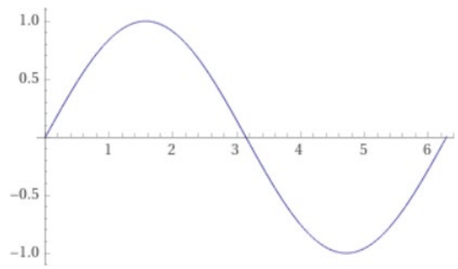
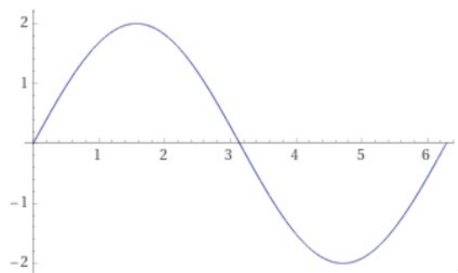
Richiami sulle funzioni goniometriche

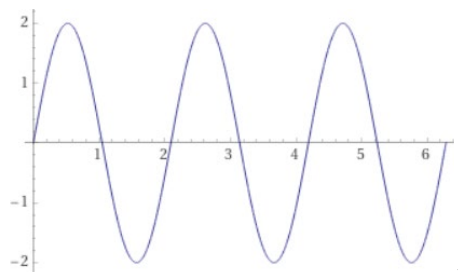
La funzione $y = \sin x$ é periodica di periodo 2π. Il suo minimo é -1, il massimo é 1. E per funzioni del tipo $y = A\sin(\alpha x)$, con $A, \alpha > 0$? Il periodo sarà $\dfrac{2\pi}{\alpha}$, il massimo sarà A, il minimo $-A$. vediamo ad esempio i grafici di $y = 2\sin x$ ($T = \pi$), $y = 2\sin 3x$ ($T = \dfrac{2\pi}{3}$), $y = \sin\left(\dfrac{x}{5}\right)$ ($T = 10\pi$).



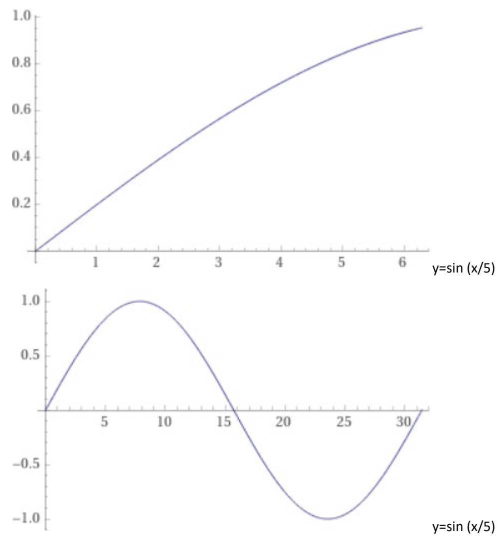
y=sin x



y=2sin x



y=2sin3x



SERIE DI FOURIER

Sia $A \subseteq R$ e $f : A \to R$ una funzione. Diciamo che f é periodica di periodo $T > 0$ se

- $x + T \in A \; \forall x \in A$
- $f(x + kT) = f(x) \; \forall x \in A, \; \forall k \in Z$.

Noi considereremo $f : R \to R$, L'andamento di f é completamente determinato, purché la si conosca on $[0, T[$ o in un qualsiasi intervallo di ampiezza T. Ogni funzione $f : [a, a + T[\to R$ si può prolungare con periodicità T a tutto R. Se due o più funzioni sono periodiche, il minimo periodo comune a tutte é il m.c.m. tra i periodi.

N.B. Una funzione periodica non é necessariamente continua. Sia $f : [0, 1[\to R$,

$f(t) = t$. Prolunghiamo f a tutto R, con $T = 1$ e otteniamo una funzione discontinua in tutti i punti del tipo $x_k = k,\ k \in Z$.
Se esiste $\int_0^T f(x)dx$ allora esiste $\int_a^{a+T} f(x)dx$ per ogni $a \in R$ e i due integrali coincidono.

