UNIONE EUROPEA
Fondo Sociale Europeo

REGIONE CALABRIA
Dipartimento Cultura- Istruzione- Università- Ricerca-Innovazione Tecnologica- Alta Formazione

REPUBBLICA ITALIANA

POR FSE CALABRIA 2007-2013

ASSE IV Capitale Umano – Obiettivo Operativo H.2 *Migliorare l'integrazione tra i sistemi dell'istruzione, della formazione professionale, dell'Università e del lavoro*

PIANO REGIONALE DELLE RISORSE UMANE

PerCorsi di Potenziamento delle Competenze di Base 2009

DISPENSA DIDATTICA

"PROFILO SCIENTIFICO"

Settembre - Ottobre 2009

La transizione tra Scuola Superiore ed Università rappresenta uno dei momenti più importanti nel percorso formativo dei giovani studenti. L'impatto con il mondo universitario non è sempre facile, ed è quindi opportuno attuare adeguati interventi di supporto affinché si creino le migliori condizioni possibili per una tranquilla e proficua attività di formazione universitaria.

E' proprio in tal senso che il progetto *"PerCorsi di Potenziamento delle Competenze di Base 2009"*, frutto di attività sinergica fra la Regione Calabria ed il nostro Ateneo, prevede azioni originali di accompagnamento dei giovani in transizione, finalizzate a verificare e rafforzare le competenze di base tecnico-scientifiche, umanistiche e le capacità metodologiche e relazionali.

Si ha la consapevolezza che è anche attraverso l'attuazione di questo tipo di attività che possono essere eliminati, o quantomeno limitati, parte di quei fenomeni negativi che ostacolano l'efficace percorso universitario dei giovani studenti.

Dall'esperienza maturata con l'intervento già realizzato negli anni precedenti, è emersa la necessità di predisporre uno strumento didattico unico, che racchiuda i contenuti cardine delle discipline universitarie di base, sia con profilo scientifico che con profilo umanistico, trattate nei percorsi di potenziamento.

Tali "dispense", sono state redatte grazie alla professionalità di docenti della Mediterranea e di altri qualificatissimi esperti, che in breve tempo e con tanta passione le hanno realizzate, ben consapevoli della loro importanza. A loro il nostro sincero ringraziamento.

A tutte le ragazze ed i ragazzi che iniziano il loro percorso universitario vanno invece i nostri più affettuosi auguri.

Prof. Giuseppe Zimbalatti

Delegato di Ateneo per l'Orientamento
Responsabile Scientifico del Progetto

STRUMENTI DI BASE DELLA LOGICA E DELLA MATEMATICA

A cura di
prof. ssa Vittoria Bonanzinga, prof.ssa Gioia Failla, prof.ssa Loredana Sorrenti

Si dichiara che il presente elaborato è originale e che è stato predisposto in funzione dell'attività formativa relativa ai Percorsi di potenziamento delle competenze di base anno 2009.

PROGRAMMA DIDATTICO - PROFILO SCIENTIFICO

Modulo	Durata
Strumenti di base della logica e della matematica	50 ore
Italiano e comprensione verbale	20 ore
Informatica	20 ore
Chimica	30 ore
Fisica	30 ore
Metodologia dell'apprendimento	10 ore
TOTALE	160

Materia	STRUMENTI DI BASE DELLA LOGICA E DELLA MATEMATICA
Contenuti	**Algebra** Teoria degli insiemi. Nozione di insieme, simboli, rappresentazione; sottoinsieme, insieme delle parti. Operazioni tra insiemi:unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano; rappresentazione grafica. Elementi di logica matematica Le proposizioni logiche e i principi della logica. Operazioni nell'insieme delle proposizioni logiche; tavole di verità, La congiunzione e la disgiunzione, la negazione, quantificatori universale ed esistenziale. Calcolo letterale. I monomi, operazioni. I polinomi, operazioni; principio di indentità. Prodotti notevoli: il quadrato del binomio, del trinomio, il cubo del binomio, fattorizzazione di differenze di potenze. Divisione dei polinomi. Teorema del resto, regola di Ruffini. Scomposizione dei polinomi in fattori primi; mcm e MCD dei polinomi. Operazioni con le frazioni algebriche. Equazioni e disequazioni algebriche. Equazioni e disequazioni di I e II grado in un'incognita, sistemi lineari di equazioni, sistemi di disequazioni, equazioni e disequazioni fratte, equazioni e disequazioni irrazionali. Equazioni e disequazioni con l'uso del valore assoluto. Potenza con esponente reale di un numero reale positivo. Concetto di funzione. La funzione esponenziale e il suo grafico. Equazioni e disequazioni esponenziali. I logaritmi, proprietà. La funzione logaritmica e il suo grafico. Equazioni e disequazioni logaritmiche. **Geometria analitica** Coordinate cartesiane ortogonali. Distanza tra due punti. Coordinate del punto medio del segmento. Equazioni cartesiane della retta. Equazione parametrica della retta. Posizione reciproca tra due rette. Rette parallele e perpendicolari. Intersezione tra due rette. Retta per un punto. Retta per due punti. Traslazione degli assi. Le coniche. Equazione della circonferenza nella forma $(x-a)^2+(y-b)^2= r^2$. Equazioni della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole in posizioni canoniche. Iperbole equilatera. **Analisi Matematica** Le funzioni ad una variabile. Funzioni reali di variabile reale. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche. Funzioni composte. Invertibilità di una funzione. Funzione inversa.

	Rappresentazione analitica. Grafici delle funzioni elementari. Definizione e grafico delle funzioni potenza (ad esponente intero), radice, valore assoluto. **<u>Trigonometria</u>** Gli angoli e la loro :misura; conversione della misura di un angolo da gradi a radianti e viceversa, funzioni trigonometriche seno, coseno, tangente, e cotangente. Funzioni trigonometriche inverse. Relazioni trigonometriche fondamentali. Le funzioni per angoli di 30°, 45°, 60°. Angoli associati. Riduzione al primo quadrante. Equazioni e disequazioni goniometriche . Relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo. **<u>Calcolo combinatorio</u>** Disposizioni, permutazioni,combinazioni semplici. Il binomio di Newton.

Materia	**ITALIANO E COMPRENSIONE VERBALE**
Contenuti	Elementi di grammatica italiana L'analisi del testo Le differenze tra scritto, parlato e trasmesso; il rapporto tra stili diversi (lingua letteraria in prosa e in versi, lingua comune, linguaggi settoriali)

Materia	**INFORMATICA**
Contenuti	Elaborazione dell'informazione. Nozione di Problema e Algoritmo. Algebra di Boole. Nozione di Programma. Architettura dell'elaboratore. Hardware. Macchina di Von Neumann. CPU. Memorie. Bus. Dispositivi di Input/Output. Rappresentazione numerica dell'informazione. Rappresentazione in base diversa da 10 (cenni su base 2). Cenni alla rappresentazione di informazione testuale, grafica e sonora. Software. Sistemi Operativi: struttura e funzioni. Software applicativo. Reti di calcolatori: Internet. Cenni al protocollo TCP/IP e ai protocolli applicativi di Internet. Basi di Dati. Cenni a Modello concettuale e logico. Cenni a Modello relazionale. Cenni ai Linguaggi di Interrogazione e di Manipolazione dei Dati. Cenni a SQL (Data Definition Language e Query Language).

Materia	**CHIMICA**
Contenuti	**<u>Struttura della materia</u>** Conoscenza qualitativa della struttura di atomi e molecole. Nozioni elementari sui costituenti dell'atomo e sulla tavola periodica degli elementi. Distinzione tra composti formati da ioni e da molecole e relative caratteristiche fisiche. **<u>Simbologia chimica</u>** La Nomenclatura dei composti chimici. Conoscenza della simbologia chimica e delle formule e delle equazioni chimiche. **<u>Le Reazioni redox</u>** Il concetto di ossidazione e di riduzione. Il calcolo del numero di ossidazione. Il bilanciamento delle reazioni redox. **<u>La Stechiometria</u>** Il peso molecolare ed il peso equivalente. Il concetto di mole e sue applicazioni. Il concetto di equivalente e le sue applicazioni. Capacità di svolgere semplici

	calcoli stechiometrici. **<u>Equilibri in soluzione</u>** Definizione di sistemi acido-base e di pH. **<u>Chimica organica</u>** Struttura dei più semplici composti del carbonio

Materia	**FISICA**
Contenuti	**<u>Cinematica</u>** Introduzione e Vettori - Velocità e accelerazione - Moto in una dimensione – Moto in due dimensioni **<u>Dinamica</u>** Principi della dinamica. Lavoro ed Energia– Conservazione dell' energia meccanica - Quantità di moto - Conservazione della quantità di moto – Urti – Momento della forza –Momento angolare **<u>Fluidi</u>** Statica e dinamica dei fluidi - Legge di Stevino - Principio di Archimede – Principio di Pascal- Portata **<u>Termodinamica</u>** Temperatura ed equilibrio termico - Lavoro e Calore - Capacità termica e calore specifico - Primo Principio della Termodinamica - Gas ideali – Macchine termiche e frigorifere - Secondo Principio della Termodinamica **<u>Elettricità e magnetismo</u>** Legge di Coulomb – Campo elettrico – Potenziale elettrico – Intensità di corrente – Il campo magnetico – Forza di Lorentz – Forza magnetica su un filo percorso da corrente.

Materia	**METODOLOGIA DELL'APPRENDIMENTO**
Contenuti	Offrire un articolato percorso motivazionale di consapevolezza ed orientamento delle proprie capacità, al fine anche di prevenire i disagi di inserimento dell'allievo nel nuovo contesto universitario. Attraverso lo sviluppo di alcune competenze cognitive e trasversali quali: l'autoefficacia, la capacità di autoregolazione e monitoraggio; la percezione di sé, la capacità di adattamento, di decisione, di coping, di espressione: Cosa significa apprendere e cosa è un metodo Cosa e come apprendere I linguaggi del sapere (logico-matematico; fisico-sperimentale; giuridico-normativo; iconico - descrittivo; ecc.) Come "funziona" l'apprendimento: Il cervello e il processo cognitivo Intelligenza emotiva, razionale, creativa La forza delle motivazioni Difficoltà di apprendimento Gestione del tempo nell'apprendimento Organizzazione personale dello studio e l'orientamento agli obiettivi Apprendimento e stile decisionale Apprendimento, sussidi, strumenti, aiuti Apprendimento e alimentazione Apprendimento e comunicazione dell'appreso Tecniche di apprendimento e i metodi di studio (PQ4R; Cornell; ecc.)

Sommario

PREFAZIONE

Il presente corso "Strumenti di base della Logica e della Matematica" è rivolto agli studenti della Facoltà di Agraria e di Ingegneria, ma è anche adatto a studenti di altre facoltà scientifiche.
Esso scaturisce dall'esperienza maturata dagli autori, durante i precorsi di potenziamento delle competenze di base, chiamati comunemente di Azzeramento, tenuti presso l'Università Mediterranea di Reggio Calabria negli anni dal 1995 al 2008.
Il presente volume contiene una parte teorica, parecchi esempi ed esercizi svolti e commentati ed alcuni esercizi proposti con suggerimenti e soluzioni.
Ringraziamo in anticipo quanti, colleghi o studenti, vorranno fornire suggerimenti per ulteriori miglioramenti.
La Regione Calabria e l'Università Mediterranea di Reggio Calabria meritano uno speciale ringraziamento per il loro supporto generoso.

Nell'homepage: www.ing.unirc.it noi terremo aggiornata una lista delle correzioni.

Messina - Reggio Calabria, Agosto 2009. Gli autori

Capitolo 1

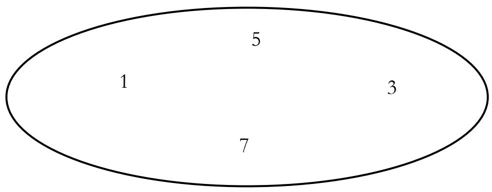
Teoria degli insiemi

1.1 Insiemi generici

Si assumeranno come primitive le nozioni di insieme e di elementi di un insieme, pertanto non viene fornita una definizione. In senso intuitivo ed in molte situazioni concrete, un *insieme* è una collezione di oggetti ben definiti, detti *elementi* dell'insieme.
Useremo le lettere latine minuscole dell'alfabeto per indicare gli oggetti (elementi) di un insieme *a, b, c, d* e le lettere maiuscole per indicare un insieme, ad esempio *A, B, C* sono tre insiemi. Per indicare gli elementi di un insieme utilizzeremo le parentesi graffe, ad esempio $\{a , b\}$ è l'insieme formato dagli elementi *a* e *b*. Per indicare che un elemento appartiene ad un insieme useremo il simbolo di appartenenza $\in$; $a \in A$ si legge "l'elemento *a* appartiene all'insieme *A*", mentre per indicare che l'elemento *b* non appartiene ad *A* scriveremo $b \notin A$. Diremo che due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi (l'ordine non conta). Ad esempio se $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 3, 2, 1, 4\}$, allora scriveremo $A = B$.

