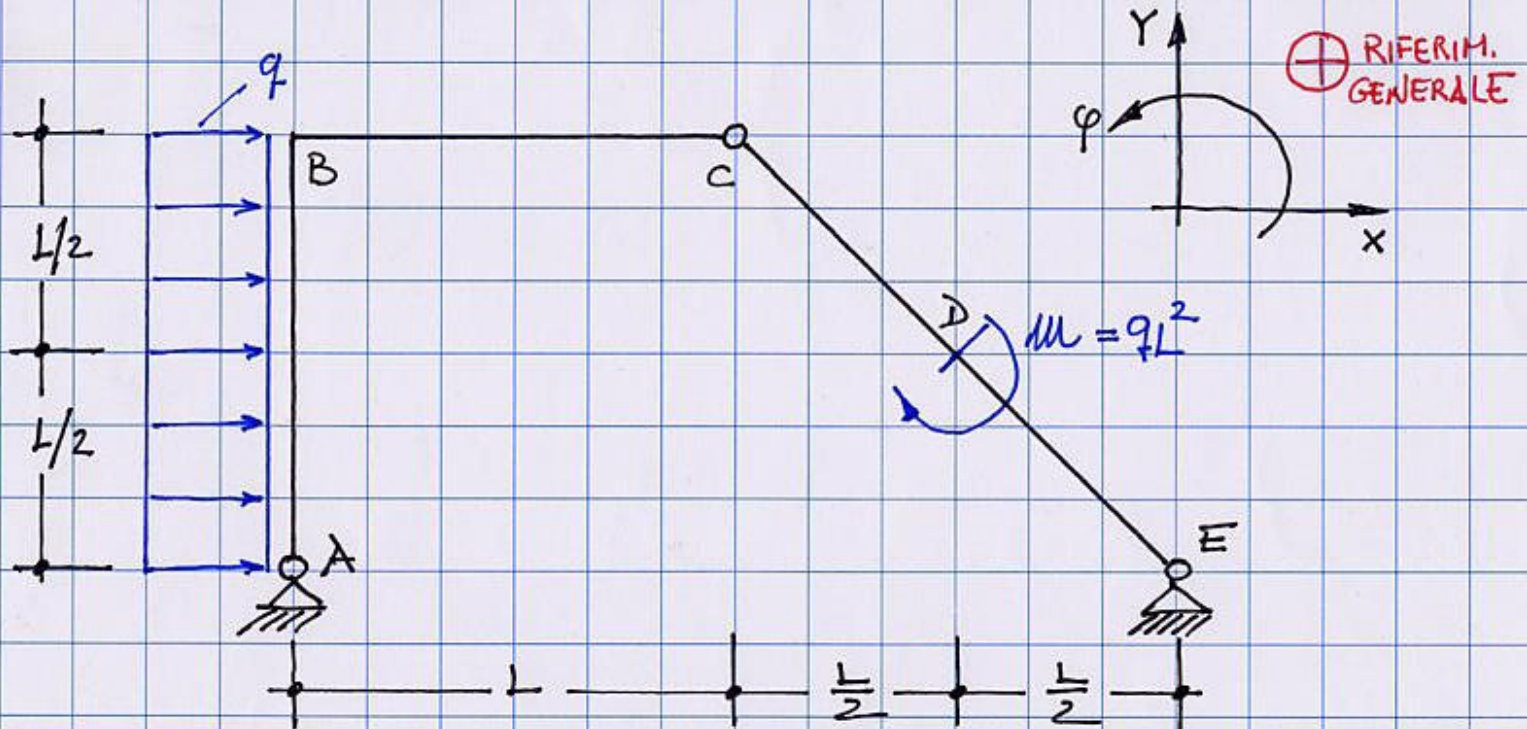


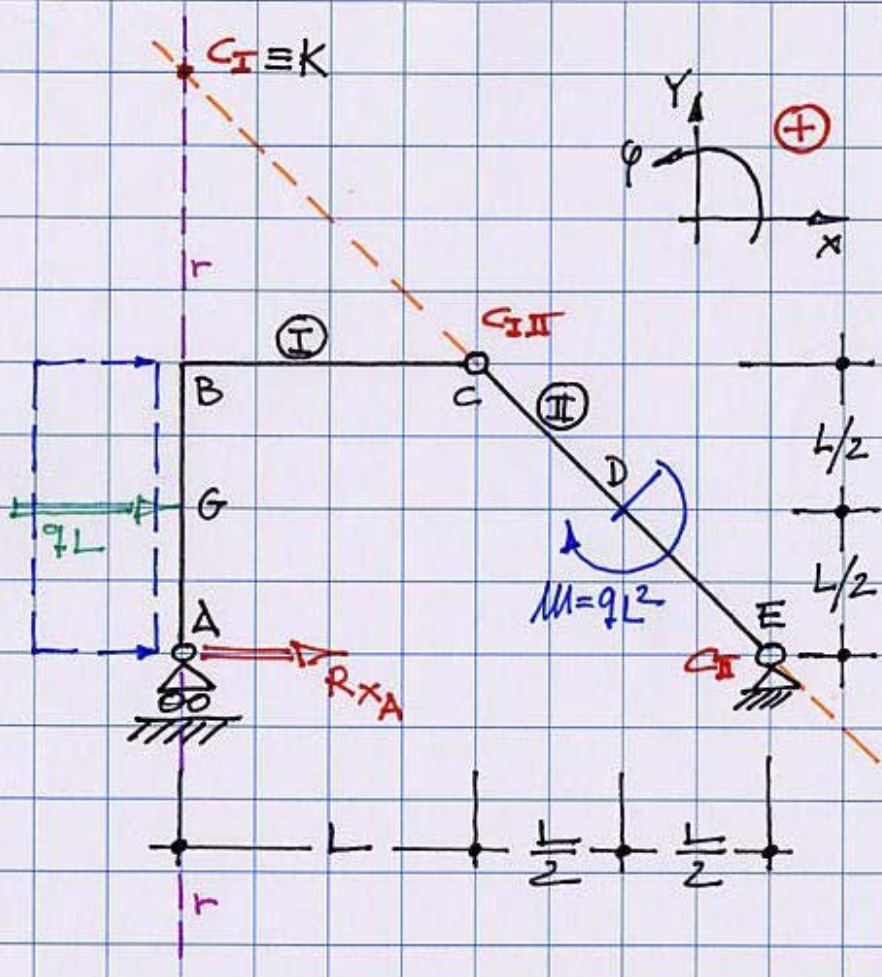
ESERCIZIO #3

DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI DEL SISTEMA ISOSTATICO SEGUENTE TRAMITE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DEI CINEMATISMI.



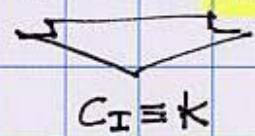
• CALCOLO DI R_{xA}

1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo la cerniera A ($\mu=2$) con un carrello a piano di scorrimento orizzontale ($\mu=1$) e applicando in A la componente di reazione incognita R_{xA} che si vuole valutare.
2. La reazione incognita R_{xA} del sistema originario è infatti interpretabile, sulla catena cinematica così individuata, come un carico esterno incognito. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i corichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di R_{xA} .