ESEMPI IMPORTANTI
Consideriamo due successioni di funzioni $\varphi_{1,k}, \varphi_{2,k} : [0,T] \to R,\ k \in N,\ k \neq 0$ e $\varphi_{1,0} : [0,T] \to R$, definite da

$$\varphi_{1,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot t\right),\ \varphi_{2,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot t\right),$$

$$\varphi_{1,0}(t) = \sqrt{\frac{1}{T}},\ t \in [0,T]\,.$$

$\varphi_{1,k}$ e $\varphi_{2,k}$ hanno periodo $\frac{T}{k}$, quindi il periodo comune a tutte é T.
Valutiamo alcuni importanti integrali.

$$\int_0^T \varphi_{1,k}^2(t)dt = \int_0^T \frac{2}{T}\cos^2\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot t\right)dt = \quad \text{cambio di variabile } \tau = \frac{2\pi k}{T} \cdot t$$

$$= \frac{1}{k\pi}\int_0^{2k\pi} \cos^2 \tau d\tau = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\tau + \sin\tau\cos\tau}{2}\right]_0^{2k\pi} = 1 \qquad dt = \frac{T}{2\pi k} \cdot d\tau \tag{1}$$

$$\int_0^T \varphi_{2,k}^2(t)dt = \int_0^T \frac{2}{T}\sin^2\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot t\right)dt = \quad \text{cambio di variabile } \tau = \frac{2\pi k}{T} \cdot t$$

$$= \frac{1}{k\pi}\int_0^{2k\pi} \sin^2 \tau d\tau = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\tau - \sin\tau\cos\tau}{2}\right]_0^{2k\pi} = 1\,. \qquad dt = \frac{T}{2\pi k} \cdot d\tau \tag{2}$$

$$\int_0^T \varphi_{1,0}^2(t)dt = \int_0^T \frac{1}{T}dt = 1\,. \tag{3}$$

Inoltre

$$\int_0^T \varphi_{1,k}(t)\varphi_{1,h}(t)dt = \int_0^T \varphi_{2,k}(t)\varphi_{2,h}(t)dt = 0 \quad \forall k,h \in N,\ k \neq h \tag{4}$$

e

$$\int_0^T \varphi_{1,k}(t)\varphi_{2,h}(t)dt = 0 \quad \forall k,h \in N\,. \tag{5}$$

Definizione 0.1. *Siano $a_0 \in R$, $\{a_n\}_{n\in N}$, $\{b_n\}_{n\in N}$ due successioni di numeri reali. Diciamo polinomio trigonometrico di ordine n il polinomio:*

$$Q_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right)\,. \tag{6}$$

Definizione 0.2. *Siano $a_0 \in R$, $\{a_n\}_{n\in N}$, $\{b_n\}_{n\in N}$ due successioni di numeri reali. Diciamo serie di Fourier di coefficienti a_0, a_n, b_n la serie:*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right)\,. \tag{7}$$

La ridotta $n-$sima della serie (che coincide con $Q_n(x)$), ha periodo T. Se la serie converge in $x \in R$ allora posto $s(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$, s ha periodo T.

Teorema 0.3. *Se le serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ convergono assolutamente allra la serie di Fourier di coefficienti $a_0 \in R$, $\{a_k\}_{k\in N}$, $\{b_k\}_{k\in N}$ converge totalmente a $s(x)$.*

Corollario 0.4. *Nelle stesse ipotesi del Teorema 0.3, si ha*
(8)
$$\int_0^T s(x)dx = a_0 T,\ \int_0^T s(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx = \frac{T}{2}\cdot a_k,\ \int_0^T s(x)\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx = \frac{T}{2}\cdot b_k\,.$$

Occupiamoci del problema seguente: data una funzione periodica, sotto quali condizioni é possibile costruire una serie di Fourier avente lo stesso periodo di f e che relazione c'é tra la f e l'eventuale somma della serie?
Considereremo funzioni $f : [0, T[\to R$ tali che $\int_0^T f^2(x)dx < \infty$. Ciò assicura che gli integrali $\int_0^T f(x)\varphi_{1,k}(x)dx, \int_0^T f(x)\varphi_{2,k}(x)dx$ abbiano senso.