1.2 Rappresentazione di un insieme

- La *rappresentazione tabulare* si ottiene elencando gli oggetti entro parentesi graffe; esempio: $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$. È una rappresentazione che viene usata se l'insieme è composto da un numero abbastanza limitato di elementi.
- Possiamo anche rappresentare l'insieme enunciando una *proprietà caratteristica* che tiene "assieme" gli elementi: ad esempio posso caratterizzare l'insieme *A* formato dalle persone che sono nate a Reggio Calabria nell'anno 1991 e scriveremo *A* = { *persone / persone nate a Reggio Calabria nel 1991* }. È comoda da utilizzare quando gli elementi dell'insieme sono parecchi.
- *Rappresentazione mediante grafici, (grafici di Eulero-Venn).* Possiamo racchiudere gli oggetti che ci interessano entro una linea chiusa continua e non intrecciata.



Il simbolo Ø rappresenta l'insieme privo di elementi, è detto insieme vuoto e non è mai zero.

$$\{0\} \neq Ø, \qquad \{0\} \neq \{\ \}.$$

Sottoinsieme: definiamo *sottoinsieme* di un insieme dato, un nuovo insieme che abbia come elementi degli elementi presenti nell'insieme di partenza: ad esempio dato $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ l'insieme $B = \{ 1, 3 \}$ è un sottoinsieme dell'insieme *A* e scriveremo $B \subset A$ e si legge l'insieme *B* è contenuto nell'insieme A. Per indicare che *A* ha come sottoinsieme *B* useremo invece la notazione

$A \supset B$ che si legge anche dicendo che A è un sovrainsieme di B o che l'insieme A contiene l'insieme B. Per indicare che considero l'insieme di partenza, come sottoinsieme di se stesso, lo chiamerò *sottoinsieme improprio.* Siccome quando indicheremo genericamente un sottoinsieme di un insieme, potrebbe trattarsi anche dell'insieme improprio, allora per considerare anche questa possibilità, indicheremo che B è sottoinsieme di A in questo modo $B \subseteq A$ che si legge l'insieme B è contenuto o uguale all'insieme A.

- Se $B \subseteq A$ e $A \subseteq B$ allora $A=B$.
- L'insieme vuoto è sempre contenuto in ogni insieme: Ø $\subset A$.

L'insieme delle parti di A: *P(A)* è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di *A*. Se $A= \{ 1 , 2\}$ allora

$$P(A) = \{ \{ Ø \}, \{1\}, \{ 2 \}, \{ 1 , 2\} \}.$$

L'insieme vuoto e l'insieme stesso appartengono all'insieme delle parti.

1.3 Insiemi numerici

I primi insiemi che si incontrano in matematica sono quelli dei numeri; daremo qui una breve descrizione dei principali insiemi numerici.
Il primo insieme che prenderemo in esame è l'insieme dei numeri naturali. Esso si indica con la lettera $\mathbb{N}$ e i suoi elementi sono i numeri interi positivi, i primi numeri, storicamente, ad essere stati usati dall'umanità:

$$\mathbb{N} = \{ 1 , 2 , 3 , 4 . . . . .\}.$$

Naturalmente gli elementi di $\mathbb{N}$: 1 , 2 , 3 , 4 . . . sono infiniti.
In molti testi nei numeri naturali viene considerato anche lo 0, talvolta con la notazione:

$$\mathbb{N}_0 = \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \ldots\ldots\}.$$

Il secondo insieme che prenderemo in esame è quello dei numeri interi. Esso si indica con la lettera $\mathbb{Z}$ (dal tedesco ***Zahl*** = numero) ed i suoi elementi sono i numeri naturali, più i numeri negativi (interi):

$$\mathbb{Z} = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1 , 2 , 3 , 4 . . . . .\}.$$

Possiamo pensare a $\mathbb{Z}$ come ottenuto da $\mathbb{N}$ "aggiungendo" ad esso una "nuova copia" dei numeri 1, 2, 3, ... che però si distingue da quella precedente per quel segno "-" posto in fronte ad essi; possiamo pensarli come numeri "rossi" se ci immaginiamo un conto in banca: infatti il primo uso dei numeri negativi è quello di rappresentare dei debiti (già in papiri egizi si trovano numeri che hanno questo significato).
Per rendere sempre possibile (o quasi) l'operazione di divisione introduciamo un altro ampliamento dell'insieme dei numeri, e cioè l'insieme dei numeri razionali (dal latino *ratio* = rapporto). Esso viene indicato con il simbolo $\mathbb{Q}$, (iniziale di quoziente); intuitivamente gli elementi di $\mathbb{Q}$ sono le frazioni:

$$\mathbb{Q} = \{ ..., -3/4,..., -2,..., -1,..., -1/3,.., 0,...,1/2,...2/3,...1,...,3/2,...,2,...,15/7,...\}.$$

Abbiamo visto che la divisione è divenuta un'operazione possibile in $\mathbb{Q}$ (a parte l'impossibilità di dividere per 0). Consideriamo adesso un'altra operazione: l'estrazione di radice quadrata. Dato un elemento generico r appartenente a $\mathbb{Q}$, definiamo la radice quadrata di r:

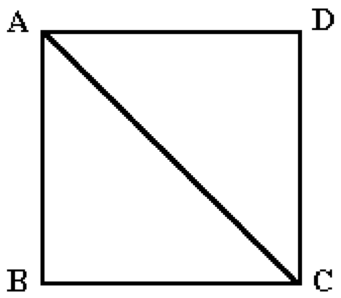
Definizione: Sia $r \in \mathbb{Q}$, un elemento $t \in \mathbb{Q}$ tale che $t^2 = r$ si dice radice quadrata di r, e si indica con $\sqrt{r}$.

Questa operazione non è sempre possibile; ad esempio si ha ovviamente che se $r < 0$, nessun numero $t \in \mathbb{Q}$ può soddisfare la relazione $t^2 = r$, poiché t^2 è comunque un numero positivo. Ma anche quando $r > 0$, non è detto esista $t \in \mathbb{Q}$ con $t^2 = r$.

Vediamolo nel caso di $r = 2$.

Non esiste nessun numero razionale, che elevato al quadrato dia 2 .

In un quadrato con un lato di lunghezza 1, se applichiamo il teorema di Pitagora per calcolare la lunghezza della sua diagonale non otteniamo un numero razionale.

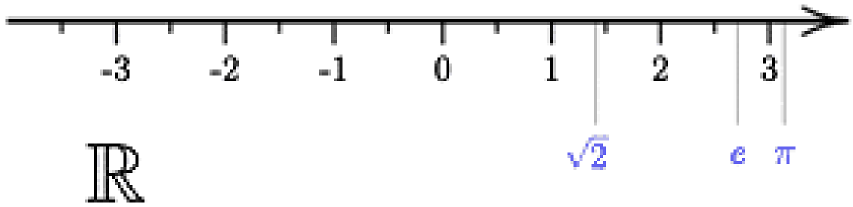


Infatti applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC, si ottiene $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$, ma $(AB)^2 + (BC)^2 = 1+ 1 = 2$, e quindi la misura di AC deve essere un numero che elevato al quadrato fa 2.

I numeri che non è possibile porre in forma di frazione si chiamano irrazionali: quindi $\sqrt{2}$ è il primo esempio di numero irrazionale; π che approssimiamo a 3,14, ma che ha infinite cifre dopo la virgola è un altro esempio notevole di numero irrazionale ed infine ricordiamo che anche e il numero di Nepero, base dei logaritmi neperiani è irrazionale.

Se estendiamo $\mathbb{Q}$ con gli irrazionali otteniamo il più importante insieme numerico, quello dei numeri reali, che indichiamo con $\mathbb{R}$.

Non è invece eseguibile in $\mathbb{R}$ la radice quadrata dei numeri negativi; infatti ogni numero reale elevato al quadrato risulta sempre positivo; un'espressione come $\sqrt{-1}$ non ha alcun senso in $\mathbb{R}$.
L'insieme dei numeri reali gode la proprietà di essere *ordinato*, ossia è sempre possibile stabilire quale tra due numeri reali è il più grande e di essere *denso,* ossia presi due numeri reali arbitrari è sempre possibile trovare un altro numero reale che sia tra loro compreso. Queste due proprietà permettono di rappresentare l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ su retta orientata, stabilendo una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta ed i numeri reali:



1.4 Intervalli

Alcuni sottoinsiemi dei numeri reali svolgono un ruolo fondamentale nello studio delle disequazioni e del dominio di una funzione, tali sottoinsiemi sono chiamati intervalli. Graficamente i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, possono essere riguardati come segmenti o semirette che giacciono sulla retta reale. Un intervallo è un sottoinsieme dei numeri reali formato da tutti i punti della retta reale che sono compresi tra due estremi a e b. Gli estremi possono appartenere all'intervallo e possono essere infiniti. Un segmento di estremi a e b, con $a<b$, *(*si legge a minore di *b),* corrisponde al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutti i numeri reali compresi fra a e b, che chiamiamo *intervallo limitato*. Una semiretta di origine a, corrisponde al sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutti i numeri reali minori o uguali ad a, oppure al sottoinsieme costituito da tutti i numeri reali maggiori o uguali ad a, sottoinsiemi che chiamiamo *intervalli illimitati*.
Gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono quindi gli insiemi seguenti (dove a e b sono due numeri reali tali che $a<b,$):
Intervalli limitati

$(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} | \ a < x < b \}$ (intervallo aperto)

$[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} | \ a \leq x \leq b \}$ (intervallo chiuso)

$[a,b) = \{ x \in \mathbb{R} | \ a \leq x < b \}$ (intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra)

$(a,b] = \{ x \in \mathbb{R} | \ a < x \leq b \}$ (intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra)

Intervalli illimitati

$(a,\infty) = \{ x \in \mathbb{R} | \ x > a \}$ (intervallo aperto infinito a destra)

$[a,\infty) = \{ x \in \mathbb{R} | \ x \geq a \}$ (intervallo chiuso infinito a destra)

$(-\infty,a) = \{ x \in \mathbb{R} | \ x < a \}$ (intervallo aperto infinito a sinistra)

$(-\infty,a] = \{ x \in \mathbb{R} | \ x \leq a \}$ (intervallo chiuso infinito a sinistra)

$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ (tutta la retta reale)

I punti a e b sono gli *estremi* dell'intervallo. Quindi una parentesi chiusa [ ] indica che l'estremo appartiene all'intervallo, mentre una parentesi aperta ( ) indica che non vi appartiene.

1.5 Operazioni tra insiemi

Unione: L'unione fra due insiemi è l'operazione che associa ai due insiemi, l'insieme i cui elementi appartengono al primo *oppure* al secondo insieme. Si indica come $A \cup B$ (si legge A unione B). Dati gli insiemi $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$ allora $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$, devo prendere tutti gli elementi che appartengono ad A *o* che appartengono a B.

L'intersezione fra due insiemi è l'operazione che associa ai due insiemi l'insieme i cui elementi appartengono contemporaneamente al primo *e* al secondo insieme. Si indica come $A \cap B$ (si legge

A intersezione *B*). Dati gli insiemi $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$ allora $A \cap B = \{ 3, 4\}$, devo prendere tutti gli elementi che appartengono ad *A e contemporaneamente* appartengono a *B*.

Proprietà:

commutativa

per l'unione $A\cup B= B\cup A$
per l'intersezione $A\cap B= B\cap A$

associativa

per l'unione $(A\cup B) \cup C= A\cup (B \cup C)$
per l'intersezione $(A\cap B) \cap C= A\cap (B \cap C)$

---

di idempotenza

per l'unione $A\cup A=A$
per l'intersezione: $A\cap A=A$

dell'insieme vuoto

per l'unione: $A\cup Ø = Ø \cup A = A$
per l'intersezione $A\cap Ø = Ø \cup A = Ø$

distributiva

dell'unione rispetto all'intersezione:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

dell'intersezione rispetto all'unione:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

---

di *assorbimento*

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

Differenza Si definisce *differenza* fra due insiemi l'insieme degli elementi del primo insieme che non appartengono al secondo insieme; si indica come A \ B od anche A-B, si legge differenza fra A e B. Abbiamo due casi

- il secondo insieme non è contenuto completamente nel primo insieme; in tal caso si parla semplicemente di differenza, ad esempio: dati gli insiemi $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$

$$A \setminus B = A\text{-}B = \{ 1, 2 \}$$

devo prendere tutti gli elementi che appartengono ad *A* e non appartengono a *B*.

- il secondo insieme è contenuto nel primo insieme $B \subseteq A$;
  in tal caso si parla di *differenza complementare*
  ad esempio: dati gli insiemi $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 3, 4 \}$

$$A \setminus B = A\text{-}B = \{ 1, 2 \}$$

devo prendere tutti gli elementi di *A* che non appartengono a *B*.