• grado di libertà
 $l = 3N - \mu_f = 3 \times 2 - (1 + 2 + 2) = 1$

• Individuazione centri
 assoluti e centro relativo
 CARRELLO A $\rightarrow C_I \equiv r$
 CERNIERA C $\rightarrow C_{II} \equiv C$
 CERNIERA E $\rightarrow C_{III} \equiv E$



dovendo essere allineato
 con $C_{II} = C_{III}$ e dovendo
 appartenere alla retta r !

3. Le equazioni di equilibrio dei cinematici hanno la forma generale $\underline{C}^T \underline{F} = \underline{0}$ con $\underline{C}^T :=$ matrice di equilibrio, $\underline{F} :=$ vettore dei carichi (i carichi distribuiti sono sostituiti da carichi concentrati equivalenti). Nel caso in esame, essendo in presenza di una catena cinematica ($l=1$), il sistema $\underline{C}^T \underline{F} = \underline{0}$ si riduce all'equazione $\underline{C}^T \underline{F} = 0$ (la matrice di equilibrio è costituita da una sola riga ovvero \underline{C} , matrice di compatibilità, è costituita da una sola colonna).

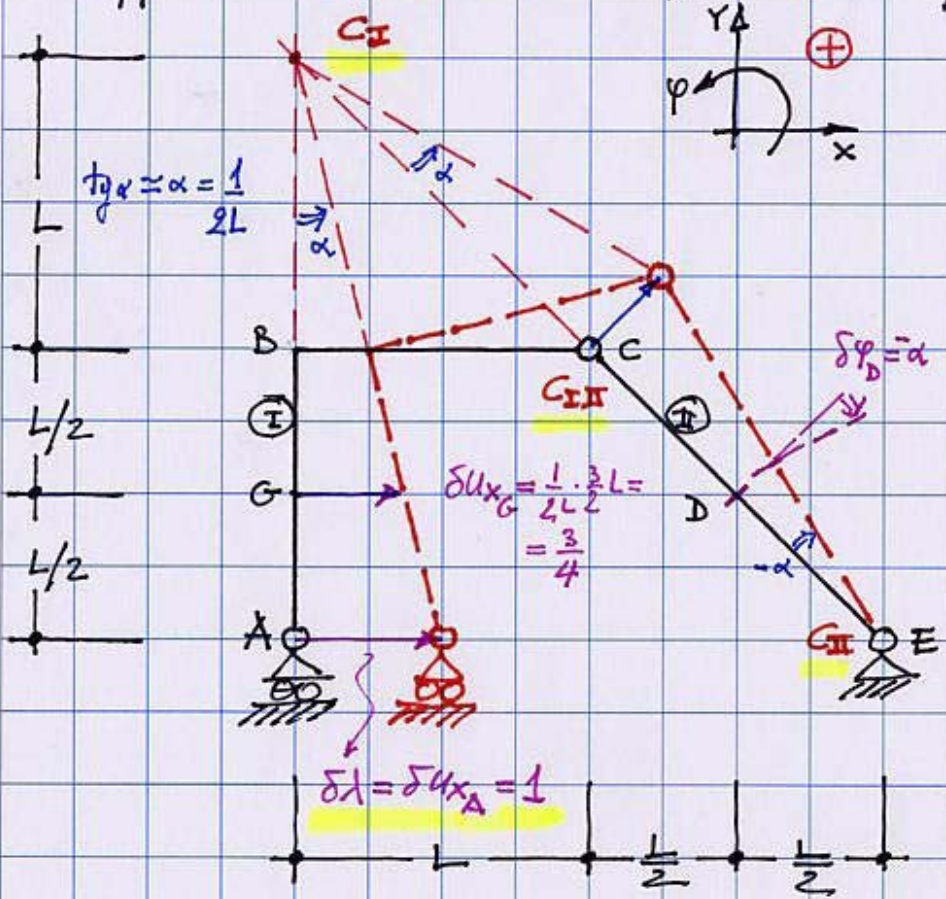
4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

$\delta l = \delta u_{x_A}$; $\underline{\delta u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_A} \\ \delta u_{x_G} \\ \delta \varphi_D \end{bmatrix}$; $\underline{F} = \begin{bmatrix} R_{x_A} \\ qL \\ -M \end{bmatrix}$;

PARAMETRO LAGRANGIANO VETTORE DEGLI SPOSTAMENTI DIPENDENTI DEI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMPONENTI DI SPOSTAMENTO NELLA DIREZIONE DEI CARICHI) VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME $\underline{\delta u}_D$)

l'individuazione di \underline{c} (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando lo spostato della catena cinematica ottenuta per

$\delta\lambda = \delta u_{x_A} = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{c} \equiv \delta u_D / \delta\lambda = 1$.



$$\delta u_D / \delta\lambda = \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ -1/2L \end{bmatrix}$$

Si ha in definitiva: $\underline{c}^T \underline{F} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{x_A} \\ qL \\ -M \end{bmatrix} = 0$

$$R_{x_A} + \frac{3}{4} qL + \frac{M}{2L} = 0 \rightarrow R_{x_A} = -\frac{5}{4} qL \quad (*)$$

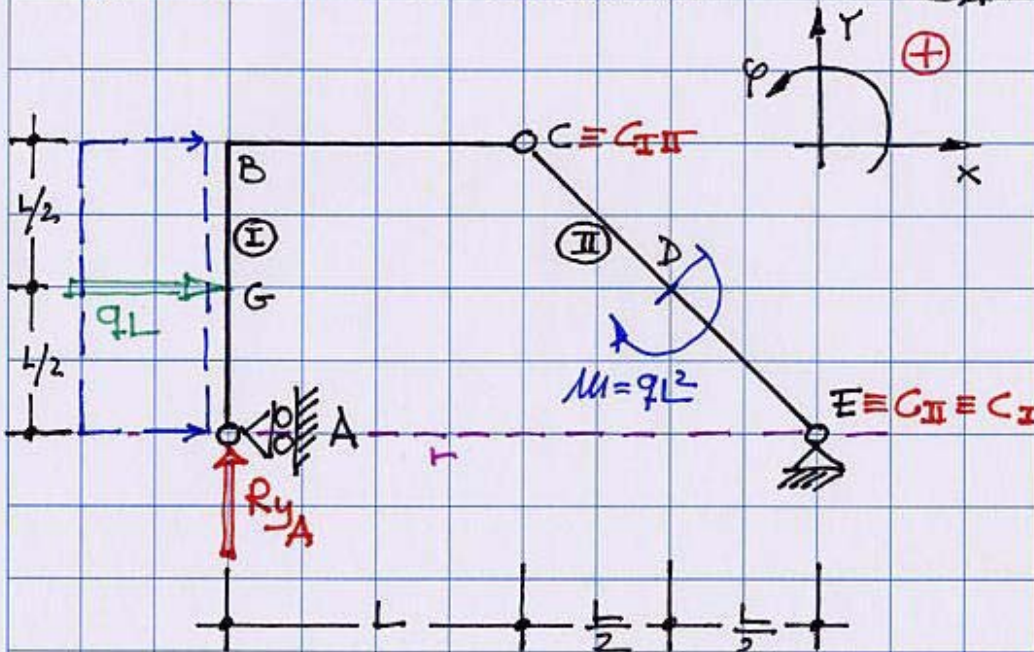
(*) Il verso effettivo di R_{x_A} è opposto a quello ipotizzato!

