APPENDICE

COMPONENTI SIMMETRICHE
DI UNA TERNA DISSIMMETRICA DI VETTORI

Scomposizione di una terna dissimmetrica di vettori

Una terna dissimmetrica di vettori è univocamente scomponibile in tre terne simmetriche di vettori: una terna simmetrica *diretta*, una terna simmetrica *inversa* e una terna *omeopolare*.
In altri termini, assegnata una terna dissimmetrica di vettori $\overline{A}_a$, $\overline{A}_b$, $\overline{A}_c$ o più compendiosamente $S(\overline{A}_a)$, sono univocamente determinate le seguenti terne:

$$(\overline{A}_{a1}, \overline{A}_{b1}, \overline{A}_{c1}) = (\overline{A}_{a1}, \alpha^2\overline{A}_{a1}, \alpha\overline{A}_{a1}) = S(\overline{A}_{a1}) \quad \text{(terna simmetrica diretta)}$$

$$(\overline{A}_{a2}, \overline{A}_{b2}, \overline{A}_{c2}) = (\overline{A}_{a2}, \alpha\overline{A}_{a2}, \alpha^2\overline{A}_{a2}) = S(\overline{A}_{a2}) \quad \text{(terna simmetrica inversa)}$$

$$(\overline{A}_{a0}, \overline{A}_{b0}, \overline{A}_{c0}) = (\overline{A}_{a0}, \overline{A}_{a0}, \overline{A}_{a0}) = S(\overline{A}_{a0}) \quad \text{(terna omopolare)}$$

che soddisfano alla relazione:

$$S(\overline{A}_a) = S(\overline{A}_{a1}) + S(\overline{A}_{a2}) + S(\overline{A}_{a0}). \tag{A1}$$

In base alla definizione di somma di terne di vettori, dalla (A1) si ha:

$$\overline{A}_a = \overline{A}_{a1} + \overline{A}_{a2} + \overline{A}_{a0}$$

$$\overline{A}_b = \alpha^2\,\overline{A}_{a1} + \alpha\,\overline{A}_{a2} + \overline{A}_{a0}$$

$$\overline{A}_c = \alpha\,\overline{A}_{a1} + \alpha^2\,\overline{A}_{a2} + \overline{A}_{a0}$$

o in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_a \\ \overline{A}_b \\ \overline{A}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{A}_{a0} \\ \overline{A}_{a1} \\ \overline{A}_{a2} \end{bmatrix} \tag{A2}$$

Dalle (A2) si ottiene:

$$
\begin{bmatrix} \overline{A}_{a0} \\ \overline{A}_{a1} \\ \overline{A}_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{A}_a \\ \overline{A}_b \\ \overline{A}_c \end{bmatrix} =
$$

$$
= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{A}_a \\ \overline{A}_b \\ \overline{A}_c \end{bmatrix} \qquad \text{(A3)}
$$

o in forma ordinaria:

$$\overline{A}_{a0} = 1/3\,(\overline{A}_a + \overline{A}_b + \overline{A}_c)$$

$$\overline{A}_{a1} = 1/3\,(\overline{A}_a + \alpha\ \overline{A}_b + \alpha^2\ \overline{A}_c)$$

$$\overline{A}_{a2} = 1/3\,(\overline{A}_a + \alpha^2\ \overline{A}_b + \alpha\ \overline{A}_c)$$

Risultano quindi determinati univocamente, in base alla terna assegnata, i vettori $\overline{A}_{a1}, \overline{A}_{a2}, \overline{A}_{a0}$ e con essi le terne componenti; inversamente, dati i tre vettori $\overline{A}_{a1}, \overline{A}_{a2}, \overline{A}_{a0}$, è univocamente determinata dalle (A2) la terna $\overline{A}_a$, $\overline{A}_b$, $\overline{A}_c$.

Le terne $S(\overline{A}_0)$, $S(\overline{A}_1)$, $S(\overline{A}_2)$ sono dette anche di sequenza zero, di sequenza positiva e di sequenza negativa del sistema dato.