Complementare di un insieme Riprendiamo l'esempio di differenza complementare precedente, con l'insieme *B* contenuto in *A*, $B \subseteq A$, $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $B = \{ 3, 4 \}$ allora $A \setminus B = A\text{-}B = B^C = \{ 1, 2 \}$.

Allora possiamo dire che A\B è l'insieme *complementare* di B rispetto all'insieme A
Insieme universo. Introduciamo ora il concetto di insieme universo**.**

Il complementare dell'insieme vuoto Ø sarà tutto l'insieme di partenza; conviene quindi introdurre il concetto di insieme universo *E* come complementare dell'insieme vuoto

$$Ø^C = E \qquad E^C = Ø.$$

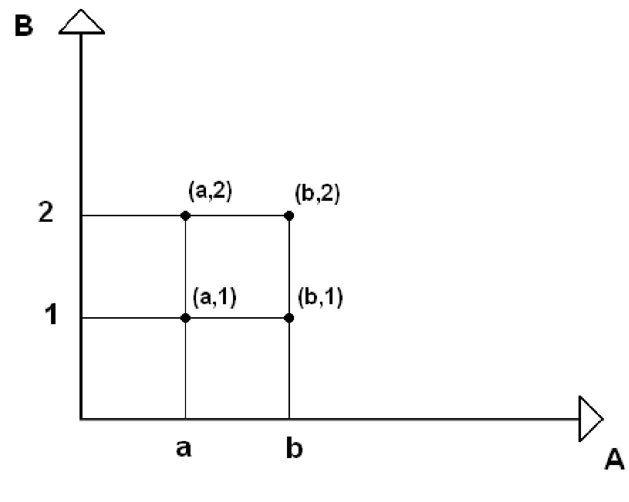
Quindi quando parleremo solo di un insieme su cui considerare sottoinsiemi ed operazioni a lui interne potremo considerarlo come insieme universo e lo indicheremo con *E*.

Finora negli insiemi non abbiamo mai usato l'ordine: per poterlo introdurre usiamo il concetto di coppia ordinata: quindi la coppia ordinata servirà a inserire il concetto di ordine nella teoria degli insiemi.
D*efinizione:* Chiameremo *coppia ordinata (a, b)* l'insieme di due elementi in cui *a* è il primo elemento e *b* è il secondo elemento.
Dalla definizione segue che la coppia ordinata *(a, b)* è diversa dalla coppia ordinata *(b, a).*

Prodotto cartesiano fra due insiemi. Definiamo *prodotto cartesiano* $A \times B$ di due insiemi *A* e *B* l'insieme di tutte le coppie ordinate che hanno come primo elemento un elemento di *A* e come secondo elemento un elemento di *B.*
Dati gli insiemi $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2\}$, costruisco tutte le coppie considerando come primo elemento un elemento di *A* e come secondo elemento un elemento di *B*

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2)\}.$$

Particolarmente interessante è la rappresentazione cartesiana del prodotto: riportando su un asse orizzontale gli elementi di *A* e su un asse verticale gli elementi di *B* le coppie sono rappresentate dai punti di incrocio:



Un tipico esempio di prodotto cartesiano è l'insieme dei punti del piano cartesiano.

Capitolo 2

Elementi di logica matematica

2.1 Le proposizioni logiche e i principi della logica.

Nel linguaggio naturale, ovvero nel linguaggio che parliamo quotidianamente per comunicare, indichiamo con il termine proposizione una frase che esprime un pensiero compiuto; prima di definire una proposizione in senso matematico dobbiamo conoscere gli elementi che lo compongono.
Si dice alfabeto un insieme finito e non vuoto di caratteri.
Si dice stringa un allineamento finito di caratteri dell'alfabeto.
Sono stringhe dell'alfabeto italiano:
(a) il sole è una stella (b) il solo e una stela.
La stringa (a) è stata ottenuta applicando correttamente le regole della morfologia e della sintassi, si dice ben formata, la stringa (b) è invece mal formata.
Si dice linguaggio l'insieme delle stringhe ben formate.
Il linguaggio di cui ci occuperemo è quello della matematica; l'alfabeto che useremo è costituito da caratteri alfanumerici, e da simboli speciali (parentesi, segni operazionali, simboli di relazione, …).
In matematica si chiama proposizione o enunciato, una stringa ben formata, per la quale si può stabilire, in maniera oggettiva, se è vera o falsa.
Come accade nel linguaggio naturale, distinguiamo in una proposizione, una forma verbale, che chiameremo predicato, e uno o più termini che chiameremo argomenti.
Quando diciamo che una proposizione è vera o falsa, attribuiamo ad essa un valore di verità. Chiameremo equiveridiche due proposizioni che hanno lo stesso valore di verità, ossia che sono o entrambe vere o entrambe false.
Si dice semplice o atomica una proposizione che non può essere suddivisa in frasi più semplici, per le quali è ancora possibile stabilire il valore di verità; si dice molecolare o composta una proposizione che contiene due o più proposizioni semplici.
Lo studio della correttezza dei ragionamenti matematici si fonda sui seguenti tre principi della logica:
Principio di identità: ogni proposizione ha lo stesso valore di verità di se stessa.
Principio di non contraddizione: una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.
Principio del terzo escluso: una proposizione può essere solo vera o falsa.
Il terzo principio è anche noto come tertium non datur, in quanto assicura che non esiste una terza possibilità oltre vero e falso.

2.2 Operazioni nell'insieme delle proposizioni logiche; tavole di verità

Come si eseguono operazioni sugli insiemi, così è possibile eseguire le cosiddette operazioni logiche usando i connettivi logici, simboli che da una o più proposizioni, permettono di derivarne altre. I connettivi possono essere unari se lavorano su una sola proposizione, o binari se operano su due proposizioni.

Negazione

L'operazione logica di negazione si esegue operando con il connettivo di negazione su una sola proposizione. A seconda del linguaggio che si utilizza, il connettivo di negazione viene indicato con uno dei seguenti simboli: logico ($\neg$), informatico (NOT), italiano (NON), latino (NON).
Data la proposizione p, la proposizione $\neg$ p avrà valore di verità contrario a quello di p, ossia $\neg$ p sarà vera se p è falsa e viceversa.
Il modo con cui opera un connettivo può essere visualizzato mediante una tabella, detta tavola di verità, in cui nella prima colonna compaiono i valori di verità della proposizione p e nella seconda colonna i corrispondenti valori di verità di $\neg$ p.
Negando due volte una proposizione p si ottiene una proposizione equiveridica a p.

p	$\neg$p
V	F
F	V

Congiunzione

L'operazione logica di congiunzione si esegue operando su due proposizioni mediante il connettivo di congiunzione, indicato con uno dei seguenti simboli: logico ($\wedge$), informatica (AND), italiano (E), latino ET).

Il risultato dell'operazione di congiunzione è una proposizione vera, quando le due proposizioni che si connettono sono entrambe vere, falsa in tutti gli altri casi.

Il modo in cui opera la congiunzione viene visualizzato dalla tavola di verità: nelle prime due colonne sono riportati i possibili valori di verità delle proposizioni componenti e nella terza colonna il valore di verità della proposizione composta.

Esempi

1) Sia p la proposizione " il quadrato è un rombo" e q la proposizione "il rettangolo è un parallelogramma", la proposizione p$\wedge$q: " il quadrato è un rombo e il rettangolo è un parallelogramma" è vera, perché sono vere entrambe le proposizioni di partenza.
2) La scrittura matematica 5 < 10 < 20 è una proposizione composta costruita con il connettivo di congiunzione, essa infatti può essere scritta come congiunzione di due proposizioni semplici: (10 < 5) $\wedge$ (10 < 20). Affinché sia vera la proposizione composta devono essere contemporaneamente vere le due proposizioni semplici componenti.

p	q	p$\wedge$q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disgiunzione inclusiva

L'operazione logica di disgiunzione inclusiva si esegue operando su due proposizioni mediante il connettivo di disgiunzione inclusiva, indicato con uno dei seguenti simboli: logico ($\vee$), informatico (*OR*), italiano (*O*), latino (*VEL*).

p	q	p$\vee$q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il risultato della disgiunzione inclusiva è una proposizione vera quando almeno una delle due proposizioni componenti è vera, falsa quando entrambe le proposizioni componenti sono false.

L'aggettivo inclusiva sta ad indicare che le proposizioni componenti non sono in alternativa tra loro, ma sono compatibili. Il modo con cui opera la disgiunzione inclusiva viene visualizzato nella tavola di verità riportata a fianco.

Esempi

1) Siano p : "un rettangolo è un quadrilatero convesso", q: "un rettangolo ha quattro angoli della stessa ampiezza"; la proposizione $p \vee q$: "Un rettangolo è un quadrilatero convesso o ha quattro angoli della stessa ampiezza" è vera perché sia p che q sono vere.
2) Siano p: " 4 è il quadrato di 2" e q: "10 è il successivo di 11", la proposizione $p \vee q$: "4 è il quadrato di 2, o 10 è il successivo di 11" è vera, perché p è vera (e q è falsa).
3) Nel bando di un concorso si legge "Possono partecipare le persone provviste di licenza media o che abbiano compiuto 21 anni".
   Rossi ha 15 anni e la licenza media, Bianchi ha 22 anni e la licenza media, Neri ha 16 anni e non ha la licenza media, Verdi ha 30 anni, ma non ha la licenza media. Di queste 4 persone solo Neri non può accedere al concorso, perché non possiede nessuno dei due requisiti richiesti.

Disgiunzione esclusiva

L'operazione logica binaria di disgiunzione esclusiva si esegue operando su due proposizioni mediante il connettivo di disgiunzione esclusiva, indicato con uno dei seguenti simboli: logico ($\vee$), informatico (*EXOR*), italiano (*O…O*), latino (*AUT*).

Il risultato dell'operazione di disgiunzione esclusiva è una proposizione vera quando una delle proposizioni componenti è vera e l'altra è falsa, falsa quando le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false, quando cioè le proposizioni componenti sono equiveridiche.

p	q	p∨q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il modo in cui opera la disgiunzione esclusiva è visualizzato con la tavola di verità riportata a fianco.

Esempi

1) Date le proposizioni semplici p: " 5 è un numero naturale", q: " –10 è un numero positivo", la proposizione composta $p \vee q$ è vera perché p è vera e q è falsa.
2) Se p: "Il triangolo ha tre lati" e q: "Il quadrato ha tutti gli angoli di uguale ampiezza", la proposizione $p \vee q$ è falsa perché le proposizioni componenti sono entrambe vere.

Implicazione materiale

L'operazione logica di implicazione materiale si esegue operando su due proposizioni mediante il connettivo di implicazione materiale, indicato con uno dei seguenti simboli: logico ($\rightarrow$), informatico (*IF ... THEN*), italiano (*SE ... ALLORA*).

La proposizione p viene detta antecedente *o premessa*, la proposizione q è detta *conseguente o conseguenza.* Il modo in cui opera l'implicazione materiale è visualizzato con la tabella a fianco.

La proposizione $p \to q$ può essere letta anche come "p implica q" o "da p discende q".

p	**q**	**$p \to q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Osservazione: il valore di verità della proposizione $p \to q$ dipende unicamente dal valore di verità delle proposizioni componenti, ed è del tutto indipendente dal fatto che esista tra di esse un legame che abbia senso, la proposizione p può quindi non avere alcuna relazione con q e $p \to q$ può non avere un significato accettabile.

Tra le proposizioni composte che si possono ottenere utilizzando il connettivo di implicazione, le più frequentemente utilizzate sono:

$p \to q$ implicazione *diretta*

$q \to p$ implicazione *inversa*

$\neg p \to \neg q$ implicazione *contraria*

$\neg q \to \neg p$ implicazione *contronominale.*

Costruiamo la tavola di verità delle implicazioni sopra descritte:

p	**Q**	**$\neg$ p**	**$\neg$ q**	**$p \to q$ diretta**	**$q \to p$ inversa**	**$\neg p \to \neg q$ contraria**	**$\neg q \to \neg p$ contronominale**
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

Come si vede dalle tabelle, sono equiveridiche le proposizioni: diretta e contronominale, inversa e contraria.

Coimplicazione materiale o doppia implicazione materiale

L'operazione logica di coimplicazione materiale si esegue operando su due proposizione mediante il connettivo di coimplicazione materiale rappresentato da uno dei seguenti simboli: logico ($\leftrightarrow$), italiano (*SE E SOLO SE*).

Il risultato dell'operazione di coimplicazione materiale è una proposizione vera, se le due proposizioni componenti sono equiveridiche, falsa in caso contrario.

Il modo in cui opera la coimplicazione materiale è visualizzato dalla tavola di verità riportata a fianco.

p	q	$p\leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Osservazione: anche nel caso della coimplicazione non si vuole stabilire un legame consequenziale tra le proposizioni componenti, dovuto al loro specifico significato, ma solo determinare il valore di verità della proposizione molecolare $p\leftrightarrow q$ unicamente in base al valore di verità delle proposizioni componenti p e q.