• CALCOLO DI R_{yA}



1. A tale fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo la cerniera A ($\mu=2$) con un carrello a piano di scorrimento verticale ($\mu=1$) e applicando in A la componente di reazione incognita R_{yA} che si vuole valutare.

2. La reazione incognita R_{yA} del sistema originario è infatti interpretabile come un carico esterno incognito sulla catena cinematica così individuata. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di R_{yA} .



• grado di labilità
 $l = 3N - \mu_t = 3 \times 2 - (1 + 2 + 2) = 1$

• Individuazione
 Centri Assoluti e Centri Relativi di rotazione
 CARRELLI A → $C_I \equiv E$
 CERNIERA C → $C_{II} \equiv C$
 CERNIERA E → $C_{II} \equiv E$

$C_I \equiv E$ e deve essere allineato con C_{II} e C_{II} quindi $C_I \equiv E \equiv C_{II}$

3. Le equazioni di equilibrio dei cinematicismi hanno la forma generale $\underline{C}^T \underline{F} = \underline{0}$ con $\underline{C}^T :=$ matrice di equilibrio, $\underline{F} :=$ vettore dei carichi (i carichi distribuiti sono sostituiti da carichi concentrati equivalenti). Nel caso in esame, essendo in presenza di una catena cinematica ($l=1$), il sistema

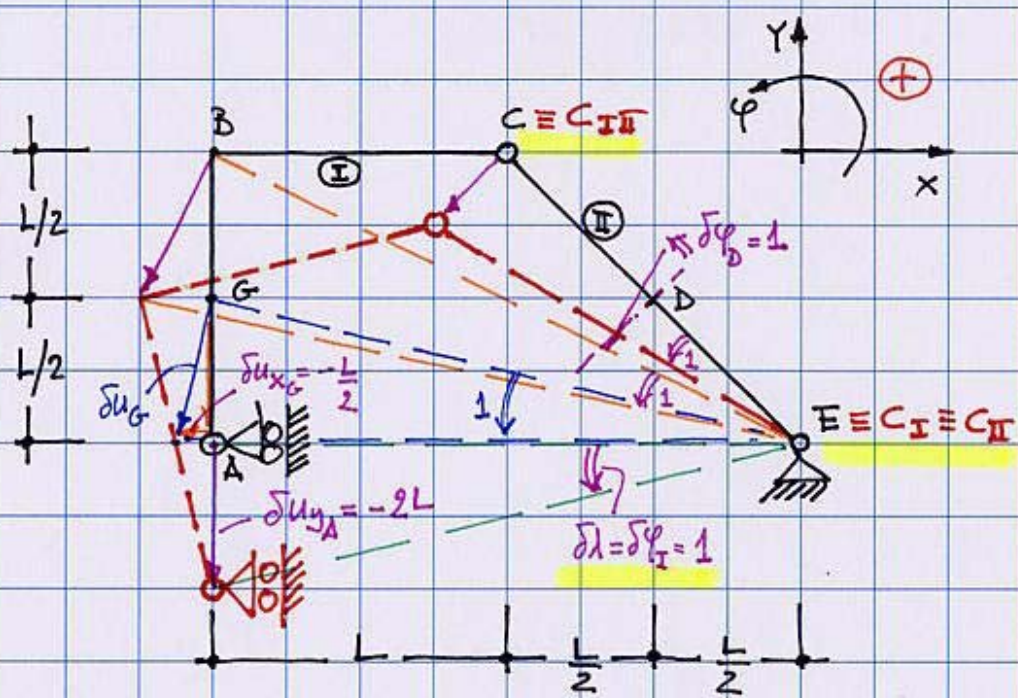
$\underline{C}^T \underline{F} = 0$ si riduce all'equazione $\underline{C}^T \underline{F} = 0$ (la matrice di equilibrio è costituita da una sola riga ovvero \underline{C} , matrice di compatibilità, è costituita da una sola colonna).

4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

$\delta \lambda = \delta \varphi_I$; $\delta u_D = \begin{bmatrix} \delta u_{y_A} \\ \delta u_{x_G} \\ \delta \varphi_D \end{bmatrix}$; $\underline{F} = \begin{bmatrix} R_{y_A} \\ qL \\ -M \end{bmatrix}$

PARAMETRO LAGRANGIANO (ROTAZIONE RIGIDA DEL CORPO I)
 VETTORE SPOSTAMENTI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMPONENTI DI SIST. NELLA DIREZIONE DEI CARICHI)
 VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME δu_D)

l'individuazione di \underline{C} (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta \lambda = \delta \varphi_I = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \delta u_D / \delta \lambda = 1$.



$$\delta u_D \Big|_{\delta \lambda = 1} \equiv \underline{C} = \begin{bmatrix} -2L \\ -\frac{L}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ha in definitiva: $\underline{C}^T \underline{F} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2L & -\frac{L}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{y_A} \\ qL \\ -M \end{bmatrix} = 0$

$$-2L R_{y_A} + \frac{qL^2}{2} - M = 0$$

$$R_{y_A} = -\frac{3}{4} qL$$

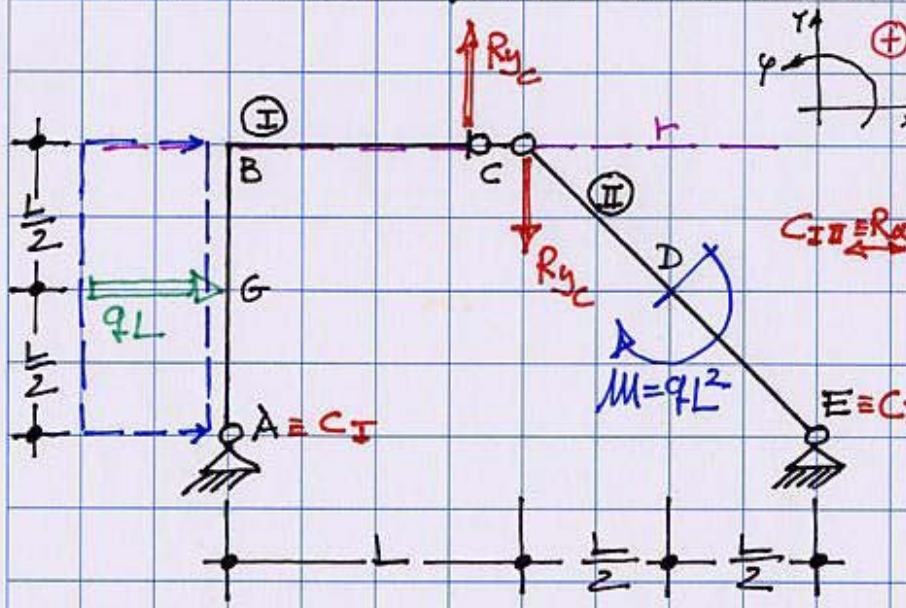
(*) Il verso effettivo di R_{y_A} è opposto a quello ipotizzato! ES-CIN/20

• CALCOLO DI R_{yc}



1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo la cerniera interna C ($\mu=2$) con un pendolo interno ad asse orizzontale ($\mu=1$) e applicando in C la reazione interna mutua R_{yc} che si vuole valutare - Quest'ultima è assunta arbitrariamente ma di uguale modulo e verso opposto sui due tratti.