Definizione 0.5. *Data $f : [0, T[\to R$, la serie di Fourier ad essa associata é*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right)\,,$$

con

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = \overline{f},\quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx, \tag{9}$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx\,.$$

E' una serie di funzioni, per cui per essa valgono tutti i teoremi sulle serie di funzioni. I coefficienti si ottengono a partire da una funzione f a quadrato integrabile. Questo non ci deve trarre in inganno e farci pensare a una convergenza puntuale garantita. **Non é detto che la serie di Fourier associata ad f converga puntualmente (in $[0, T[$ o in in suo sottoinsieme), e anche se converge, non é detto che la sua somma sia proprio $f(x)$.** Scriviamo

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right)$$

proprio per ricordare che sebbene i coefficienti siano ottenuti mediante integrali in cui interviene f, non é detto che la serie ottenuta converga puntualmente a f (nemmeno se f é continua!!). Si può Dimostrare che esistono funzioni continue, periodiche, che non convergono puntualmente in tutto R.

Teorema 0.6 (Convergenza in media di ordine due e identità di Parseval)**.** *Sia $f : [0, T[\to R$ tale che $\int_0^T f^2(x)dx < \infty$. Allora, detta S_k la ridotta $k-$sima della serie di Fourier associata ad f si ha*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T |f(x) - S_k(x)|^2 dx = 0\,, \tag{10}$$

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx = Ta_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)\,. \tag{11}$$

Definizione 0.7. *Una funzione $f : [0,T] \to R$, si dice regolare a tratti se*

- *é derivabile a tratti in $[0,T]$, ossia esistono al più un numero finito di punti, $x_1, \ldots, x_n \in [0,T]$ in cui f non é derivabile;*
- *esistono **finiti** $\lim_{h\to 0^+} f'(x_k+h) := f'_+(x_k)$ e $\lim_{h\to 0^-} f'(x_k+h) := f'_-(x_k)$ per ogni $k = 1 \ldots, n$.*

Una funzione regolare a tratti noon é necessariamente continua. La condizione sui limiti delle derivate garantisce che le eventuali discontinutà sono di prima specie. Una funzione regolare a tratti é somma, nei punti di continuità, della propria serie di Fourier. Tale affermazione è precisata dal seguente Teorema, che dà una condizione sufficiente per la convergenza puntuale della serie di Fourier.

Teorema 0.8 (di Dirichlet)**.** *Sia $f : [0,T] \to R$ T-periodica regolre a tratti. Allora, la serie di Fourier ad essa associata converge a*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \forall x \in [0,T[\,. \tag{12}$$

Nei punti di discontinuità di f la serie converge alla semisomma dei limiti destro e sinistro. Se f é anche continua la convergenza della serie a f è **totale** (quindi anche uniforme). Cosa possiamo dire sui coefficienti?
Consideriamo ora un diverso intervallo (per verificare eventuali simmetrie di f).

Proprietà 0.9. *Sia $f : \left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[\to R$.*
Se f é pari allora $b_k = 0$ per ogni $k \in N$. Inoltre:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)dx, \;\; a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx\,. \tag{13}$$

Se f é dispari allora $a_k = 0$ per ogni $k \in N$.Inoltre:

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx\,. \tag{14}$$

N.B. f può essere discontinua in $\frac{T}{2}$.
ESEMPIO
Sia $f : [-1,1[\to R$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{in } [-1,0[, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ +1 & \text{in }]0,1[. \end{cases}$$

Prolungare f con periodicità $T = 2$ in R e scrivere la serie di Fourier ad essa associata.
f é dispari, per cui $a_k = 0$ $\forall k \in N$. Notiamo che $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

$$b_k = \frac{4}{2}\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx = \frac{2}{k\pi}\left[-\cos(k\pi x)\right]_0^1 = \frac{2}{k\pi}[-\cos(k\pi)+1] = \frac{2}{k\pi}[1-(-1)^k] =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ se k é pari} \\ \dfrac{4}{k\pi} \text{ se } k \text{ é dispari.} \end{cases}$$

$b_{2k-1} = \dfrac{4}{(2k-1)\pi}, \; b_{2k} = 0 \; \forall k \in N$. La serie é

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)\pi x)\,.$$

N.B. $f(1) = -1$, ma $s(1) = 0$ perché $\dfrac{f_-(1) + f_+(1)}{2} = 1 - 1 = 0$.