La proposizione p può quindi non avere alcuna relazione con q e $p\leftrightarrow q$ può non avere un significato accettabile nel linguaggio comune.

Esempi

1) Siano p: "8 è il doppio di 6" e q: "$5 \notin N$". La proposizione $p\leftrightarrow q$ è vera perché entrambe le proposizioni componenti sono false.
2) Se p:" $5 \times 5 = 25$ " e q: "8 è un numero primo", $p\leftrightarrow q$ è falsa perché p è vera e q è falsa.

2.3 Espressioni logiche

Sappiamo che è possibile scrivere espressioni sia con i numeri, sia con gli insiemi, utilizzando in modo appropriato i simboli delle operazioni e le parentesi. Nel primo caso otteniamo espressioni numeriche che si possono semplificare e ridurre mediante certe regole, nel secondo caso otteniamo espressioni insiemistiche che possono, ad esempio, essere rappresentate mediante diagrammi di Venn.

Analogamente è possibile costruire, con le proposizioni, espressioni logiche delle quali si stabilisce il valore di verità costruendo opportune tabelle. La determinazione del valore di verità di una espressione logica prende il nome di calcolo proposizionale. Come nel calcolo aritmetico, anche nel calcolo proposizionale esistono delle priorità di esecuzione determinate, innanzitutto dalle parentesi; tra le operazioni logiche, poi, la negazione va eseguita prima delle altre operazioni binarie, le quali invece presentano tutte lo stesso livello di priorità. Nei casi in cui il calcolo proposizionale fornisce due espressioni logiche con la stessa tavola di verità, si dice che le espressioni sono logicamente equivalenti.

Ricordiamo che se nell'espressione logica compaiono *n* proposizioni semplici tra di loro indipendenti, le possibili configurazioni di valori di verità che si devono esaminare sono 2^n.

Tra i connettivi che abbiamo esaminato alcuni: negazione, congiunzione, disgiunzione inclusiva si dicono **f***ondamentali*, gli altri si dicono *derivati* poiché, per ciascuno di essi, è possibile costruire una espressione logica, dove compaiono solo i connettivi fondamentali, che è logicamente equivalente alla proposizione ottenuta applicando il connettivo:

$p \vee q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$

$p \rightarrow q \equiv (p) \vee q$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$

2.4 Logica dei predicati

Enunciati aperti

Fino ad ora abbiamo studiato la logica delle proposizioni, imparando a determinare il valore di verità di proposizioni che sono costruite connettendone altre.

Le stringhe ben formate che abbiamo preso in esame contenevano uno o più predicati e uno o più argomenti *costanti,* ossia fissati e ben determinati. Ora, invece studieremo le stringhe che, accanto al predicato, presentano argomenti *variabili*, rappresentati cioè da lettere che possono assumere di volta in volta significato differente.

Si dice *enunciato aperto* una stringa ben formata che contiene almeno un argomento variabile e che si trasforma in una proposizione ogni volta che si sostituisce un valore costante a ciascuna variabile.

Esempi

1) p(x): "x è nato a Venezia"

2) p(x,y): "x è doppio di y"

3) p(x): " x è multiplo di 3"

sono enunciati aperti, x e y sono le variabili.

In un enunciato aperto le variabili non possono essere sostituite da valori qualsiasi, ma solo da quelli appartenenti ad un preciso insieme, detto *ambiente o dominio dell'enunciato aperto*.

Il dominio dell'enunciato nell'esempio (1) è un insieme di persone (ad esempio i cittadini italiani), il dominio dell'enunciato (2) è un insieme di numeri (insieme dei numeri naturali, o degli interi relativi o anche dei razionali relativi), il dominio dell'enunciato (3) è l'insieme dei numeri naturali.

L'insieme dei valori del dominio che chiudono l'enunciato aperto trasformandolo in una proposizione vera si chiama *insieme di verità* dell'enunciato aperto.

2.5 Quantificatori

Consideriamo l'enunciato aperto "x è primo". Ci chiediamo per quanti valori di x l'enunciato si trasforma in una proposizione aperta. Si usano espressioni come "qualunque sia il numero x, esso è primo" oppure "esiste almeno un numero x che è primo". Così facendo, abbiamo effettivamente chiuso l'enunciato aperto di partenza, non nel modo usuale, cioè sostituendo alla variabile una costante, ma utilizzando due espressioni che permettono di *quantificare* la proposizione. Infatti nel primo caso intendiamo dire che *ogni* elemento x appartenente ad un insieme numerico è primo, ossia la proprietà di essere primo è vera per ogni elemento dell'insieme, nel secondo caso affermiamo che la proprietà è vera per almeno un elemento dell'insieme.

Nel linguaggio formale della matematica indicheremo l'espressione

- *Per ogni* con il simbolo $\forall$, detto *quantificatore universale*
- *Esiste almeno un* con il simbolo $\exists$, detto *quantificatore esistenziale*
- *Esiste ed è unico* con il simbolo $\exists!$, detto *quantificatore esistenziale unitario.*

Il simbolo di *esiste* tagliato significa *non esiste.*

Esempi

1. Consideriamo l'enunciato aperto p(x): "x è divisore di 100" nell'insieme dei numeri naturali. Le proposizioni: $\forall\, x \in \mathbb{N}$: p($x$) e $\exists!\, x \in \mathbb{N} \mid$ p(x) sono false, mentre la proposizione $\exists\, x \in \mathbb{N} \mid$

   p(x) è vera

2. Consideriamo i seguenti enunciati aperti sull'insieme dei numeri naturali:
   a) tutti gli x sono pari
   b) qualche x è pari
   c) esiste almeno un x pari
   d) esiste ed è unico x pari.
   Usando i quantificatori possiamo riscrivere le frasi precedenti come segue:
   a) $\forall\, x \in \mathbb{N}$: x è pari FALSA
   b) $\exists\, x \in \mathbb{N} \mid x$ è pari VERA
   c) $\exists\, x \in \mathbb{N} \mid x$ è pari VERA
   d) $\exists!\, x \in \mathbb{N} \mid x$ è pari FALSA

Quando si usano i quantificatori universale ed esistenziale si deve porre particolare attenzione

nell'eseguire l'operazione di negazione.

Consideriamo gli esempi:

1) La negazione della proposizione "Ogni uomo è sposato" non è "ogni uomo non è sposato", ma "Esiste almeno un uomo che non è sposato"

2) La negazione della proposizione "Almeno uno dei presenti è maggiorenne" è "Ogni presente non è maggiorenne".

In generale per negare una frase contenente quantificatori si seguono le seguenti regole:

$\neg(\forall x : p(x))$ è equiveridica a $\exists x \mid \neg p(x)$

$\neg(\exists x : p(x))$ è equiveridica a $\forall x : \neg p(x)$

ESERCIZI PROPOSTI

1. Distingui tra le seguenti proposizioni quelle semplici (atomiche) da quelle composte; per quest'ultime, inoltre, individua le proposizioni atomiche che le compongono:
   - 5 è un numero dispari
   - 4 è un numero pari e 13 è un numero primo
   - Milano è in Lombardia
   - Roma è la capitale d'Italia e Bari è il capoluogo della Puglia
   - O mangi o dormi
   - Il quadrato è un rettangolo e il rombo è un parallelogramma
   - O x=3 o x=4
   - Il cavallo e il cane sono animali domestici
   - Se vuoi dimagrire, fai ginnastica
   - La rosa è un fiore e la giraffa è un animale
2. Scrivi la negazione delle seguenti proposizioni:
   - 3 = 5
   - Milano è in Africa
   - Francesco ama leggere
   - 12 < 5
   - Maria è più alta di Francesca
   - Oggi non ho studiato
   - Mara ha un gattino bianco

3. Date le proposizioni p:"Il triangolo è un poligono" e q:"Il rettangolo non è un quadrato", scrivi in simboli logici le seguenti proposizioni e determina il loro valore di verità:
   - Il triangolo è un poligono e il rettangolo è un quadrato
   - Il triangolo non è un poligono e il rettangolo è un quadrato
   - Il triangolo è un poligono e il rettangolo non è un quadrato
   - Il triangolo non è un poligono e il rettangolo non è un quadrato.

4. Considera le proposizioni p:"Antonio è bravo in matematica" e q:"Angela non è brava in latino". In quali casi $p \wedge q$ è una proposizione falsa?

5. Date le proposizioni:
   p:"256 è un multiplo di 2" q:"35 è divisibile per 5"
   r:"Filippo non ha studiato" s:" 25 < 35"
   ricava le proposizioni composte: $p \wedge q$, $(\neg p) \wedge q$, $r \vee s$, $p \vee q$

6. Date le proposizioni p: "16 è multiplo di 4", q: "16 è minore di 12" e r:"16 è divisibile per 10", determina il valore di verità delle proposizioni $(p \vee q) \vee r$, $(p \wedge q) \wedge r$, $(p \wedge q) \vee r$, $(p \vee q) \wedge r$

7. Dalle proposizioni p:"Oggi è una bella giornata" e q:"Oggi vado a giocare", costruisci la proposizione $p \rightarrow q$. In quali casi $p \rightarrow q$ è vera? E in quali casi è falsa?

8. Date le proposizioni p:"21 è un multiplo di 3 e q:"3 è divisore di 21", scrivi le proposizioni $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$ e determina il loro valore di verità

9. Costruisci la contronominale di ciascuna delle seguenti implicazioni:
   - Se un triangolo è isoscele, allora ha due angoli della stessa ampiezza.
   - Se 30 è divisibile per 3, allora 30 è multiplo di 3.
   - Se A è un quadrato, allora a è un rettangolo.
   - Se n è un numero pari, allora n è divisibile per 2.
   - Se A è un rombo, allora A è un parallelogramma.
   - Se n è un numero divisibile per 3, allora n è dispari.

10. Usando i quantificatori universale ed esistenziale, scrivi in linguaggio simbolico le seguenti proposizioni, determinane il valore di verità e costruisci la proposizione negata:
   - *tutti i triangoli hanno tre lati*
   - *esistono triangoli con due lati della stessa lunghezza*
   - *esistono numeri pari e divisibili per 3*
   - *esistono numeri pari non divisibili per 4*
   - *ogni numero naturale è minore o uguale del suo quadrato*

Capitolo 3

Calcolo letterale. Monomi e polinomi. Fattorizzazione dei polinomi.

3.1 Introduzione

In questo capitolo richiamiamo alcuni concetti quali le potenze, le radici e gli esponenti frazionari utili nel seguito ed esporremo i concetti di monomio e polinomio e le relative operazioni, per poi affrontare la scomposizione in fattori di un polinomio che è un argomento molto importante ed utile in vari contesti, quali ad esempio la risoluzione di equazioni e disequazioni.

3.2 Le potenze

In matematica la *potenza* è un'operazione che associa ad una coppia di numeri *a* e *n* - detti rispettivamente *base* ed *esponente* - il numero dato dal prodotto di *n* fattori uguali ad *a*:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$$

in questo contesto *a* può essere un numero intero, razionale o reale, mentre *n* è un numero intero positivo.

Esempi

- $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

L'operazione si estende ad $n = 0$ ponendo per ogni $\boldsymbol{a \neq 0}$

$a^0 := 1$,

e ad *n* negativi ponendo

$$a^{-k} := \frac{1}{a^k}$$

Esempio

- $10^{-3} = 1 / 10^3 = 0{,}001$.

Queste ultime definizioni, a prima vista poco comprensibili, si dimostrano essere ragionevoli quando si analizzano le proprietà delle potenze che vengono presentate di seguito.

Proprietà

Le seguenti proprietà sono di immediata verifica nel caso in cui gli esponenti sono numeri interi positivi:

- Il prodotto di due, o più, potenze aventi la stessa base, è una potenza avente per base la stessa base e come esponente la somma degli esponenti:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

- Il quoziente di potenze aventi la stessa base è una potenza avente la stessa base dei fattori e come esponente la differenza tra l'esponente del dividendo e l'esponente del divisore:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

- La potenza di una potenza è una potenza in cui la base rimane la stessa e l'esponente è dato dal prodotto degli esponenti:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

- Il quoziente di potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha per esponente lo stesso esponente e per base il quoziente delle basi:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Notiamo che la definizione $a^0 := 1$ risulta ora più comprensibile poiché è consistente con le proprietà appena viste, infatti:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

E lo stesso vale per la definizione di a^{-x}, infatti:

$$a^{-x} = a^{0-x} = \frac{a^0}{a^x} = \frac{1}{a^x}$$

3.3 Radici ed esponenti frazionari

Dato un numero *a non negativo,* si chiama radice *n*-esima di *a* quel numero non negativo *b* tale che $b^n = a$, tale numero si indica con $\sqrt[n]{a}$. Da questa definizione si ha subito che

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

quindi è ragionevole (in virtù delle proprietà delle potenze) porre

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}.$$

In questo modo le proprietà delle potenze sono ancora rispettate, infatti

$$\left(a^{1/n}\right)^n := a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

come avveniva per la radice *n*-esima.