2. La reazione mutua incognita R_{yc} agente sui due corpi del sistema originario è infatti interpretabile, sulla catena cinematica così individuata, come un carico esterno autoequilibrato incognito - La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i corichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di R_{yc} -



• grado di labilità
 $f = 3N - \mu_t = 3 \times 2 - (2 + 1 + 2) = 1$

• Individuazione Centri Assoluti e Centri Relativi di rotazione.

CERNIERA A $\rightarrow C_I \equiv A$

CERNIERA E $\rightarrow C_{II} \equiv E$

PENDOLO C $\rightarrow C_{II} \in r$

$C_{II} \in r$ e deve essere allineato con C_I, C_{II} quindi

$C_{II} \equiv R_{oo}$

3. Le equazioni di equilibrio dei cinematici si hanno la forma generale $\underline{C}^T \underline{F} = \underline{0}$ con $\underline{C}^T :=$ matrice di equilibrio, $\underline{F} :=$ vettore dei carichi (i carichi distribuiti sono sostituiti da carichi

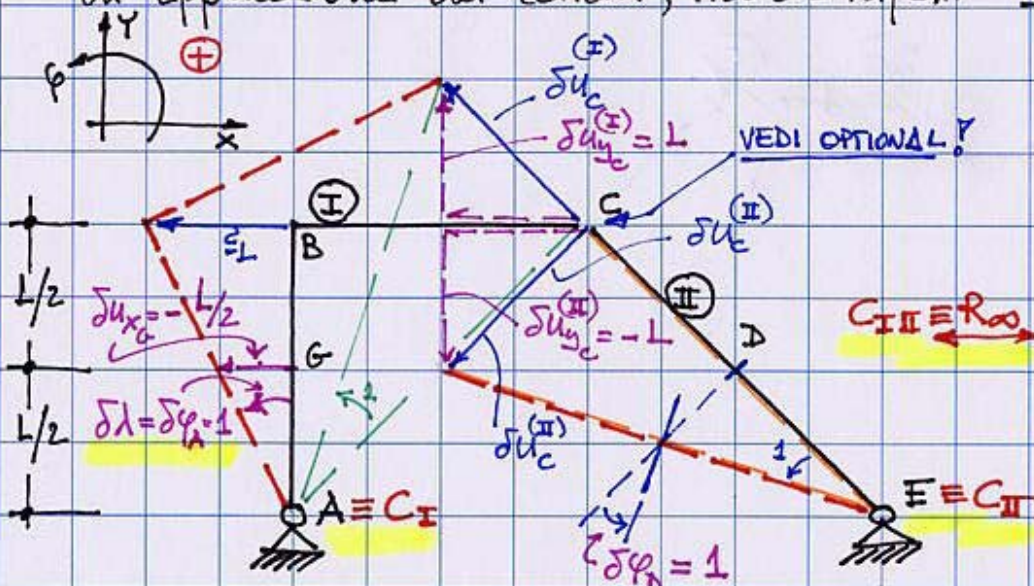
concentrati equivalenti). Nel caso in esame, essendo in presenza di una catena cinematica ($l=1$), il sistema $\underline{C}^T \underline{F} = 0$ si riduce all'equazione $\underline{C}^T \underline{F} = 0$ (la matrice di equilibrio è costituita da una sola riga ovvero \underline{C} , matrice di compatibilità, e costituita da una sola colonna).



4. Tenendo conto dei versi positivi individuati del riferimento generale e assumendo:



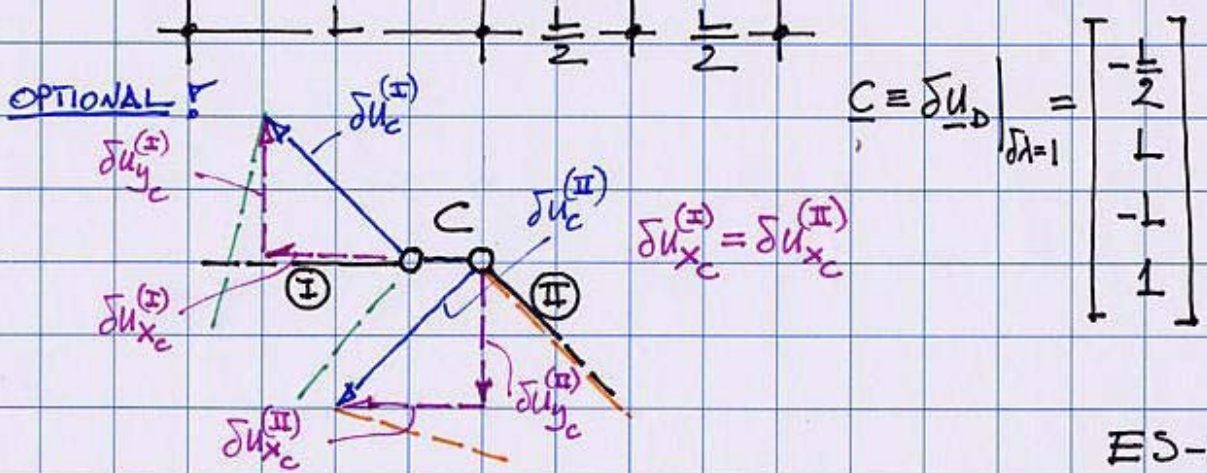
l'individuazione di \underline{C} (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta \lambda = \delta \varphi_A = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \delta \underline{u}_D |_{\delta \lambda = 1}$



REMARKS

#1 IN C SI HA UN PENDOLO AD ASSE ORIZZONTALE? TRASLAZIONE ORIZZONT. RELATIVA IMPEDITA?

#2 $C_{I II} \equiv R_{\infty}$ NO ROTAZIONI RELATIVE SOLO TRASLAZ. VERTICALE RELATIVA?



Si ha in definitiva:

$$\underline{C}^T \underline{F} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} & L & -L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ R_{y_c} \\ -R_{y_c} \\ -M \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{qL^2}{2} + R_{y_c}L + R_{y_c}L - M = 0$$

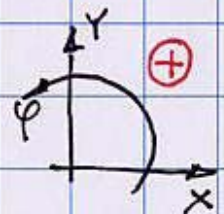
$$\boxed{R_{y_c} = \frac{3}{4} qL}$$

5. Allo stesso risultato si perviene se nella sezione C si considera lo spostamento relativo tra i due corpi, Δu_{y_c} , valutato per esempio da un osservatore solidale al corpo (I).