Introducendo le sequenze positive, negative e zero che si indicano con S^1, S^2, S^0 e che sono definite da:

$$S^1 = (1, \alpha^2, \alpha)$$

$$S^2 = (1, \alpha, \alpha^2)$$

$$S^0 = (1, 1, 1)$$

si può scrivere:

$$S(\overline{A}_{a1}) = (\overline{A}_{a1}, \alpha^2 \overline{A}_{a1}, \alpha\ \overline{A}_{a1}) = (1, \alpha^2, \alpha)\overline{A}_{a1} = S^1 \overline{A}_{a1}$$

$$S(\overline{A}_{a2}) = (\overline{A}_{a2}, \alpha\ \overline{A}_{a2}, \alpha^2 \overline{A}_{a2}) = (1, \alpha, \alpha^2)\overline{A}_{a2} = S^2 \overline{A}_{a2}$$

$$S(\overline{A}_{a0}) = (\overline{A}_{a0}, \overline{A}_{a0}, \overline{A}_{a0}) = (1,1,1)\overline{A}_{a1} = S^0 \overline{A}_{a0}$$

per cui la (A1) diventa:

$$S(\overline{A}) = S^1 \overline{A}_{a1} + S^2 \overline{A}_{a2} + S^0 \overline{A}_{a0}. \qquad \text{(A4)}$$

Le considerazioni svolte sulla scomposizione di una terna dissimmetrica di vettori si estendono a una terna dissimmetrica di impedenze $\dot{Z}_a$, $\dot{Z}_b$, $\dot{Z}_c$ essendo gli operatori complessi (impedenze o ammettenze) rappresentabili con dei vettori nel piano complesso.

Da notare che le normali terne di impedenze sono costituite da tre operatori $\dot{Z}$ uguali, sono cioè terne omopolari.

Impedenze alle sequenze

Si considerino tre impedenze dissimmetriche $\dot{Z}_a$, $\dot{Z}_b$, $\dot{Z}_c$ connesse a stella ed un neutro, come mostrato dalla fig. A1.

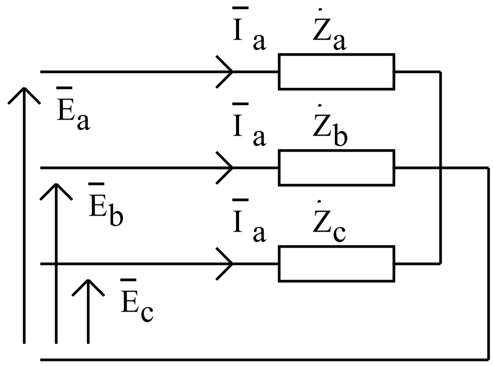

Fig. A1

Tra la terna di cadute di tensioni $S(\bar{E}_a)$ e la terna di correnti $S(\bar{I}_a)$, per la legge di Ohm generalizzata, sussiste la relazione:

$$S(\bar{E}_a) = S(\dot{Z}_a) \times S(\bar{I}_a) \cdot$$

Esprimendo le terne $S(\dot{Z}_a)$, $S(\bar{I}_a)$ e $S(\bar{E}_a)$ mediante la (A4), sviluppando il prodotto a secondo membro e confrontando infine tra loro i due membri si ottiene:

$$S^0\bar{E}_{a0} = S^0 \dot{Z}_{a0} S^0\bar{I}_{a0} + S^2 \dot{Z}_{a2} S^1\bar{I}_{a1} + S^1 \dot{Z}_{a1} S^2\bar{I}_{a2} = S^0(\dot{Z}_{a0}\bar{I}_{a0} + \dot{Z}_{a2}\bar{I}_{a1} + \dot{Z}_{a1}\bar{I}_{a2})$$

$$S^1\bar{E}_{a1} = S^1 \dot{Z}_{a1} S^0\bar{I}_{a0} + S^0 \dot{Z}_{a0} S^1\bar{I}_{a1} + S^2 \dot{Z}_{a2} S^2\bar{I}_{a2} = S^1(\dot{Z}_{a1}\bar{I}_{a0} + \dot{Z}_{a0}\bar{I}_{a1} + \dot{Z}_{a2}\bar{I}_{a2}) \quad (A5)$$