Più in generale la definizione di potenza può essere estesa ulteriormente, nel caso in cui *a* è positivo consentendo all'esponente di essere un numero razionale $\frac{x}{y}$ se si pone:

$$a^{x/y} := \sqrt[y]{a^x}.$$

Non è possibile estendere la definizione a basi negative o nulle perché così facendo si arriverebbe a degli assurdi: $-8 = ((-8)^2)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = 8.$

3.4 Calcolo letterale

Questo paragrafo ha lo scopo di richiamare alcuni strumenti per il calcolo formale con le espressioni, in particolare per l'uso delle parentesi. Si tratta di tecniche che useremo molto spesso, per cui a volte potrà essere utile consultarlo. La matematica ha a che fare con "calcolare". Ma in ogni libro di matematica i calcoli vengono eseguiti su lettere invece che su numeri. Infatti non appena l'interesse supera i *singoli* numeri da calcolare, ci ritroviamo a fare osservazioni di carattere generale. Quali sono le *regole* che adoperiamo quando usiamo i *numeri* ? Una delle più semplici è la seguente: Quando sommiamo due numeri reali, l'ordine non ha importanza. Ad esempio

$$3+4=4+3, \qquad (1)$$

ed anche 2+6=6+2, oppure 14+20=20+14, e così via. Concisamente possiamo scrivere

$$x + y = y + x, \qquad (2)$$

se x ed y sono numeri reali. Ecco un enunciato che *tratta di numeri pur contenendo soltanto lettere.* Si chiama *legge commutativa dell'addizione*.
C'è anche la *legge commutativa della moltiplicazione*

$$x\,y = y\,x, \qquad (3)$$

se x ed y sono numeri reali. C'è poi un enunciato che mette in relazione addizione e moltiplicazione

$$a\,(b + c) = a\,b + a\,c \qquad (4)$$

per tutti i numeri reali a, b, c e si chiama *legge distributiva.*
Ricordiamo le principali regole:

1) In algebra una lettera rappresenta un numero relativo nel suo complesso, cioè con il suo segno e il suo valore aritmetico.
2) Poiché, moltiplicando un numero relativo per (+1) lo si lascia invariato, mentre moltiplicando per (-1) gli si cambia il segno, segue che si può scrivere:

$$(+1)\cdot a = +a = a; \qquad \text{e} \qquad (-1)\cdot a = -a.$$

È importante ricordare che $-a$ non rappresenta necessariamente un numero negativo, ma solamente l'opposto di a; pertanto:

se a è positivo, $-a$ è negativo;
se a è negativo, $-a$ è positivo;
se a è zero, $-a$ è zero.

Così pure, $+a$ non è necessariamente positivo, ma lo è *solo* se a è positivo.
Per esempio, se $a = -4$, si ha:

$$+a= (+1)\,(-4)=-4; \qquad -a = (-1)\cdot(-4) = +4.$$

Se $a = 3$, si ha:
$+a= (+1)\,(+3)= 3;$ $\qquad -a = (-1)\cdot(+3) = -3.$
Poiché le scritture $+a$ e a rappresentano lo stesso numero, nel seguito sottintenderemo sempre il segno + posto davanti alla lettera e scriveremo a, invece di $+a$. Quando scriveremo $-a$ si dovrà ricordare che con questa scrittura s'intende rappresentare l'*opposto* del numero a.

La somma, la differenza, il prodotto ed il quoziente di due numeri relativi *a* e *b* si indicano, rispettivamente, scrivendo:

$$a+b; \quad a-b; \; ab; \; a:b.$$

Con *a+b* intendiamo quel numero che si ottiene aggiungendo al numero *a* il numero *b*; il numero *ab* è quello che si ottiene moltiplicando il numero relativo *a* con il numero relativo *b*, ecc.
Per esempio, se *a* = 3 e *b*= - 4, allora risulta:

$a+b=-1; \qquad a-b= 7; \qquad ab = -12; \qquad a:b=-\frac{3}{4}.$

Quando nella moltiplicazione letterale, qualche fattore è preceduto dal segno -, nell'indicare il prodotto, bisognerebbe scrivere tale fattore tra parentesi insieme al proprio segno. Così il prodotto di *a* per *–b,* si dovrebbe scrivere: *a*(-*b*). Ricordando che *–b* = -1·*b*, per la proprietà commutativa della moltiplicazione, si ha:

$$a(-b)=a\cdot(-1)\, b = (-1)ab = -ab,$$

pertanto invece di scrivere *a(-b)*, scriveremo *–ab*.
Così, il prodotto del numero *–a*, per il numero *–b*, invece di indicarlo con *(-a)(-b)*, lo indicheremo semplicemente con *ab*.
Quando una lettera rappresenta un divisore, bisogna sempre sottintendere che essa rappresenti un numero diverso da zero, perché la divisione per zero non ha senso.

3.5 Monomi

Si chiama *monomio* ogni prodotto di fattori, numerici o letterali, in cui i fattori letterali sono elevati ad esponente intero positivo o nullo.
In altre parole, si chiama monomio ogni espressione algebrica in cui non figurano né addizioni, né sottrazioni, né divisioni.
Per esempio, sono monomi le seguenti espressioni:

$$-\frac{3}{4}; \quad -b; \quad x^3; \quad -2ab^2c^3; \quad (-7)a^2bc^5\left(-\frac{3}{5}\right)x^3y^2.$$

Mentre, non sono monomi le seguenti espressioni:

$$5a-2b; \quad -\frac{3}{4}a^2b^{-3}; \quad -\frac{2ab^2}{7x^3y^2}.$$

Perché, oltre alla moltiplicazione, contengono altre operazioni.
Un *monomio* si dice *ridotto a forma normale,* se si può scrivere come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali di basi diverse.
Il fattore numerico con il segno si chiama *coefficiente* del monomio, mentre il prodotto dei rimanenti fattori costituisce la *parte letterale*.
Si dice *grado di un monomio, rispetto a una sua lettera*, l'esponente che questa lettera ha nel monomio. Si dice *grado (complessivo) di un monomio* la somma degli esponenti di tutte le sue lettere.
Ad esempio, il monomio:

$$\frac{3}{4}a^2bx^3z^4 \begin{cases} \text{è di grado 2 rispetto ad } a \\ \text{è di grado 1 rispetto a } b \\ \text{è di grado 3 rispetto ad } x \\ \text{è di grado 4 rispetto a } z \\ \text{è di grado 0 rispetto a } c, \text{ o } d, \text{ o a } y, \text{ecc} \\ \text{è di grado complessivo 10.} \end{cases}$$

Due *monomi* si dicono *simili,* se hanno la stessa parte letterale (cioè le stesse lettere con gli stessi esponenti).
Due *monomi* si dicono *opposti,* se sono simili e hanno coefficienti opposti.

3.6 Operazioni con i monomi

Somma di monomi
La somma di due o più monomi, in generale non è un monomio e si indica scrivendo uno dopo l'altro i monomi addendi. La somma algebrica di monomi simili è uguale o al monomio nullo oppure ad un monomio simile ai dati, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti dei monomi addendi. In pratica tutte le volte che nei calcoli si incontra una somma algebrica di monomi bisogna controllare se fra essi vi siano monomi simili, perché, in caso affermativo, i monomi simili si addizionano con la regola precedente, e la somma algebrica considerata verrà scritta sotto forma più semplice, in ciò consiste la cosiddetta *riduzione dei monomi simili.*
Ad esempio

$$-2a+5b-7a-13b+15b-a+2b=-10a+9b.$$

Per sottrarre da un monomio un altro monomio basterà, sommare al primo l'opposto del secondo, ad esempio

$$5x^3y^2-\left(-2ab^2c^3\right)=5x^3y^2+2ab^2c^3.$$

Moltiplicazione ed elevamento a potenza di monomi
Per calcolare il prodotto di due o più monomi, non nulli, basta formare un unico monomio, prodotto dei fattori numerici e letterali dei monomi dati.
Per esempio

$$5ax^3y^2\cdot\left(-2ab^2c^3\right)=-10x^3y^2a^2b^2c^3.$$

Il prodotto di due o più monomi non nulli è un monomio avente:
1) il coefficiente uguale al prodotto dei coefficienti dei monomi dati;
2) la parte letterale costituita da tutte le lettere che figurano nei singoli monomi, ciascuna con esponente uguale alla somma degli esponenti che le stesse lettere hanno nei monomi dati.

Per elevare alla potenza *n*-esima un monomio, con *n* naturale, si eleva a quella potenza il coefficiente e si moltiplicano per *n* gli esponenti dei fattori letterali.
Ad esempio

$$\left(-2ab^2c^3\right)^3=-8a^3b^6c^9.$$

Divisione di monomi
Un monomio si dice divisibile per un altro monomio (non nullo) quando esiste un terzo monomio che moltiplicato per il secondo dà per il prodotto il primo.
Il primo monomio si chiama *dividendo*, il secondo *divisore* ed il terzo si chiama *quoziente*.
Ad esempio,

$$12x^3y^2:\left(-3xy^2\right)=-4x^2.$$

Il quoziente di due monomi, non nulli e divisibili, è un monomio che ha per coefficiente il quoziente dei coefficienti dei due monomi dati e come parte letterale quella che si ottiene dalla parte letterale del dividendo, sottraendo dall'esponente di ciascuna sua lettera l'esponente che ha la stessa lettera nel divisore.
Massimo comune divisore
Si chiama *massimo comune divisore* di due o più monomi e si indica con M.C. D. ogni monomio di grado massimo che divida contemporaneamente tutti i monomi dati.

In pratica per trovare il massimo comune divisore (M.C.D.) di due o più monomi si applicano regole analoghe a quelle che si adoperano in aritmetica per trovare il M.C.D. di due o più numeri naturali con il metodo della scomposizione in fattori primi.
Pertanto, la parte letterale del M.C.D. di due o più monomi è formata da tutte e soltanto le lettere comuni ai monomi elevate ciascuna al più piccolo esponente che essa ha nei singoli monomi.
Ad esempio il M.C.D. dei monomi

$$\boldsymbol{12x^3y^2, \quad -4xy^3a, \quad 6x^2a^2b}$$

è $\boldsymbol{2x.}$

Minimo comune multiplo
Si chiama *minimo comune multiplo* di due o più monomi e si indica con m.c.m., ogni monomio di grado minimo che sia divisibile contemporaneamente per tutti i monomi dati.
La parte letterale del m.c.m. di due o più monomi è formata da tutte le lettere comuni e non comuni, dei monomi dati, prese ciascuna con il più grande esponente che essa ha nei singoli monomi.
Ad esempio il m.c.m. dei monomi

$$\boldsymbol{12x^3y^2, \quad -4xy^3a, \quad 6x^2a^2b}$$

è $\boldsymbol{12x^3y^3a^2b.}$

3.7 Polinomi

Si chiama polinomio ogni somma algebrica di due o più monomi. Ciascun monomio del polinomio è detto termine del polinomio. Un *polinomio* si dice *ridotto a forma normale,* se è scritto scrivendo i suoi termini in forma normale e sommando i monomi simili.
Un polinomio ridotto a forma normale si dice:

1) nullo, se tutti i suoi termini sono monomi nulli, ad esempio p= 0;
2) monomio, se contiene un solo termine, ad esempio 3*xy*;
3) binomio, se contiene soltanto due termini (non nulli), ad esempio *5a-bc;*
4) quadrinomio, se contiene solo quattro termini, ad esempio *7ab-bc+5ac -13*.

Il polinomio opposto è quello ottenuto da un dato polinomio cambiando tutti i segni dei termini del monomio, ad esempio il polinomio opposto di *3ab-5bc* è *-3ab+5bc*.
Si chiama *grado di un polinomio, rispetto ad una lettera*, il massimo dei gradi dei suoi termini, rispetto a quella lettera.
Si chiama *grado (complessivo) di un polinomio*, il massimo dei gradi dei suoi termini.
Si chiama *termine noto* di un polinomio, il termine senza parte letterale ed è chiamato monomio di grado 0.
Ad esempio

$$\boldsymbol{5a^3b^2c^5 - \frac{3}{4}a^2bx^3z^4 - 7x^2\ \ c^2 + 15}\begin{cases} \textbf{\textit{è di grado}}\ \mathbf{3}\ \textbf{\textit{rispetto ad a}} \\ \textbf{\textit{è di grado}}\ \mathbf{2}\ \textbf{\textit{rispetto a b}} \\ \textbf{\textit{è di grado}}\ \mathbf{5}\ \textbf{\textit{rispetto a c}} \\ \textbf{\textit{è di grado}}\ \mathbf{3}\ \textbf{\textit{rispetto ad x}} \\ \textbf{\textit{è di grado}}\ \mathbf{4}\ \textbf{\textit{rispetto a z}} \\ \textbf{\textit{è di grado complessivo}}\ \mathbf{10.} \end{cases}$$

Il termine noto è 15.
Un polinomio si dice omogeneo, se tutti i suoi termini sono dello stesso grado.