In questo caso assumendo:

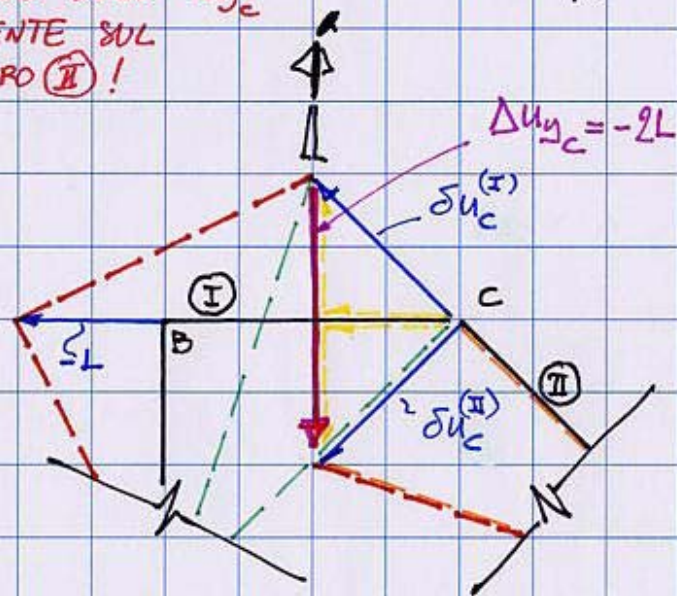
$$\delta \underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_G} \\ \Delta u_{y_c} \\ \delta \varphi_D \end{bmatrix}; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ -R_{y_c} \\ -M \end{bmatrix};$$

L'OSSERVATORE in (I)
"VEDE" SOLO R_{y_c}
AGENTE SUL
CORPO (II)!



con riferimento alla spostata prima individuata di cui si riporta solo la porzione di interesse, per $\delta d = 1$ si ha:

$$\underline{C} \equiv \left. \delta \underline{u}_D \right|_{\delta d=1} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} \\ -2L \\ 1 \end{bmatrix}$$



In definitiva si ottiene:

$$\begin{bmatrix} -\frac{L}{2} & -2L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ -R_{y_c} \\ -M \end{bmatrix} = 0$$

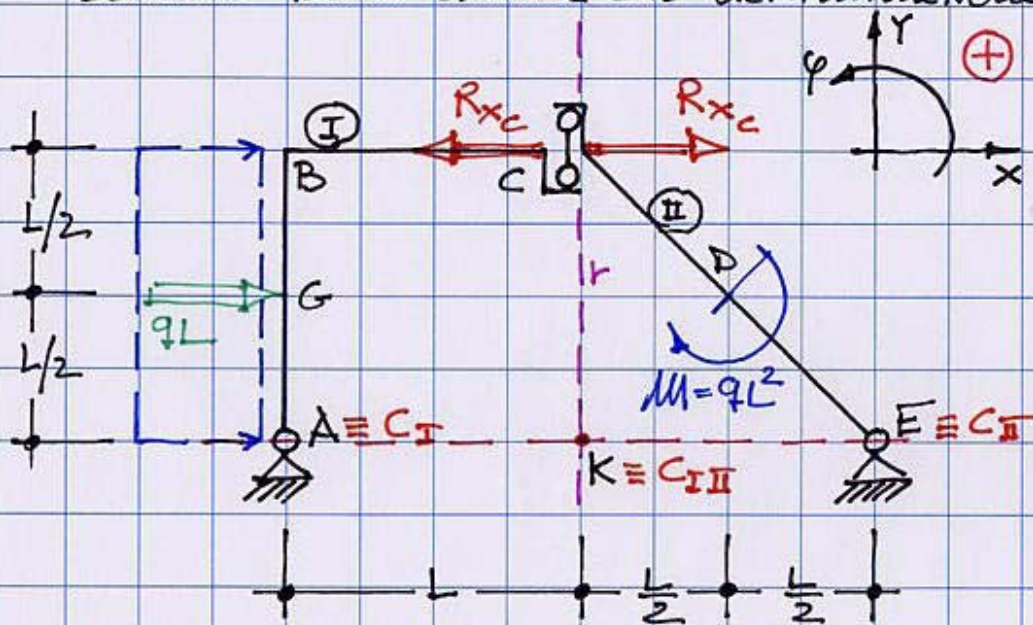
che fornisce la stessa equazione di equilibrio determinata in precedenza.

• CALCOLO DI R_{xc}



1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo la cerniera interna C ($\mu=2$) con un pendolo interno ad asse verticale ($\mu=1$) e applicando in C la reazione interna mutua R_{xc} che si vuole valutare. Quest'ultima è assunta arbitrariamente ma di uguale modulo e verso opposto sui due tratti.

2. La reazione mutua incognita R_{xc} agente sui due corpi del sistema originario è infatti interpretabile, sulla catena cinematica così individuata, come un carico esterno autoequilibrato incognito. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di R_{xc} .



• grado di labilità
 $l = 3N - \mu_e = 3 \times 2 - (2 + 1 + 2) = 1$

• Individuazioni
 Centri Assoluti e Relativo di Rotazione:

CERNIERA A $\rightarrow C_I \equiv A$

CERNIERA E $\rightarrow C_{II} \equiv E$

PENDOLO C $\rightarrow C_{III} \equiv C$

C_I e E deve essere allineato con C_I e C_{II} quindi $C_{III} \equiv K$

3. Le equazioni di equilibrio dei cinematici hanno la forma generale $\underline{C}^T \underline{F} = 0$ con $\underline{C}^T :=$ matrice di equilibrio, $\underline{F} :=$ vettore dei carichi (i carichi distribuiti sono sostituiti da carichi concentrati equivalenti). Nel caso in esame, essendo in presenza di una

catena cinematica ($l=1$), il sistema $\underline{C}^T \underline{F} = \underline{0}$ si riduce all'equazione $\underline{C}^T \underline{F} = \underline{0}$ (la matrice di equilibrio è costituita da una sola riga ovvero \underline{C} , matrice di compatibilità, è costituita da una sola colonna).

