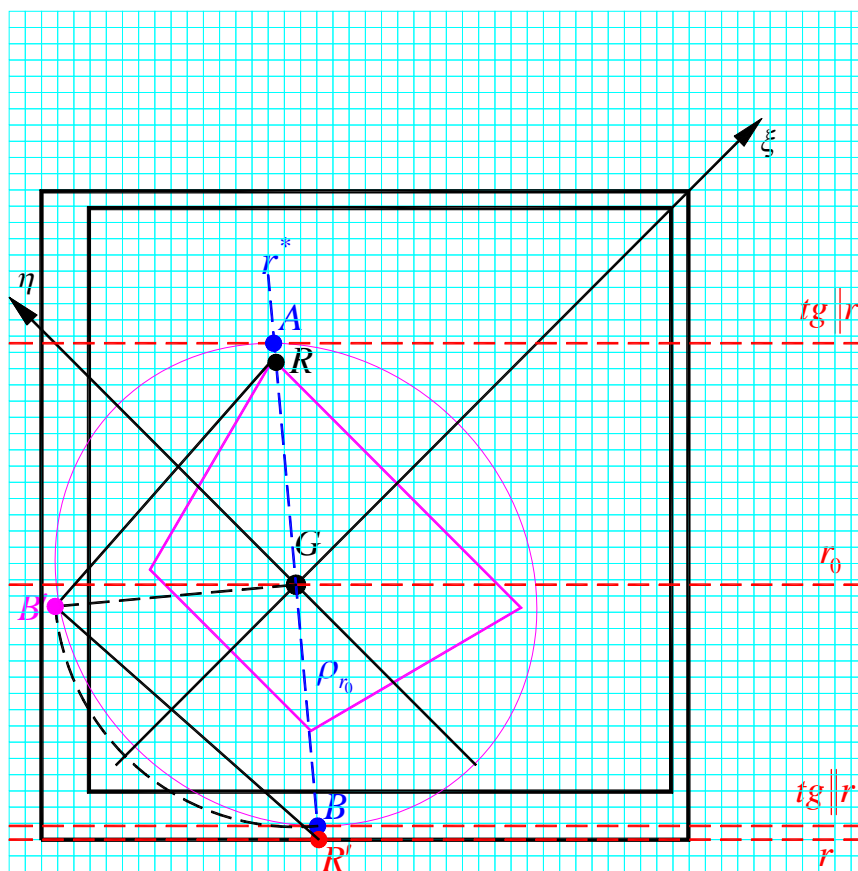
Con riferimento alla Figura, i passi operativi della costruzione proposta sono:

#1 Nota l'ellisse centrale di inerzia e fissata la tangente  $r$ , della quale si vuole individuare l'antipolo  $R$ , si tracciano le tangenti all'ellisse parallele a  $r$ , individuando così i punti di tangenza  $A$  e  $B$ .

#2 La retta passante per i punti di tangenza  $A$  e  $B$  è la direzione  $r^*$  coniugata ad  $r$ , la sua intersezione con  $r$  è il punto  $R'$ , coniugato di  $R$ ; il raggio giratore  $\rho_{r_0}$  coincide con il semidiametro  $\overline{GB}$  (o  $\overline{GA}$ );

#3 Si ruota  $\overline{GB}$  di  $90^\circ$  si da disporlo sull'ortogonale per  $G$  alla direzione coniugata  $r^*$ , sia  $\overline{GB'}$  il segmento così ottenuto;

#4 Si unisce  $R'$  con  $B'$  e si conduce per  $B'$  l'ortogonale a  $\overline{R'B'}$  sino ad intersecare la direzione coniugata  $r^*$  in  $R$ , antipolo della retta  $r$  considerata e vertice del nocciolo centrale di inerzia della sezione.



Ripetendo la costruzione per le altre 3 tangenti alla figura resa convessa si individua in modo completo il nocciolo centrale di inerzia della sezione.