Ad esempio

$$5x^2y^2 - 13abc^2 + 7x^2ab$$

è omogeneo di quarto grado.

Somma di polinomi

La somma di due o più polinomi è il polinomio che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

Ad esempio

$$(2x^2 + ab - 2by^2) + (5x^2 - 5) + (6ab - 4) = 7x^2 + 7ab - 2by^2 - 9.$$

La differenza di due polinomi si ottiene sommando al primo polinomio l'opposto del secondo.

Ad esempio

$$(2x^2 + ab - 2by^2) - (5x^2 - 5) = -3x^2 + ab - 2by^2 + 5.$$

Prodotto di due polinomi

Il prodotto di due polinomi è un polinomio che ha per termini tutti i prodotti che si ottengono moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo polinomio.

Ad esempio

$$(2x^2 + ab)(5x^2 - 5) = 10x^4 - 10x^2 + 5abx^2 - 5ab.$$

Per calcolare il prodotto di tre o più polinomi si moltiplica il primo polinomio per il secondo, il risultato ottenuto si moltiplica per il terzo e così via fino a considerare tutti i fattori.

Principio d'identità dei polinomi

Due polinomi

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

e

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$$

sono uguali se sono uguali i coefficienti, precisamente

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n.$$

3.8 Prodotti notevoli

In matematica, un prodotto notevole è un'identità che compare spesso nel calcolo letterale, in particolare per effettuare il prodotto di polinomi di forme particolari. I prodotti notevoli, solitamente imparati a memoria, consentono di svolgere più rapidamente i calcoli rispetto all'applicazione diretta delle regole del calcolo letterale (come la moltiplicazione di due polinomi). Inoltre, riconoscere un prodotto notevole è utile per la scomposizione in fattori dei polinomi o di altre espressioni algebriche.

Prodotto della somma di due termini per la loro differenza

$$(x+y)(x-y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

Leggendo l'uguaglianza da destra verso sinistra, si ottiene anche la regola di scomposizione in fattori di un polinomio pari alla differenza di due quadrati. Il prodotto notevole può essere applicato anche in casi meno evidenti, per esempio:

$$(x+y+z)(x+y-z) = (x+y)^2 - (z)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$$

Oppure ancora:

$$(x+y+z)(x-y-z) = x^2 - (y+z)^2$$

Quadrato di un binomio

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + y^2 + xy = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Le due formule si possono unificare nel seguente modo:

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

Il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo termine, più il doppio prodotto del primo termine per il secondo, più il quadrato del secondo termine.

Le formule di sopra si possono facilmente generalizzare al caso di polinomi composti da più di due monomi:

$$(x+y+z)^2 = (x+y+z)(x+y+z) = x^2+xy+xz+xy+y^2+yz+xz+yz+z^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

Il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati di tutti i termini più il doppio prodotto di ogni termine per ciascuno di quelli che lo seguono.

Cubo di un binomio

$$(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y) = x^3+x^2y+2xy^2+2x^2y+xy^2+y^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(x-y)^3 = (x-y)^2(x-y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Il cubo di un binomio è uguale al cubo del primo termine, più il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo, più il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo, più il cubo del secondo termine.

Somma di cubi

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + +y^2).$$

Differenza di cubi

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + +y^2).$$

3.9 Divisione dei polinomi

Polinomio ordinato

Un polinomio si dice ordinato secondo le potenze decrescenti di una sua lettera, se i suoi termini sono ordinati in modo tale che gli esponenti di quella lettera decrescano dal maggiore al minore. Per esempio il polinomio

$$5a^3b^2c^5 - \frac{3}{4}a^2bx^3z^4 - 7ax^2\ c^2 + 15$$

è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera a.

Un polinomio di un dato grado, rispetto a una sua lettera, si dice completo quando, oltre al termine di grado massimo, contiene i termini di tutti i gradi inferiori fino a quello di grado zero, rispetto a quella lettera. In caso contrario si dice incompleto.

Ad esempio il polinomio

$$5a^3b^2c^5 - \frac{3}{4}a^2bx^3z^4 - 7ax^2\ c^2 + 15$$

è completo rispetto alla lettera a, mentre è incompleto rispetto alla lettera x.

Per la divisione fra polinomi possiamo procedere come per la divisione usuale tra numeri, utilizzando l'algoritmo di Euclide. Vale infatti il seguente Teorema:

Se A e B sono due polinomi ordinati secondo le potenze decrescenti della x, e il grado di A rispetto a x è maggiore o uguale del grado di B, e B non è il polinomio nullo, allora esiste uno ed un solo polinomio Q (detto quoziente) di grado uguale alla differenza dei gradi di A e B, ed uno ed un solo polinomio R (detto resto) di grado minore di quello di B, in modo che

A= B·Q+R.

Se $A = 5x + 4x^3 + 2x^2 - 1$ e $B = 2x - 1$, allora si ordinano i due polinomi secondo le potenze decrescenti della x e si scrive

$4x^3 + 2x^2 + 5x - 1$	$2x$-1

Si divide il primo termine del polinomio dividendo per il primo termine del polinomio divisore, ottenendo il primo termine del quoziente, ossia $2x^2$.

$4x^3 + 2x^2 + 5x - 1$	$2x$-1
	$2x^2$

Si moltiplica il primo termine del quoziente per il polinomio divisore e si sottrae dal dividendo il polinomio ottenuto, ottenendo il primo resto parziale.
Si moltiplica, $2x^2$ per il divisore ($2x$-1) e si aggiunge, col segno cambiato, il prodotto ottenuto, cioè $-4x^2+2x^2$, al dividendo, ottenendo il primo resto parziale.

$$
\begin{array}{r|l}
\mathbf{4x^3+2x^2+5x-1} & 2x-1 \\ \cline{2-2}
\mathbf{-4x^3+2x^2} & 2x^2 \\ \cline{1-1}
\mathbf{4x^2+5x-1} &
\end{array}
$$

Si divide il termine di grado più alto del primo resto parziale per il primo termine del polinomio divisore, ottenendo così il secondo termine del quoziente.
Si divide, cioè, $4x^2$ per $2x$ ottenendo $2x$ che è il secondo termine del quoziente.

$$
\begin{array}{r|l}
\mathbf{4x^3+2x^2+5x-1} & 2x-1 \\ \cline{2-2}
\mathbf{-4x^2+2x^2} & 2x^2+2x \\ \cline{1-1}
\mathbf{4x^2+5x-1} &
\end{array}
$$

Si moltiplica questo secondo termine del quoziente per il polinomio divisore e si continua l'operazione, come si è fatto per il primo termine del quoziente, finché si ottiene un resto parziale nullo o di grado inferiore a quello del divisore.
Si moltiplica, cioè, $2x$ per il divisore ($2x$-1) e si aggiunge, col segno cambiato, il prodotto ottenuto, cioè, $-4x^2+2x$, al primo resto parziale, ottenendo il secondo resto parziale.

$$
\begin{array}{r|l}
\mathbf{4x^3+2x^2+5x-1} & 2x-1 \\ \cline{2-2}
\mathbf{-4x^3+2x^2} & 2x^2+2x \\ \cline{1-1}
\mathbf{4x^2+5x-1} & \\
\mathbf{-4x^2+2x} & \\ \cline{1-1}
\mathbf{7x-1} &
\end{array}
$$

Poiché il grado di tale resto è uguale a quello del divisore , si ripete il procedimento ottenendo il terzo termine del quoziente, cioè $\frac{7}{2}$ ed il successivo resto, cioè $\frac{5}{2}$ che essendo di grado zero e quindi minore del grado del divisore, è il resto della divisione.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & +2x^2 & +5x & -1 & 2x-1 \\
\cline{5-5}
-4x^3 & +2x^2 & & & \\
\cline{1-4}
 & 4x^2 & +5x & -1 & 2x^2+2x+\frac{7}{2} \\
 & -4x^2 & +2x & & \\
\cline{2-4}
 & & 7x & -1 & \\
 & & -7x & +\frac{7}{2} & \\
\cline{3-4}
 & & & \frac{5}{2} &
\end{array}
$$

Dunque, risulta,

Q= $2x^2+2x+\frac{7}{2}$, e il resto è R= $\frac{5}{2}$.

Per verificare, che l'operazione sia corretta, si calcola B·Q+R e si controlla se è uguale ad A. Infatti

$$
\begin{aligned}
&B\cdot Q+R= \\
&=(2x-1)\left(2x^2+2x+\frac{7}{2}\right)+\frac{5}{2}= \\
&=4x^3+4x^2+7x-2x^2-2x-\frac{7}{2}+\frac{5}{2}= \\
&=4x^3+2x^2+5x-1=A.
\end{aligned}
$$

3.10 Divisibilità di un polinomio per un binomio di primo grado, teorema del resto.

Nel seguito, per indicare un polinomio, invece di usare semplicemente una lettera ad esempio A, per mettere in evidenza che tale polinomio dipende dalla lettera *x*, lo indicheremo con il simbolo A(*x*), che si legge "A di *x*".

Ad esempio, sia $A(x)=3x^3-2x^2+5$, calcoliamo il valore di questo polinomio per *x*=1. Si ha:

$$A(1)=3\cdot 1^3-2\cdot 1^2+5=6.$$

È facile verificare che A(0) = 5.

Consideriamo ora un polinomio $A(x)=3x^3-2x^2+5$, ordinato secondo le potenze decrescenti della *x* e lo dividiamo per *x*-1. Utilizzando l'algoritmo di Euclide, prima considerato, si trova il polinomio quoziente che indicheremo con Q(*x*), di grado 2, ed il polinomio resto, che dovendo avere grado minore del divisore x-1, o è zero o è di grado zero rispetto alla x, cioè è un numero diverso da zero che indicheremo con R. Si ha:

$$\boldsymbol{A(x) = (x-1)\cdot Q(x) + R,}$$

e questa uguaglianza è valida per ogni valore attribuito alla lettera x.
Se sostituiamo alla x il numero 1, cioè l'opposto del termine noto del divisore, si ha:

$$\boldsymbol{A(1) = 3\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 5,}$$

ed inoltre $\boldsymbol{A(1) = (1-1)\cdot Q(1) + R = R,}$ pertanto R=5. Questa proprietà che abbiamo verificato su un esempio è valida in generale ed è nota come il **Teorema del resto**:
Il resto della divisione di un polinomio A(x) per un binomio x-b, è dato dal valore che assume il polinomio quando al posto della lettera x si sostituisce il numero b, ossia l'opposto del termine noto del divisore.
Per esempio, il resto della divisione del polinomio $\boldsymbol{A(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4}$ per il binomio x-2 è $\boldsymbol{A(2) = 2\cdot 2^3 - 5\cdot 2^2 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0.}$ Quindi il polinomio dato è divisibile esattamente per x-2.
Il resto della divisione del polinomio $\boldsymbol{A(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4}$ per il binomio x+1 è

$$\boldsymbol{A(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 5\cdot(-1)^2 + 4 = -2 - 5 + 4 = -3,}$$

e quindi il polinomio dato non è divisibile esattamente per x+1.
È importante ricordare che il teorema del resto ci consente di calcolare direttamente, cioè senza eseguire la divisione, il resto della divisione di un polinomio A(x) per un binomio del tipo x-b. In particolare, se A(x) è divisibile esattamente per x-b, allora il resto della divisione deve essere zero, ossia R=0, ma essendo A(b)=R, si ha anche A(b)=0, cioè il polinomio A(x) si annulla per x=b. Viceversa, se A(b)=0, allora anche R=0 e quindi il polinomio A(x) è divisibile esattamente per x-b.
Possiamo enunciare ora il noto **Teorema di Ruffini**:
Un polinomio A(x) è divisibile esattamente per il binomio x-b soltanto se il polinomio si annulla per x=b, cioè se il valore che assume A(x) per x=b è zero.
Ricordiamo che uno *zero o radice del polinomio* A(x) è ogni valore della variabile x che annulla il polinomio A(x).
Dal teorema di Ruffini segue che se un polinomio è divisibile per (x-b), allora il numero b è uno zero del polinomio, e viceversa.

