Compito di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Laurea Magistrale in Ingegneria Elettronica, Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica e dei Sistemi per le Telecomunicazioni

05/02/2018

Durata della prova: 2 ore e trenta minuti

1) Classificare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - \pi^2} + \frac{z}{\cos z} + e^{\frac{2}{z-3}}.$$

Calcolare l'integrale di $f(z)$ lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

2) Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\sin x} dx$$

3) Determinare il termine generale della successione definita per ricorrenza dalla legge

$$\begin{cases} a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \\ a_0 = 1,\ a_1 = 0 \end{cases}$$

4) In un negozio con un solo commesso arriva, in media, un cliente ogni 10 minuti secondo un processo di Poisson. I tempi di servizio hanno tutti la stessa distribuzione con un valor medio di 8 minuti e una varianza pari a 4.

a) Descrivere un modello di code che permetta di rappresentare il sistema.

b) Qual è la probabilità che non ci siano clienti nel negozio?

c) Quanti sono, in media, i clienti in attesa?

d) Quanto tempo, in media, un cliente deve rimanere nel negozio?

Svolgimento compito 05/02/2018

1) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2-\pi^2} + \frac{z}{\cos z} + e^{\frac{2}{z-3}}$

$f(z) : \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi, 3 \right\} \to \mathbb{C}$

$\lim_{z\to 3} f(z) = \nexists \Rightarrow z=3$ $\boxed{\text{singolarità essenziale}}$

$\lim_{z\to \pm\pi} \frac{\sin z}{z^2-\pi^2} + \frac{z}{\cos z} + e^{\frac{2}{z-3}} =$

$= -\pi + e^{\frac{2}{\pi-3}} + \lim_{z\to\pi} \frac{\sin z}{z^2-\pi^2} \overset{(H)}{=} e^{\frac{2}{\pi-3}} - \pi + \lim_{z\to\pi} \frac{\cos z}{2z} =$

$= \text{costante} \neq 0 \Rightarrow z=\pi$ $\boxed{\text{singolarità apparente}}$

Analogamente $z=-\pi$

$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} f(z) = \infty$

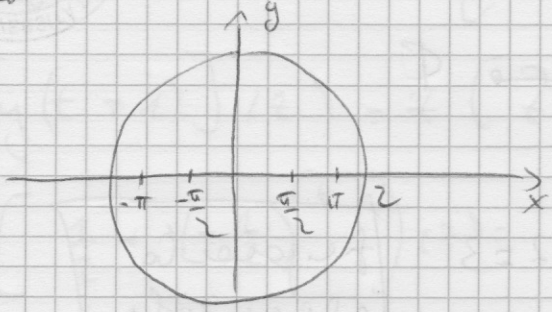
$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} f(z)\left(z-\frac{\pi}{2}-k\pi\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{z\left(z-\frac{\pi}{2}-k\pi\right)}{\cos z} =$

$= \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{z-\frac{\pi}{2}-k\pi}{\cos z} \overset{(H)}{=} \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{1}{-\sin z}$

$= -\frac{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)} = \operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} f(z)$

$z=\frac{\pi}{2}+k\pi, \ k\in\mathbb{Z}$ $\boxed{\text{poli di ordine 1}}$

$$\int_{+\gamma_2(0)} f(z)\,dz = 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-\pi} f(z) \right]$$



$\pm\frac{\pi}{2}$ interne

$\pm\pi$ interne

tutte le altre singolarità sono esterne.

$$\int_{+\gamma_2(0)} f(z)\,dz = 2\pi i \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = -2\pi^2 i$$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin x}\,dx$

$$\frac{1}{5+3\sin x} = \frac{1}{5+3\,\frac{e^{2ix}-1}{2ie^{ix}}} = \frac{1}{\frac{10ie^{ix}+3e^{2ix}-3}{2ie^{ix}}} =$$

$$= \frac{2ie^{ix}}{3e^{2ix}+10ie^{ix}-3}$$

Ponendo $z = e^{ix}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin x}\,dx = \int_{+\gamma_1(0)} \frac{2iz}{3z^2+10iz-3}\,\frac{1}{iz}\,dz =$$

$$= \int_{+\gamma_1(0)} \frac{2}{3z^2+10iz-3}\,dz =$$

$$3z^2+10iz-3=0$$

$$\frac{\Delta}{4} = -25+9 = -16$$

$$z = \frac{-5i \pm 4i}{3} = \begin{cases} -3i & \text{esterna a } T \\ -\frac{1}{3}i & \text{interna a } T \end{cases}$$

$$\int_{+\gamma_1(0)} \frac{2}{3z^2+10iz-3}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{3}i} \frac{2}{3z^2+10iz-3}$$