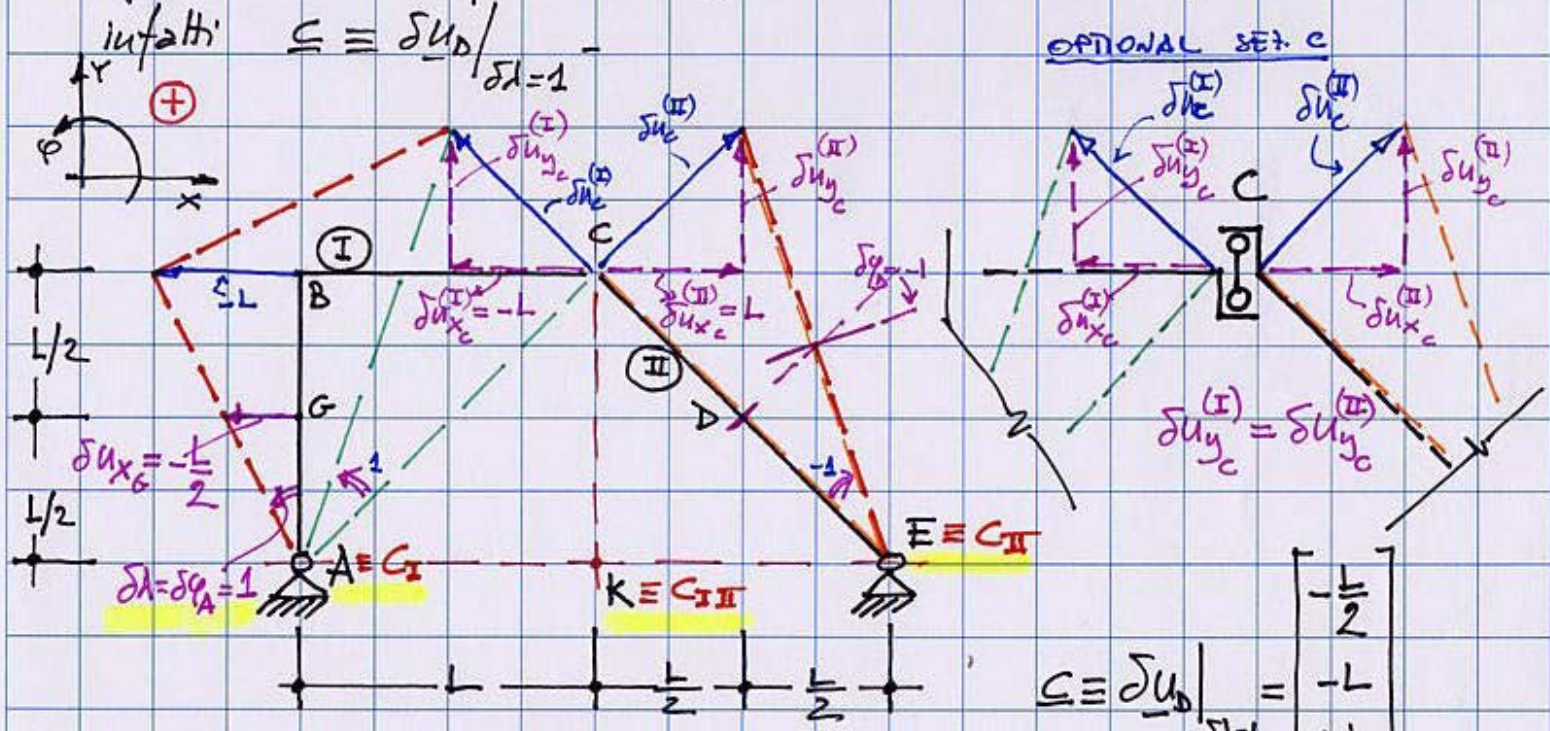


4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

$\delta l = \delta \varphi_A$; $\delta \underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_G} \\ \delta u_{x_C}^{(I)} \\ \delta u_{x_C}^{(II)} \\ \delta \varphi_D \end{bmatrix}$; $\underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ -R_{x_C} \\ R_{x_C} \\ -M \end{bmatrix}$

PARAMETRO LAGRANGIANO
 VETTORE SPORTEMENTI DEI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMPONENTI DI SPORTEMENTI NELLA DIREZIONE DEI CARICHI)
 SPOSTAMENTO ORIZZONTALE DELLA SET. C APPARTENENTE AL CORPO I
 SPOSTAMENTO ORIZZONTALE DELLA SET. C APPARTENENTE AL CORPO II
 VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME \underline{u}_D)
 R_{x_C} AGENTE SUL CORPO I
 R_{x_C} AGENTE SUL CORPO II

l'individuazione di \underline{C} (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta l = \delta \varphi_A = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \delta \underline{u}_D / \delta l = 1$



REMARK

IN C SI HA UN PENDOLO AD ASSE VERTICALE ∇
 NON SI HA QUINDI TRASLAZIONE VERTICALE RELATIVA $\Rightarrow \delta u_{y_C}^{(I)} = \delta u_{y_C}^{(II)}$

Si ha in definitiva:

$$\underline{C}^T \underline{F} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} & -L & L & -1 \\ \frac{qL}{2} & -R_{xc} & R_{xc} & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ -R_{xc} \\ R_{xc} \\ -M \end{bmatrix} = 0$$

$$-\frac{qL^2}{2} + R_{xc}L + R_{xc}L + M = 0 \rightarrow \boxed{R_{xc} = -\frac{qL}{4}} \quad (*)$$

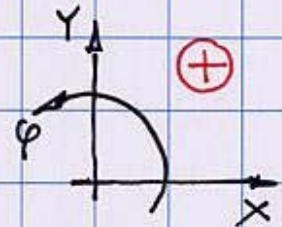
(*) Il verso effettivo di R_{xc} è opposto a quello ipotizzato!

5. Allo stesso risultato si perviene se nella sezione C si considera lo spostamento relativo tra i due corpi, Δu_{xc} , valutato per esempio da un osservatore solidale al corpo (I).

In questo caso assumendo:

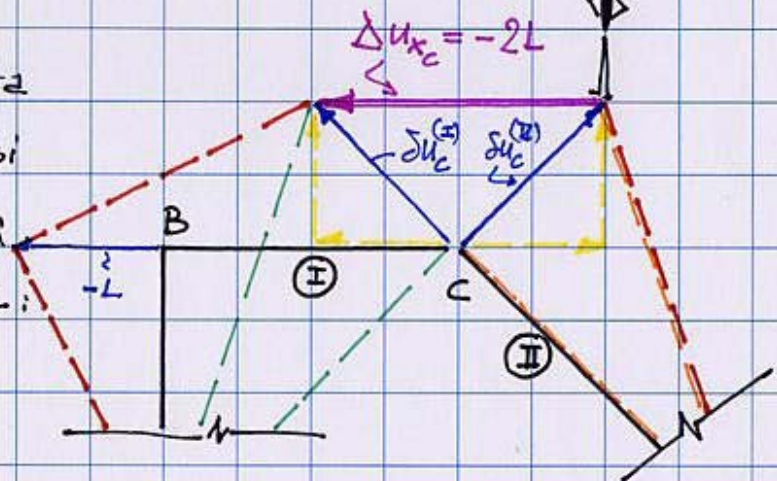
$$\underline{\delta u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{xc} \\ \Delta u_{xc} \\ \delta \varphi_D \end{bmatrix}; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ -R_{xc} \\ -M \end{bmatrix};$$

L'OSSERVATORE IN (I)
"VEDE" SOLO R_{xc}
AGENTE SU (I)!



con riferimento alla spostata prima individuata di cui si riporta solo la porzione di interesse, per $\delta \lambda = 1$ si ha:

$$\underline{C} \equiv \left. \underline{\delta u}_D \right|_{\delta \lambda = 1} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} \\ -2L \\ -1 \end{bmatrix}$$



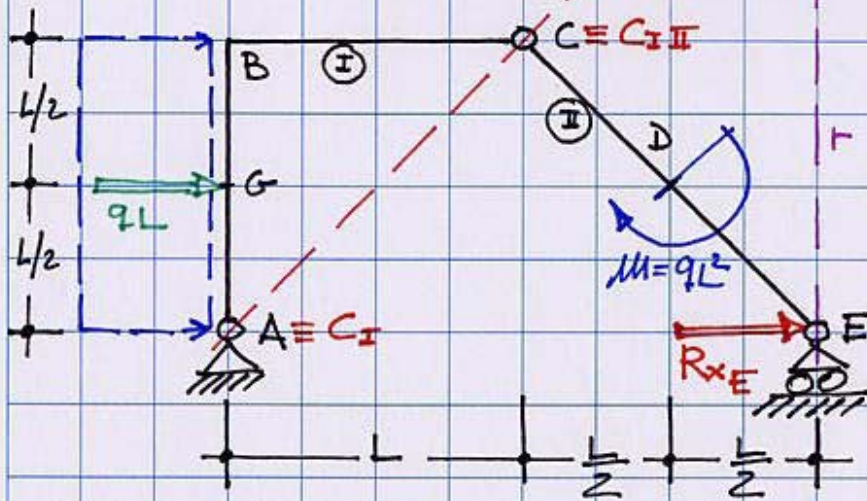
$$\text{In definitiva si ottiene: } \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} & -2L & -1 \\ \frac{qL}{2} & -R_{xc} & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ -R_{xc} \\ -M \end{bmatrix} = 0$$

che conduce alle stesse equazioni di equilibrio determinata in precedenza.

