Compito di Metodi Matematici per l'Ingegneria
Laurea Magistrale in Ingegneria Elettronica, Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica e dei Sistemi per le Telecomunicazioni
22/01/2018

Durata della prova: 2 ore e trenta minuti

1) Classificare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1 - \cos(2z)}{z^4} + \tan z.$$

Calcolare l'integrale di $f(z)$ lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorsa in senso antiorario.

2) Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx$$

3) Determinare il termine generale della successione definita per ricorrenza dalla legge

$$\begin{cases} 5a_{n+2} + 6a_{n+1} + a_n = (-1)^n \\ a_0 = 1,\ a_1 = -1 \end{cases}$$

4) Un negozio ha un solo commesso in grado di eseguire il servizio richiesto da ciascun cliente, in media, in 6 minuti. Nel negozio arriva, in media, un cliente ogni 10 minuti. Si assuma che gli arrivi siano poissoniani e che i tempi di servizio siano distribuiti esponenzialmente.

a) Descrivere un modello di code che permetta di rappresentare il sistema.

b) Qual è la probabilità che non ci siano clienti nel negozio?

c) Quanti sono, in media, i clienti nel negozio?

d) Quanto tempo, in media, un cliente deve rimanere in attesa?

e) Calcolare la probabilità che ci siano piu' di due clienti nel negozio.

Svolgimento compito 22/01/2018

1) $f(z) = \dfrac{1-\cos(2z)}{z^4} + \operatorname{tg} z$

$f : \mathbb{C} \setminus \left\{ 0, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos(2z)}{z^4} \overset{(H)}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2z)\cdot 2}{4z^3}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\cos(2z)\cdot 4}{12 z^2} = \infty$$

$z=0$ polo

$$\lim_{z\to 0} \left(\operatorname{tg} z + \frac{1-\cos(2z)}{z^4}\right)\cdot z^2 = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos(2z)}{z^2} \overset{(H)}{=}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2z)\cdot 2}{2z} = 2 \Rightarrow \boxed{z=0 \text{ polo di ordine } 2}$$

$\lim\limits_{z\to \frac{\pi}{2}+k\pi} f(z) = \infty$ $\qquad z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ poli

$$\lim_{z\to \frac{\pi}{2}+k\pi} f(z)\left(z - \frac{\pi}{2} - k\pi\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \operatorname{tg} z \left(z - \frac{\pi}{2} - k\pi\right) =$$

$$= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}\left(z - \frac{\pi}{2} - k\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{1}{-\operatorname{sen} z} =$$

$= -1 =$ $\qquad z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ poli di ordine 1

$= \operatorname*{Res}_{z=\pi/2+k\pi} f(z)$

$$\int_{+\gamma(0)_1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \quad \text{poiché} \operatorname*{Res}_{z=0} tg\, z = 0$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} D\, \frac{1-\cos(2z)}{z^2} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{2\sin(2z)\, z^2 - 2z\,(1-\cos 2z)}{z^4} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{2z\sin(2z) - 2 + 2\cos(2z)}{z^3} = \frac{0}{0} \overset{(H)}{=}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{2\sin(2z) + 4z\cos(2z) - 4\sin(2z)}{3z^2} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin(2z) + 4z\cos(2z)}{3z^2} = \frac{0}{0} \overset{(H)}{=}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{-4\cancel{\cos(2z)} + \cancel{4\cos(2z)} - 8z\sin(2z)}{6z}$$

$$= 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1}\, dx =$$

grad $B(x) = 4 \geq$ grad $B(x) + 1 = 2$

$$f(z) = \frac{z\, e^{iz}}{z^4+1}$$

Le singolarità di $f(z)$ sono le $\sqrt[4]{-1}$

$$-1 = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi)$$

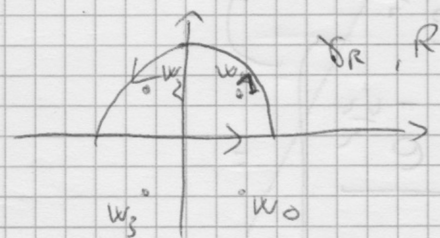
$$w_k = \cos\left\{\frac{-\pi+2k\pi}{4}\right. + i \sin \frac{-\pi+2k\pi}{4} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$w_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = e^{-i\pi/4}$$

$$w_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = e^{i\pi/4}$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$w_3 = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = e^{i\frac{5}{4}\pi}$$



γ_R , $R > 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, \cancel{e^{ix}}}{x^4+1}\, dx = (\text{v.p.}) \int \frac{x\, e^{ix}}{x^4+1}\, dx =$$

$$= 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=w_1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=w_2} f(z) \right] - \lim_{R\to+\infty} \int_{+\gamma_R} f(z)\, dz$$