$$S^2\bar{E}_{a2} = S^2 \dot{Z}_{a2} S^0\bar{I}_{a0} + S^1 \dot{Z}_{a1} S^1\bar{I}_{a1} + S^0 \dot{Z}_{a0} S^2\bar{I}_{a2} = S^2(\dot{Z}_{a2}\bar{I}_{a0} + \dot{Z}_{a1}\bar{I}_{a1} + \dot{Z}_{a0}\bar{I}_{a2}) \cdot$$

Queste relazioni mostrano che, in generale, in una rete non simmetrica ogni sequenza di corrente dà luogo a cadute di tensioni di tutte e tre le sequenze.

Nel caso invece che:

$$\dot{Z}_a = \dot{Z}_b = \dot{Z}_c = \dot{Z}$$

si ha per le (A3):

$$\dot{Z}_{a0} = \dot{Z} \qquad \dot{Z}_{a1} = 0 \qquad \dot{Z}_{a2} = 0 ,$$

per cui le (A5) si riducono a:

$$S^0\overline{E}_{a0} = S^0\dot{Z}_{a0}S^0\bar{I}_{a0} = S^0\dot{Z}_{a0}\bar{I}_{a0}$$

$$S^1\overline{E}_{a1} = S^0\dot{Z}_{a0}S^1\bar{I}_{a1} = S^1\dot{Z}_{a0}\bar{I}_{a1} \tag{A6}$$

$$S^2\overline{E}_{a2} = S^0\dot{Z}_{a0}S^2\bar{I}_{a2} = S^2\dot{Z}_{a0}\bar{I}_{a2}.$$

Queste relazioni mostrano che, in generale, in una rete simmetrica ogni sequenza di corrente dà luogo solo a cadute di tensione della stessa sequenza.

I rispettivi rapporti si definiscono impedenze alle correnti di sequenza zero, impedenze alle correnti di sequenza positiva e impedenze alle correnti di sequenza negativa o più compendiosamente impedenze alla sequenza zero, impedenze alla sequenza positiva e impedenze alla sequenza negativa e si indicano con $S^0\dot{Z}_0$, $S^0\dot{Z}_1$ e $S^0\dot{Z}_2$ rispettivamente:

$$\frac{S^0\overline{E}_{a0}}{S^0\bar{I}_{a0}} = S^0\dot{Z}_{a0} = S^0\dot{Z}_0$$

$$\frac{S^1\overline{E}_{a1}}{S^1\bar{I}_{a1}} = S^0\dot{Z}_{a0} = S^0\dot{Z}_1$$

$$\frac{S^2\overline{E}_{a2}}{S^2\bar{I}_{a2}} = S^0\dot{Z}_{a0} = S^0\dot{Z}_2$$

Reti di sequenza

Si consideri una rete simmetrica. Poichè le cadute di tensione di ogni sequenza, come visto in precedenza, possono essere considerate separatamente, la somma delle cadute di tensione di una certa sequenza deve essere uguale alla somma delle f.e.m. di quella stessa sequenza. In virtù del principio di sovrapposizione, una rete trifase simmetrica può perciò essere considerata come la somma di tre reti indipendenti:

- la rete di sequenza diretta, formata dalla connessione delle $\dot{Z}_1$ dei vari elementi della rete data e nella quale agiscono solo le sorgenti di sequenza dirette;

- la rete di sequenza inversa, formata dalla connessione delle $\dot{Z}_2$ dei vari elementi della rete data e nella quale agiscono solo le sorgenti di sequenza inversa;

- la rete omopolare, formata dalla connessione delle $\dot{Z}_0$ dei vari elementi della rete data e nella quale agiscono solo le sorgenti omopolari.

Ogni rete di sequenza può essere risolta come un circuito monofase costituito da una delle tre fasi e da un conduttore di ritorno.