3.11 Regola di Ruffini

La regola di Ruffini ci permette di determinare il quoziente ed il resto della divisione di un polinomio per un binomio x- b, senza eseguire la divisione.
Illustriamo la regola di Ruffini con un esempio.
Per dividere $\boldsymbol{A(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4}$ per $B(x)$=x-b= x-1, con la regola di Ruffini:

1. prendiamo i coefficienti di $A(x)$, ordinato secondo le potenze decrescenti della x, e li si scrivano in ordine. 2, -5, 0, 4. Tracciamo un grafico con due linee verticali ed una orizzontale e ponendo il termine noto 4 a destra della seconda linea verticale, scriviamo i coefficienti 2, -5 e zero in quanto non compare nessun termine di primo grado in x;

	2	**−5**	**0**	**4**

2. scriviamo quindi b= 1 in basso a sinistra, proprio sopra la riga:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & 0 & 4 \\ 1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

3. copiamo il coefficiente di sinistra *2* in basso, subito sotto la riga:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & 0 & 4 \\ 1 & & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

4. moltiplichiamo il numero più a destra di quelli sotto la riga per b=1, e lo si scriviamo sopra la riga, spostato di un posto a destra. Sommiamo questo valore con quello sopra di lui nella stessa colonna:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & 0 & 4 \\ 1 & & 2 & & \\ \hline & 2 & -3 & & \end{array}$$

5. ripetiamo il passo 4 fino al termine dei coefficienti:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & 0 & 4 \\ 1 & & 2 & -3 & -3 \\ \hline & 2 & -3 & -3 & 1 \end{array}$$

I valori sotto la riga orizzontale sono i coefficienti del polinomio risultante $Q(x)$, il cui grado sarà inferiore di uno a quello di $A(x)$ ed 1 è il resto.
Pertanto $\boldsymbol{Q(x) = 2x^2 - 3x - 3}$ ed R=1.

3.12 Scomposizione dei polinomi in fattori

Scomporre un polinomio in fattori o equivalentemente fattorizzare un polinomio significa scriverlo come prodotto di due o più polinomi di grado minore a quello di partenza. In questo paragrafo riassumiamo le varie tecniche possibili, precisamente:

1. raccoglimento a fattore comune
2. riconoscimento di un prodotto notevole
3. fattorizzazione di binomi e trinomi particolari
4. applicazione del Teorema del resto.

Raccoglimento a fattore comune

Se tutti i termini di un polinomio contengono uno stesso fattore comune, il polinomio si può trasformare nel prodotto di quel fattore, per il polinomio che si ottiene da quello dato, dividendo tutti i suoi termini per il fattore considerato.

Esempi

1. $9x^3+27x^2+81x$

In tutti i termini del trinomio è possibile individuare il fattore comune 8*x*, che è il massimo comune divisore (M.C.D.) dei tre monomi; lo poniamo in evidenza ed abbiamo:

$9x^3+27x^2+81x=9x(x^2+3x+9).$

Il secondo fattore, x^2+3x+9, risulta dalla divisione (termine a termine) del trinomio originale per il fattore posto in evidenza. Ricordiamo che quando si dividono due potenze aventi la stessa base i loro esponenti vanno sottratti; così $9x^3:9x=x^2$. Potremmo raccogliere ancora una *x* nei primi due termini di x^2+3x+9, ma ciò non porterebbe a un'ulteriore fattorizzazione. Vedremo come altre volte siano possibili fattorizzazioni mediante raccoglimenti successivi.

2. $a^m x^n + a^{m-2}x^{n-1}$

In questa espressione la lettera *x* rappresenta la variabile del polinomio, mentre la lettera *a* indica una costante. Raccogliamo il M.C.D. dei due monomi, scegliendo le lettere al grado più basso con cui esse compaiono nel binomio:

$$a^m x^n + a^{m-2}x^{n-1} = a^{m-2}x^{n-1}(1+a^2x).$$

3. $(2x+3c)(3x+c)-(3x+c)(x-c)$

Nel raccoglimento a fattore comune non è obbligatorio raccogliere un monomio. In questo caso, per esempio, possiamo raccogliere il binomio comune $3x+c$:

$$(2x+3c)(3x+c)-(3x+c)(x-c)=(3x+c)[(2x+3c)-(x-c)]=$$
$$=(3x+c)(x+4c).$$

4. $x^2(2x+1)(3x-2)-x^5(2-3x)(x-5)$

Possiamo riscrivere il polinomio in modo da far cambiare segno al secondo fattore del secondo addendo ed abbiamo:

$$x^2(2x+1)(3x-2)-x^5(2-3x)(x-5)=$$
$$=x^2(2x+1)(3x-2)+x^5(-2+3x)(x-5)=$$

raccogliendo il fattore comune $x^2(3x-2)$ abbiamo:

$$= x^2(2x+1)(3x-2) + x^5(-2+3x)(x-5) =$$
$$= x^2(3x-2)\left[(2x+1) + x^3(x-5)\right] =$$
$$= x^2(3x-2)(2x+1+x^4-5x^3).$$

Raccoglimenti parziali e successivi a fattore comune
Talvolta un polinomio, pur non avendo un fattore comune a tutti i suoi termini, si può considerare come somma di due o più polinomi parziali scomponibili ciascuno, nel prodotto di un fattore e di un termine polinomiale; se quest'ultimo è comune ai termini ottenuti lo si può raccogliere a fattore comune.

1. $ax-ay+bx-by$

Effettuiamo la fattorizzazione di questo quadrinomio medianti passi successivi, detti raccoglimenti parziali: raccogliamo un fattore nel primo e nel secondo termine, e un fattore comune, diverso dal precedente, nel terzo e nel quarto termine:

$$ax-ay+bx-by=a(x-y)+b(x-y).$$

Non abbiamo ottenuto ancora una fattorizzazione, ma in questo modo possiamo raccogliere il fattore commune $(x-y)$ e continuare la scomposizione:

$$= (x-y)(a+b).$$

2. $3ax-3a-x+1$

Raccogliamo dai primi due termini $3a$ e dagli ultimi due -1, ed abbiamo:

$$3ax-3a-x+1=3a(x-1)-(x-1)=(x-1)(3a-1).$$

Fattorizzazione mediante i prodotti notevoli
I prodotti notevoli che abbiamo considerato nel paragrafo 3.8 sono molto utili per la scomposizione dei polinomi in fattori. Per l'uso dei prodotti notevoli occorre considerare se il polinomio da fattorizzare è un binomio, un trinomio o un quadrinomio. Ricordiamo nel seguente specchietto i principali prodotti notevoli:

Tipo di polinomio	Sviluppo	Prodotto notevole
Binomio	x^2-y^2	$(x-y)(x+y)$
Trinomio	$x^2+y^2\pm 2xy$	$(x\pm y)^2$
Quadrinomio	$x^3+3xy^2\pm 3x^2y\pm y^3$	$(x\pm y)^3$

Esempi

1. $9x^2+1-6x$

Essendo un trinomio, cerchiamo di scomporlo come quadrato di un binomio. Dobbiamo individuare in esso due quadrati e verificare che il terzo termine sia il doppio prodotto delle loro basi. Abbiamo:

$$9x^2+1-6x=(3x)^2+1^2-2\cdot(3x)\cdot 1=(3x-1)^2$$

dove abbiamo inserito il segno – fra i due termini perché il doppio prodotto è preceduto dal segno -.

2. $16x^6+81+72x^3$

Essendo un trinomio, cerchiamo di scomporlo come quadrato di un binomio. Il primo termine è il quadrato di $4x^3$; il secondo termine è il quadrato di 9 ed il terzo termine è il doppio prodotto delle loro basi:

$$16x^6+81+72x^3=(4x^3)^2+9^2+2\cdot 4x^3\cdot 9=(4x^3+9)^2.$$

3. $27x^3+3x-9x^2$

Eseguiamo un raccoglimento totale:

$$27x^3+3x-18x^2=3x(9x^2+1-6x) =$$

riconosciamo che il trinomio è un quadrato perfetto, pertanto:

$$=3x(3x+1)^2.$$

4. $8x^3+12x^2+6x+1$

Il primo e quarto termine sono due cubi, il secondo termine è il triplo prodotto del quadrato della base del primo cubo per la base del secondo ed il terzo termine è il triplo prodotto della base del primo cubo per il quadrato della base del secondo, quindi

$$8x^3+12x^2+6x+1=(2x)^3+1^3+3(2x)^2\cdot 1+3(2x)\ 1^2=(2x+1)^3.$$

5. $2x^5-8x$

Raccogliamo il fattore comune:

$$2x^5-8x=2x(x^4-4)=$$

entro le parentesi c'è una differenza di quadrati che è un prodotto notevole, quindi

$$=2x(x^2-2)\ (x^2+2).$$

6. $(x+3)^2-25$

Possiamo riconoscere il prodotto notevole della differenza di due quadrati, pertanto:

$$(x+3)^2-25=(x+3+5)(x+3-5)= (x+8)(x-2).$$

Fattorizzazione dei binomi del tipo $a^n \pm b^n$

I binomi del tipo $a^n \pm b^n$ sono quasi sempre divisibili per un binomio di I grado del tipo $a+b$ o $a-b$, con l'unica eccezione di $a^n + b^n$ ed n pari. Distinguiamo vari casi:

I caso

Fattorizzazione di $a^n - b^n$.

Distinguiamo due sottocasi:

i) n pari. In questo caso ci si riconduce alla differenza di due quadrati.

ii) n dispari. Il binomio $a^n - b^n$ è sempre divisibile per $a-b$. Per $n=3$ conviene ricordare la formula:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Esempi

6. $81a^4-16b^4$

Il binomio è del tipo $a^n - b^n$con n pari, quindi si fattorizza come differenza di due quadrati:

$$81a^4-16b^4 =(9a^2)^2-(4b^2)^2=(9a^2-4b^2)(9a^2+4b^2)=(3a-2b)(3a+2b)(9a^2+4b^2).$$

7. $8a^3-125$

$$8a^3-125=(2a-5)(4a^2+10a+25).$$

II caso

Fattorizzazione di $a^n + b^n$.

Distinguiamo due sottocasi:

i) n pari. In questo caso il binomio $a^n + b^n$ non è divisibile né per a-b né per a+b.

ii) n dispari.

iii) Il binomio è del tipo $a^n + b^n$ con n dispari. Il binomio $a^n + b^n$ è sempre divisibile per a+b. Per n=3 conviene ricordare la formula:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Per n>3 e dispari conviene effettuare la divisione per (a+b).

Esempio

1. $27a^3+64$

Il binomio è del tipo $a^n + b^n$ con n dispari, lo fattorizziamo utilizzando la relazione precedente:

$$27a^3+64=(3a+4)(9a^2-12a+16).$$

Fattorizzazione di trinomi particolari

Un trinomio del tipo:

$$x^2+(a+b)x+ab$$

in cui il primo coefficiente è uguale a 1, il secondo è la somma di due numeri ed il terzo il loro prodotto si scompone nel seguente modo:

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

Esempi

1. $x^2+7x+12$

Per poter applicare la regola precedente dobbiamo vedere se esistono due numeri la cui somma è 7 ed il prodotto è 12. È facile vedere che questi numeri sono 4 e 3. Quindi,

$$x^2+7x+12=(x+4)(x+3).$$

2. $3x^2+5x-22$

Per poter applicare la regola precedente occorre che il coefficiente del termine di secondo grado sia 1. Mettendo in evidenza il coefficiente 3, si ha:

$$3x^2+5x-22=3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{22}{3}\right),$$

nel trinomio in parentesi si verifica che:

$$\left(\frac{11}{3}\right)\cdot(-2)=-\frac{22}{3} \text{ e } \left(\frac{11}{3}\right)+(-2)=\frac{5}{3},$$

segue allora:

$$\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{22}{3}\right)=\left(x+\frac{11}{3}\right)(x-2),$$

quindi

$$3x^2+5x-22=3\left(x+\frac{11}{3}\right)(x-2)=(3x+11)(x-2).$$

Fattorizzazione mediante il Teorema del resto e la regola di Ruffini

Il teorema di Ruffini, in molti casi è molto utile, per scomporre un polinomio. Infatti, sappiamo che se un un polinomio $A(x)$ è divisibile per x-b, si ha $A(b)$ =0, e in tal caso se il quoziente della divisione di $A(x)$ per $(x$-$b)$ è $Q(x)$, si ha:

$$A(x)=(x-b)Q(x),$$

e così il polinomio *A(x)* è scomposto nel prodotto di due fattori.

Ad esempio si può scomporre il polinomio $\boldsymbol{A(x) = 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2}$, sapendo che si annulla per x =-2, infatti A(-2)=0; eseguendo la divisione con la regola di Ruffini si ha:

$$\boldsymbol{3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = (x+2)(3x^2 - 2x + 1)}.$$

Per la scomposizione di un polinomio in fattori è importante conoscere gli zeri del polinomio, ossia i numeri che sostituiti nel polinomio al posto della variabile, fanno assumere al polinomio il valore zero. Gli zeri razionali, ossia appartenenti all'insieme $\mathbb{Q}$, di un polinomio possono essere trovati utilizzando il seguente **Teorema del resto**:

Gli zeri razionali di un polinomio A(x), sono da cercare fra i divisori del termine noto, presi sia con il segno positivo che negativo, o tra i rapporti fra tali divisori e quelli del coefficiente del termine di grado massimo.

Per esempio consideriamo il polinomio $\boldsymbol{A(x) = 3x^3 + 4x^2 - 3x + 2}$, fissiamo l'attenzione sul termine noto 2, i divisori di 2 sono: 1,-1,2,-2.