• CALCOLO DI R_{xE}



1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo la cerniera E ($\mu=2$) con un carrello a piano di scorrimento orizzontale ($\mu=1$) e applicando in E la componente di reazione incognita R_{xE} che si vuole valutare.
2. La reazione incognita R_{xE} del sistema originario è infatti interpretabile come un carico esterno incognito sulla catena cinematica così individuata. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di R_{xE} .



• grado di libertà
 $l = 3N - \mu_t = 3 \times 2 - (2 + 2 + 1) = 1$

• Individuazione Centri Assoluti e Relativo

CERNIERA A $\rightarrow C_I \equiv A$

CERNIERA C $\rightarrow C_{II} \equiv C$

CARRELLO E $\rightarrow C_{II} \equiv E$



$C_{II} \equiv E$ e deve essere allineato con C_I, C_{II} quindi $C_{II} \equiv k$

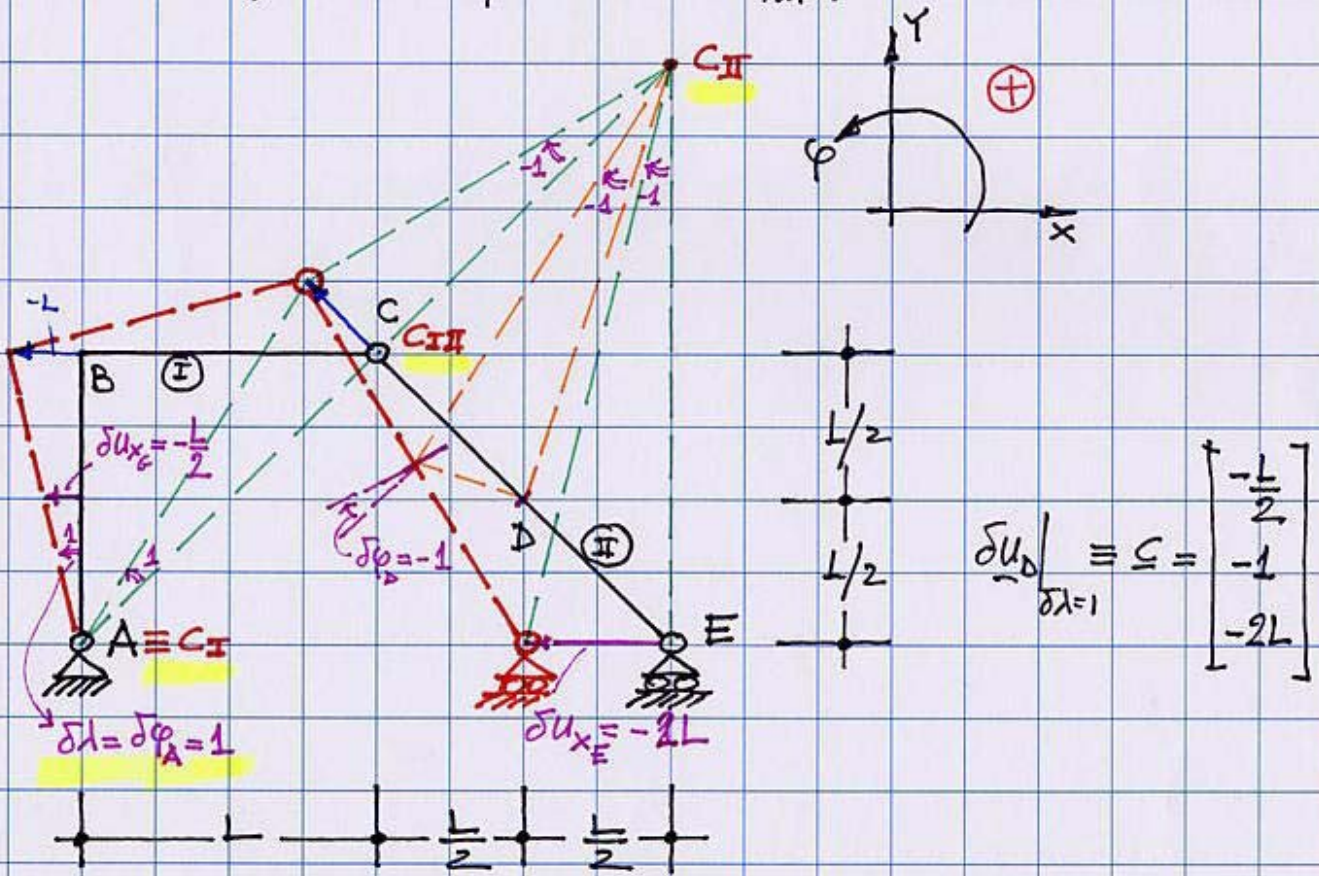
3. Le equazioni di equilibrio dei cinematici hanno la forma generale $\underline{C}^T \underline{F} = \underline{0}$ con $\underline{C}^T :=$ matrice di equilibrio, $\underline{F} :=$ vettore dei carichi (i carichi distribuiti sono sostituiti da carichi concentrati equivalenti). Nel caso in esame, essendo in presenza di una catena cinematica ($l=1$), il sistema $\underline{C}^T \underline{F} = \underline{0}$ si riduce all'equazione $\underline{C}^T \underline{F} = 0$ (la matrice di

equilibrio è costituita da una sola riga ovvero \underline{c} , (matrice di compatibilità, è costituita da una sola colonna).

4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

$\delta \lambda = \delta \varphi_A$; $\delta u_D = \begin{bmatrix} \delta u_{x_D} \\ \delta \varphi_D \\ \delta u_{x_E} \end{bmatrix}$; $\underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ -M \\ R_{x_E} \end{bmatrix}$; **← VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZATO COME δu_D)**
PARAMETRO LAGRANGIANO ; **VETTORE SPOSTAMENTI DEI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMPONENTI DI SPOST. NELLA DIREZ. DEI CARICHI)**

l'individuazione di \underline{c} (unica colonna della matrice di compatibilità) può effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta \lambda = \delta \varphi_A = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{c} \equiv \delta u_D / \delta \lambda = 1$.



Si ha in definitiva:

$$\underline{c}^T \underline{F} = 0 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} & -1 & -2L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ -M \\ R_{x_E} \end{bmatrix} = 0$$

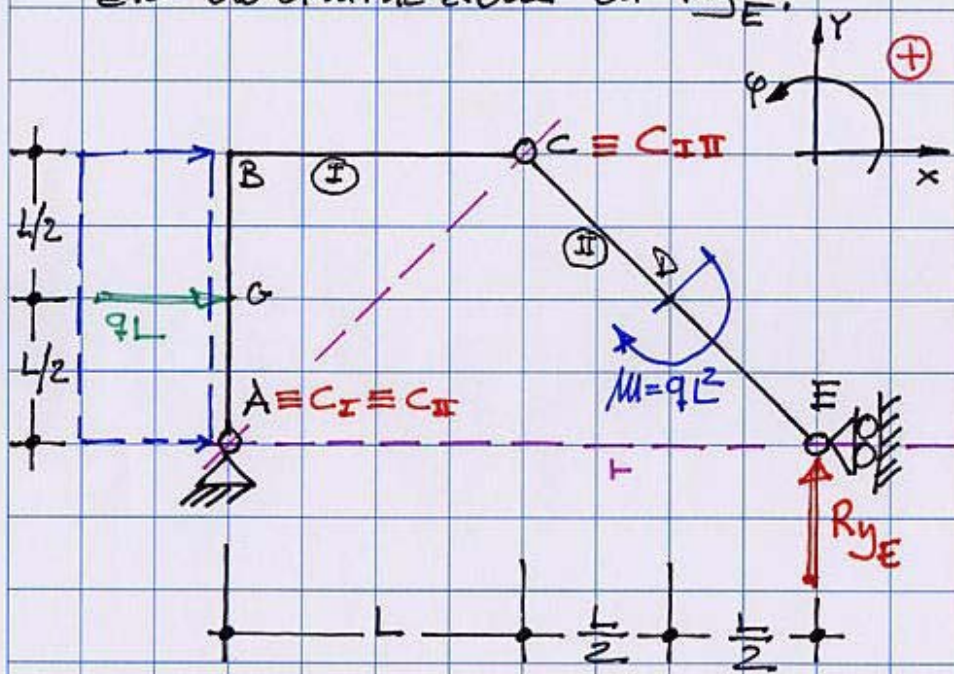
$$-\frac{qL^2}{2} + M - 2LR_{x_E} = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{R_{x_E} = \frac{qL}{4}}$$