$z=-\frac{1}{3}i$ polo di ordine 1 per $\dfrac{2}{3z^2+10iz-3}$ per

la relazione tra zeri e poli. Quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin x}\,dx = \int_{+\gamma_1(0)} \frac{2}{3z^2+10iz-3}\,dz =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{2}{6z+10i}\right]_{z=-\frac{1}{3}i} = \frac{4\pi i}{8i} = \frac{\pi}{2}$$

3) $$\begin{cases} a_{n+2}+3a_{n+1}+2a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} \\ a_0=1, \quad a_1=0 \end{cases}$$

$y(t)=a_n$ per $t\in[n,n+1[$

$$\begin{cases} y(t+2)+3y(t+1)+2y(t) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{(-1)^{[t]}}{2} \\ y(t)=1 \text{ per } t\in[0,1[, \quad y(t)=0 \text{ per } t\in[1,2[\end{cases}$$

Trasformando la I equazione, ponendo $\mathcal{L}(y(t))(z)=Y$

$$\mathcal{Z}[y(t+2)](z) + 3\,\mathcal{Z}[y(t+1)](z) + 2Z = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{[t]}}{2}\right](z)$$

$$\mathcal{Z}[y(t+2)](z) = z^2\left[Z - e_0 - \frac{e_1}{z}\right] = z^2 Z - z^2$$

$$\mathcal{Z}[y(t+1)](z) = z\left(Z - e_0\right) = zZ - z$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{[t]}\right](z) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}(1)(z) + \mathcal{Z}\left(\left(-1\right)^{[t]}\right)(z)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-1} + \frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1}\right) =$$

$$= \frac{z^2 + z + z^2 - z}{2(z^2-1)} = \frac{z^2}{z^2-1}$$

Quindi

$$z^2 Z - z^2 + 3zZ - 3z + 2Z = \frac{z^2}{z^2-1}$$

$$Z(z^2+3z+2) = \frac{z^2}{z^2-1} + z^2 + 3z$$

$$Z = \frac{\cancel{z^2} + z^4 + 3z^3 - \cancel{z^2} - 3z}{(z^2+3z+2)(z^2-1)}$$

$$z^2+3z+2 = (z+2)(z+1)$$

$$Z = \frac{z^4 + 3z^3 - 3z}{(z+1)^2(z-1)(z+2)}$$

$$a_n = -\operatorname{Res}\left(\frac{z^{n+1}(z^4+3z^3-3z)}{(z+1)^2(z-1)(z+2)}, \infty\right) =$$

$$= \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^n(z^3+3z^2-3)}{(z+1)^2(z-1)(z+2)} + \operatorname*{Res}_{z=-2} \frac{z^n(z^3+3z^2-3)}{(z+1)^2(z-1)(z+2)} +$$

$$+ \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^n(z^3+3z^2-3)}{(z+1)^2(z-1)(z+2)}$$

$z=-1$ polo di ordine 2

$z=1$, $z=-2$) poli di ordine 1

Per le relazioni tra zeri e poli

$$= \frac{1}{\left[(z+1)^2(z+2)\right]_{z=1}} +$$

$$+ \frac{(-2)^n (}{\left[(z+1)^2(z-1)\right]_{z=-2}} + \lim_{z\to-1} D \frac{z^n(z^3+3z^2-3)}{(z-1)(z+2)} = \frac{z^n(z^3+3z^2-3)}{(2z\dots}$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{(-2)^n}{3} + \lim_{z\to-1} \frac{(z-1)(z+2)\left[nz^{n-1}(z^3+3z^2-3)+z^n(3z^2+6z)\right]+\dots}{(z-1)^2\ (z+2)^2}$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{(-2)^n}{3} + \frac{(-2n+5)(-1)^n}{4}$$

4) a) $M/G/1$

$\lambda = \frac{1}{10}$ /min

$\mu = \frac{1}{8}$ /min

$\rho = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} < 1$

$\sigma^2 = 4'$

b) $\pi_0 = 1-\rho = \frac{1}{5}$

c) $L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{16}{25}+\frac{4}{100}}{2/5} = \frac{17}{10}$

d) $W = W_q + 8' = \frac{L_q}{\lambda} + 8' = 17' + 8' = 25'$