Sia $a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\dfrac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\dfrac{2\pi k}{T} x\right)\right)$ una serie di Fourier. Poniamo $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \; k > 0$. Sia $\phi_k \in]-\pi, \pi]$ tale che $\cos\phi_k = \dfrac{a_k}{A_k}$, $\sin\phi_k = \dfrac{b_k}{A_k}$, $k > 0$. Allora

$a_k \cos\left(\dfrac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\dfrac{2\pi k}{T} x\right) = A_k \left(\cos\phi_k \cos\left(\dfrac{2\pi k}{T} x\right) + \sin\phi_k \sin\left(\dfrac{2\pi k}{T} x\right)\right) = A_k \cos\left(\dfrac{2\pi k}{T} x - \phi_k\right)$

e la serie si scrive

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x - \phi_k\right)\,.$$

Le successioni $\{|A_k|\}_{k \in N}$, $\{\phi_k\}_{k \in N}$ si chiamano rispettivamente ampiezza e spettro di fase. $A_1 \cos\left(\dfrac{2\pi}{T} x - \phi_1\right)$ si dice armonica fondamentale. Le altre armoniche danno contributi ia via minori (ricordate le condizioni necessarie per la convergenza di una serie). Se f é pari allora: $a_k > 0$ implica $\phi_k = 0$, $a_k < 0$ implica $\phi_k = \pi$. Se f é dispari allora: $b_k > 0$ implica $\phi_k = \dfrac{\pi}{2}$, $b_k < 0$ implica $\phi_k = -\dfrac{\pi}{2}$.

Proprietà 0.10. *Se* $g(x) = f(x) + c$ *allora*

$$g(x) \sim a_0 + c + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right)\right). \tag{15}$$

$$f(cx) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kc}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kc}{T} x\right)\right). \tag{16}$$

$f(cx)$ *ha periodo* $T_1 = \dfrac{T}{c}$.

ESERCIZI

1) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = x, \; x \in [0, 1[$. Calcolare $s(0)$. f ha una discontinuità di prima specie in $x = 0$. $a_0 = \overline{f} = \frac{1}{2}$. $f - \frac{1}{2}$ é dispari quindi $a_k = 0$ per ogni $k > 0$.

$$b_k = 2\int_0^1 x \sin(2k\pi x)dx = \left[-\frac{x}{k\pi}\cos(2k\pi x)\right]_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos(2k\pi x)dx = -\frac{1}{k\pi}.$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin(2k\pi x)\,.$$

2) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \in [-1, 0[\\ 1 \text{ se } x \in [0, 1[\end{cases}$. Calcolare $s(0)$.

$T = 2$, $f - \frac{1}{2}$ é dispari in $]-1, 1[\setminus\{0\}$, quindi $a_k = 0$ per ogni $k > 0$. $a_0 = \overline{f} = \frac{1}{2}$. f ha una discontinuità di prima specie in $x = -1$, $x = 0$. Usiamo (14)

$$b_k = \int_0^1 \sin(k\pi x)dx = \left[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi x)\right]_0^1 = \frac{1-(-1)^k}{k\pi} = \frac{1+(-1)^{k+1}}{k\pi}.$$

$b_k = 0$ se k é pari, $b_k = \frac{2}{k\pi}$ se k è dispari. Poniamo $k = 2h-1$, $h \geq 0$ in quest'utimo caso e otteniamo

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{1}{2h-1}\sin((2h-1)\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{h=1}^{+\infty}\frac{1}{2h-1}\cos\left[(2h-1)\pi x - \frac{\pi}{2}\right].$$

3) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = x^2, x \in [-1, 1[$. Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ e $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$.

4) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi[$. Calcolare $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$.

5) Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \in [-5, 0[\\ 2 \text{ se } x \in [0, 5[\end{cases}$.