Grazie al Lemma di Jordan, poiché

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^4+1} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{+\gamma_R} e^{iz} \frac{z}{z^4+1}\, dz = 0.$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^4+1}\, dx = 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/4}} f(z) + \operatorname{Res}_{z=e^{i\frac{3}{4}\pi}} f(z) \right] =$$

$$= 2\pi i \left(\left[\frac{\cancel{z}\, e^{iz}}{4\, z^{\cancel{3}\,2}} \right]_{z=e^{i\pi/4}} + \left[\frac{\cancel{z}\, e^{iz}}{4\, z^{\cancel{3}\,2}} \right]_{z=e^{i\frac{3}{4}\pi}} \right) =$$

$$= \frac{2\pi i}{4} \left(\frac{e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{e^{i\pi/2}} + \frac{e^{i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{e^{i\frac{3}{2}\pi}} \right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2} \left(\frac{e^{i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}}{i} - \frac{e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}}{i} \right) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(e^{i\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-i\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\cancel{\cos\frac{\sqrt{2}}{2}} + i \sin\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\cos\frac{\sqrt{2}}{2}} + i \sin\frac{\sqrt{2}}{2} \right] =$$

$$= \pi i\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi l'integrale di partenza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^4+1}\, dx = \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^4+1}\, dx \right\} = \pi\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) $\begin{cases} 5a_{n+2} + 6a_{n+1} + a_n = (-1)^n \\ a_0 = 1 \; ; \; a_1 = -1 \end{cases}$

Ponendo $y(t) = a_n$ per $t \in [n, n+1[$

$$\begin{cases} 5\, y(t+2) + 6\, y(t+1) + y(t) = (-1)^{[t]} \\ y(t) = 1 \quad t \in [0,1[, \quad y(t) = -1 \quad \text{per } t \in [1,2[\end{cases}$$

Passando alla trasformata Z, poniamo $Z(y(t))(z) = \mathcal{Z}$ e applichiamo le proprietà dell'anticipo:

$$Z[y(t+2)](z) = z^2 \left[\mathcal{Z} - a_0 - \frac{a_1}{z} \right] = z^2 \mathcal{Z} - z^2 + z$$

$$Z[y(t+1)](z) = z(\mathcal{Z} - a_0) = z\mathcal{Z} - z$$

$$Z\left[(-1)^{[t]}\right](z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^n = \frac{z}{z+1} \qquad |z|>1$$

Quindi

$$5z^2\mathcal{Z} - 5z^2 + 5z + 6z\mathcal{Z} - 6z + \mathcal{Z} = \frac{z}{z+1}$$

$$\mathcal{Z}(5z^2 + 6z + 1) = \frac{z}{z+1} + 5z^2 + z$$

$$\mathcal{Z} = \frac{z + 5z^3 + z^2 + 5z^2 + z}{(z+1)(5z^2 + 6z + 1)}$$

$$\mathcal{Z} = \frac{z\,(5z^2 + 6z + 2)}{(z+1)\,(5z^2 + 6z + 1)}$$

$$a_n = -\operatorname{Res}\left(\frac{z^n (5z^2 + 6z + 2)}{(z+1)(5z^2 + 6z + 1)}, \infty \right)$$

(V)

$$5z^2+6z+1=0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9-5=4 \qquad z = \frac{-3\mp 2}{5} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$a_n = \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{5}} \frac{z^n(5z^2+6z+2)}{5(z+1)^2\left(z+\frac{1}{5}\right)} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{z^n(5z^2+6z+2)}{5(z+1)^2\left(z+\frac{1}{5}\right)}$$

$z=-\frac{1}{5}$ polo di ordine 1
$z=-1$ polo di ordine 2 $\Big\}$ per la relazione tra zeri e poli

$$a_n = \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{1}{5}-\frac{6}{5}+2\right)}{5\left[(z+1)^2\right]_{z=-\frac{1}{5}}} + \frac{1}{5}\lim_{z\to -1} D\, \frac{z^n(5z^2+6z+2)}{z+\frac{1}{5}}$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)^n \frac{\frac{1}{5}}{\frac{16}{25}5} + \frac{1}{5}\lim_{z\to -1} \frac{\left(nz^{n-1}(5z^2+6z+2)+z^n(10z+6)\right)\left(z+\frac{1}{5}\right) - z^n(5z^2+6z+2)}{\left(z+\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)^n \frac{5}{16} + \frac{1}{5}\,\frac{\left[n(-1)^{n-1}+(-1)^n(-4)\right]\left(-\frac{4}{5}\right) - (-1)^n}{\frac{16}{25}}$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)^n \frac{5}{16} + 5\,\frac{-\frac{4}{5}n(-1)^{n-1} + \frac{16}{5}(-1)^n - (-1)^n}{16} =$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)^n \frac{5}{16} + \frac{-4n(-1)^{n-1} + 11(-1)^n}{16}$$

4) a) M/M/1

$\lambda = \frac{1}{10}$ al minuto ; $\mu = \frac{1}{6}$ al minuto

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{5} < 1$

(v.1)

b) $\pi_0 = 1 - \rho = \frac{2}{5}$

c) $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{3/5}{2/5} = 3/2$

d) $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{3/2}{1/10} = 15'$

e) $\sum_{n=3}^{+\infty} \pi_n = 1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2 =$

$= 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2 =$

$= 1 - \frac{2}{5} - \frac{6}{25} - \frac{18}{125} = \frac{125 - 50 - 30 - 18}{125} =$

$= \frac{27}{125}$