CALCOLO DI R_{yE}



1. A tal fine è sufficiente considerare la catena cinematica ottenuta dal sistema isostatico originario sostituendo la cerniera E ($\mu=2$) con un carrello a piano di scorrimento verticale ($\mu=1$) e applicando in E la componente di reazione incognita R_{yE} che si vuole valutare.
2. La reazione incognita R_{yE} del sistema originario è infatti interpretabile come un carico esterno incognito sulla catena cinematica così individuata. La scrittura delle condizioni di equilibrio di tutti i carichi agenti sullo schema labile conduce alla determinazione di R_{yE} .



- grado di libertà
 $l = 3N - \mu_t = 3 \times 2 - (2 + 2 + 1) = 1$
- Indivisione
 Centri assoluti e relativo
 CERNIERA A $\rightarrow C_I \equiv A$
 CERNIERA C $\rightarrow C_{II} \equiv C$
 CARRELLO E $\rightarrow C_{III} \equiv E$

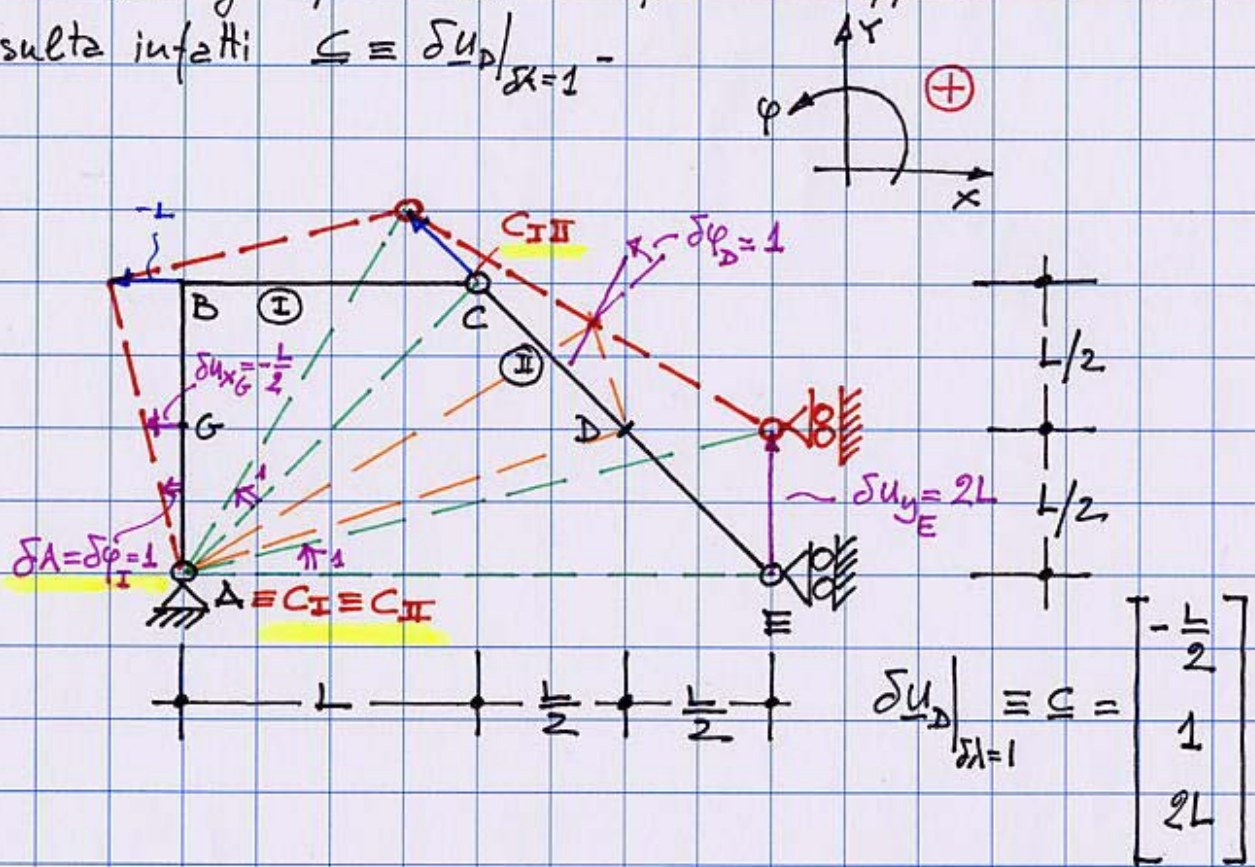
C_{III} e deve essere allineato con C_I e C_{II} quindi $C_{III} \equiv C_I \equiv A$

3. Vale quanto osservato ai punti 3. dei calcoli precedenti.
4. Tenendo conto dei versi positivi individuati dal riferimento generale e assumendo:

$\delta l = \delta \varphi_I$; $\delta \underline{u}_D = \begin{bmatrix} \delta u_{xG} \\ \delta \varphi_D \\ \delta u_{yE} \end{bmatrix}$; $\underline{F} = \begin{bmatrix} qL \\ -M \\ R_{yE} \end{bmatrix}$;

PARAMETRO LAGRANGIANO $\rightarrow \delta l = \delta \varphi_I$
 VETTORE SPOSTAMENTI DEI PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI (COMPONENTI DI SPOSTAMENTO NELLA DIREZIONE DEI CARICHI) $\rightarrow \delta \underline{u}_D$
 VETTORE DEI CARICHI (ORGANIZZAZIONE COME $\delta \underline{u}_D$) $\rightarrow \underline{F}$

l'individuazione di \underline{C} (unica colonna della matrice di compatibilit ) pu  effettuarsi considerando la spostata della catena cinematica ottenuta per $\delta l = \delta \varphi_I = 1$ e valutando gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi, risulta infatti $\underline{C} \equiv \delta u_D / \delta \lambda = 1$



Si ha in definitiva: $\underline{C}^T \underline{F} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -L/2 & 1 & 2L \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qL \\ -M \\ R_{yE} \end{bmatrix} = 0$

$-\frac{qL^2}{2} - M + 2LR_{yE} = 0 \rightarrow \boxed{R_{yE} = \frac{3qL}{4}}$

REAZIONI VINCOLARI DEL SISTEMA ISOSTATICO