Poiché i divisori del coefficiente di grado massimo 3 sono 1, -1,3,-3, cerchiamo tutti i possibili rapporti:

$$\left\{\boldsymbol{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \frac{2}{3}}\right\}.$$

Si può verificare che A(1)=6≠0, A(-1)= 6≠0, A(2)=24+16-6+2=36≠0, A(-2)=0,

$$\boldsymbol{A\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0, \quad A\left(-\frac{1}{3}\right) \neq 0, \quad A\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0, \quad A\left(-\frac{2}{3}\right) \neq 0;}$$

pertanto il polinomio A(x) è divisibile per (x+2) ed applicando la regola di Ruffini si ha:

$$\boldsymbol{3x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = (x+2)(3x^2 - 2x + 1)}.$$

Tabella di riepilogo per le scomposizioni

Prima operazione da fare è il raccoglimento a fattore comune poi si contano i termini	
N. termini	Scomposizioni possibili
2 termini	• Differenza di quadrati: (differenza di potenze pari) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ • Somma di cubi (somma di potenze dispari) $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$ • Differenza di cubi (differenza di potenze dispari) $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$
3 termini	• Quadrato del binomio $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ • Trinomio notevole $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ • Ruffini
4 termini	• Cubo del binomio $a^3 +3a^2 b+3ab^2 +b^3= (a+b)^3$ • Raccoglimento a fattor comune parziale $ax+ay +bx+by= a(x+y)+b(x+y)=(a+b)(x+y)$ • Raggruppamento • Ruffini
5 termini	• Raggruppamenti • Ruffini
6 termini	• Quadrato del trinomio $a^2+b^2+c^2 +2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$ • Raccoglimento parziale $ax+bx+ay+by+az+bz= x(a+b)+y(a+b)+z(a+b)=(a+b)(x+y+z)$ • Raggruppamento • Ruffini

ESERCIZI PROPOSTI

Fattorizzare con il metodo più opportuno i seguenti polinomi:

1. $x^3 - 8x^2 + x + 42$
2. $ax^2 + ay^2 - bx^2 - by^2$
3. $9a^2x^4 - 16y^6$
4. $x^3 - 27$
5. $x^3 + 8a^3$
6. $3x^3 - 8x^2 - 41x + 30$
7. $20a^2bx^2 - 60a^2bxy + 45a^2by^2$
8. $9a^6 - 3a^3b^2 + \frac{1}{4}b^4$

3.13 M.C.D. e m.c.m. di due o più polinomi

Si dice *massimo comune divisore (M.C.D.)* di due o più polinomi, l'espressione algebrica, di grado più elevato, per la quale i polinomi dati sono divisibili.
Il M.C.D. di due o più polinomi, ciascuno dei quali scomposto in fattori primi, è dato dal prodotto dei fattori comuni a tutti i polinomi presi, ciascuno una volta sola, con il minimo esponente.

Si dice *minimo comune multiplo (m.c.m.)* di due o più polinomi, l'espressione algebrica, di grado più piccolo, la quale sia divisibile per ciascuno dei polinomi dati.
Il m.c.m. di due o più polinomi, ciascuno dei quali scomposto in fattori primi, è dato dal prodotto dei fattori comuni e non comuni dei polinomi presi, ciascuno una sola volta, con il massimo esponente.

Esempio
Determinare il M.C.D. e m.c.m. dei seguenti polinomi:
$x^2 - 3x + 2; \quad x^2 + 2x - 3; \quad x^2 + 3x - 4.$
Scomponendo i polinomi in fattori primi si ha:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2);$$
$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3);$$
$$x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4).$$

Il M.C.D. dei polinomi dati è: x-1
Ed il m.c.m. è $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4).$

3.14 Frazioni algebriche

Si definisce *frazione algebrica* il quoziente di due polinomi interi A e B:

$$\frac{A}{B} \quad dove \ B \neq 0.$$

Esempio di frazione algebrica

$$\frac{3x+y}{x+3} \quad con\ x+3 \neq 0.$$

Una *frazione algebrica* è *ridotta ai minimi termini* se numeratore e denominatore non hanno alcun fattore comune. Per ridurre una frazione ai minimi termini basta dividere numeratore e denominatore per il loro M.C.D., se esso è diverso da 1.

Ad esempio la frazione $\frac{20a^3-10a^2}{5a^2}$ si riduce ai minimi termini, mettendo $10a^2$ in evidenza al numeratore, e semplificando la frazione nel seguente modo:

$$\frac{20a^3-10a^2}{5a^2} = \frac{10a^2(2a-1)}{5a^2} = 2(2a-1).$$

Due frazioni algebriche si dicono *equivalenti* quando assumono lo stesso valore per qualunque valore numerico attribuito alle lettere che compaiono nei termini delle frazioni.
Dei valori attribuiti alle lettere si devono escludere quei valori numerici che annullano i denominatori di queste frazioni algebriche.
Sono ad esempio, equivalenti le frazioni

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} \quad e \quad \frac{a-b}{a+b};$$

infatti, ad esempio per a=0 e b=1, le due frazioni risultano uguali a -1.
Operazioni con le frazioni algebriche
Con le frazioni algebriche si può operare con tecniche simili a quelle delle frazioni numeriche.
Somma algebrica
Ricordiamo come operiamo per la somma di frazioni numeriche ad esempio

$$\frac{24}{15}+\frac{3}{20}.$$

Troviamo il m.c.m.(15,20)=5·3·2^2=60.
Trasformiamo ogni frazione in una frazione equivalente con lo stesso denominatore 60:

$$\frac{24\cdot 4}{60}+\frac{3\cdot 3}{60}.$$

Sommiamo le due frazioni: $\frac{96+9}{60}=\frac{105}{60};$

riduciamo la frazione ai minimi termini $\frac{105}{60}=\frac{7}{4}.$

In modo analogo eseguiamo la somma delle seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{2ab}{a^2-b^2}-\frac{ab^2}{a^2+ab};$$

1. scomponiamo in fattori i denominatori e li poniamo diversi da zero:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \quad con \quad a-b\neq 0 \quad e \quad a+b\neq 0$$

$$a^2+ab=a(a+b) \quad con \quad a+b\neq 0 \quad e \quad a\neq 0$$

$$\frac{2ab}{(a-b)(a+b)}-\frac{ab^2}{a(a+b)}$$

2. troviamo il m.c.m. fra i polinomi al denominatore:
m.c.m.*(((a-b)(a+b); a(a+b))=a(a-b)(a+b);*

3. trasformiamo ogni frazione, in frazione equivalente a denominatore *a(a-b)(a+b),*

$$\frac{2ab}{(a-b)(a+b)}=\frac{2ab\cdot a}{a(a-b)(a+b)}=\frac{2a^2b}{a(a-b)(a+b)}$$

$$\frac{ab^2}{a(a+b)}=\frac{ab^2(a-b)}{a(a+b)(a-b)}=\frac{a^2b^2-ab^3}{a(a+b)(a-b)}$$

4. sommiamo algebricamente le frazioni:

$$\frac{2a^2b}{a(a-b)(a+b)}-\frac{a^2b^2-ab^3}{a(a+b)(a-b)}=\frac{2a^2b-a^2b^2+ab^3}{a(a-b)(a+b)}$$

5. scomponiamo in fattori il numeratore

$$\frac{ab(2a-ab+b^2)}{a(a-b)(a+b)}$$

6. riduciamo la frazione ai minimi termini

$$\frac{ab(2a-ab+b^2)}{a(a-b)(a+b)}=\frac{b(2a-ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}.$$

Moltiplicazione, divisione e potenze

Ricordiamo la moltiplicazione, la divisione e la potenza tra frazioni numeriche:

$$\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3\cdot 5}{7\cdot 4}=\frac{15}{28}$$

$$\left(-\frac{5}{8}\right):\frac{3}{4}=-\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{3}=-\frac{5}{2\cdot 3}=-\frac{5}{6}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{2^3}{3^3}=-\frac{8}{27}.$$

Analogamente si procede con le frazioni algebriche, scomponendo in fattori sia il numeratore che il denominatore ed imponendo che il denominatore sia diverso da zero.

Esempi:

1.

$$\frac{3x^2y^3z}{8a^2b^3}\cdot\frac{2ab}{12xy^5z^2}=\frac{x}{16ab^2y^2z}\quad con\quad a,b,x,y,z\neq 0.$$

2.

$$\left(\frac{x^3+x^4}{x-y}\right):\frac{3x+3}{x^2-y^2}=\frac{x^3(1+x)}{x-y}\cdot\frac{x^2-y^2}{3x+3}=$$

$$=\frac{x^3(1+x)}{x-y}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{3(x+1)}=$$

$$=\frac{x^3(x+y)}{3},\quad con\quad x\neq y, x\neq -1.$$

3.

$$\left(\frac{x^2+2xy+y^2}{5x}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{(x+y)^2}{5x}\right)^3=\frac{(x+y)^6}{5^3x^3}=\frac{(x+y)^6}{125x^3},\quad con\quad x\neq 0.$$

ESERCIZI PROPOSTI

1. $\dfrac{x^2-1}{x^2+x}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^2-x}$;
2. $\dfrac{xy+xy^2}{x^2+2xy+y^2}:\dfrac{y^2+2y+1}{x^4+2x^3y+x^2y^2}$
3. $\left(\dfrac{5x+5}{x^2-9}\right)^3$

Capitolo 4

Equazioni razionali

4.1 Introduzione

Le equazioni sono fondamentali nell'analisi matematica, in particolare nello studio di una funzione ed in tanti altri campi. In questo capitolo consideriamo le equazioni razionali, ossia quelle in cui l'incognita compare in espressioni polinomiali, dei seguenti tipi:

- equazioni di primo grado,
- equazioni di secondo grado,
- equazioni abbassabili di grado,
- equazioni di grado superiore al secondo.

Richiamiamo alcuni principi, validi per tutti i tipi di equazioni.

Primo principio di equivalenza

Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri di un'equazione una stessa quantità l'equazione resta equivalente alla data.
Per membro di un'equazione si intende tutto ciò che c'è prima dell'uguale (primo membro) e tutto ciò che c'è dopo l'uguale (secondo membro).
Ad esempio:

$$3x - 6 = 0$$

aggiungo +6 da entrambe le parti; potrei aggiungere o togliere qualunque numero ma io aggiungo il numero (col segno cambiato così va via) che c'è vicino al termine con la x per rendere l'equazione più semplice.
Ottengo:

$$3x -6 + 6 = 0 + 6$$
$$3x = 6.$$

In un'equazione posso trasportare da un membro all'altro, cambiando di segno, il termine trasportato.

Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per una stessa quantità *diversa da zero* l'equazione resta equivalente alla data.

Ad esempio:

$$3x = 6$$

divido da entrambe le parti per 3 e ottengo x=2.

4.2 Equazioni di I grado

Ricordiamo che in generale un'*equazione* si dice *ridotta a forma normale* se è del seguente tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Indicato con

p(x) il polinomio al primo membro

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

si chiama grado di un'equazione algebrica, il grado del polinomio p(x). Pertanto un'equazione di primo grado, detta anche lineare, si può sempre scrivere nella forma

$$ax+b=0$$

con a e b numeri reali.
Le soluzioni di un'equazione possono essere una, nessuna o infinite.

1) Se a e b sono entrambi non nulli, l'equazione $ax+b=0$, ammette l'unica soluzione
$$x = -\frac{b}{a}.$$
2) Se a=0 e b è diverso da zero, l'equazione non ha soluzione e si dice *impossibile*.
3) Se $a=b=0$, ossia l'equazione si trasforma in una identità, l'equazione si dice indeterminata, in quanto qualsiasi valore assegnato all'incognita verifica l'uguaglianza.

Esempi

1. 30-5(x-2)=10(2x+1)-6(3+4x)

Sviluppiamo le parentesi:

$$30-5x+10=20x+10-18-24x,$$

trasportiamo al primo membro i termini con l'incognita, al secondo membro i termini noti (applicando il I principio di equivalenza) e semplicando (cancellando) i termini uguali, abbiamo:

$$-5x-20x+24x = -30-18,$$
$$-x=-48,$$

per il secondo principio di equivalenza abbiamo:

$$x=48.$$

In questo caso $a=b$=1 e l'equazione è determinata.

2. *6-3(x-5)-18(x-1)=14(3-x)-7x*

Analogamente si ha:

$$6-3x+15-18x+18=42-12x-7x$$
$$-3x-18x+12x+7x=-6-15-18+42$$
$$0\cdot x=3$$
$$0=3$$

L'equazione è impossibile.

3.
$$\frac{1-5x}{5} - \frac{1-4x}{4} - \frac{1-2x}{2} = x - \frac{11}{20}$$

Abbiamo

$$4(1-5x)-5(1-4x)-10(1-2x)=20x-11,$$
$$4-20x-5+20x-10+20x=20x-11$$
$$-20x+20x+20x-20x=-11-4+5+10$$
$$0=0$$

L'equazione è indeterminata.

4.3 Equazioni di II grado

Un'equazione di II grado in forma normale è del tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove *a, b, c* sono numeri reali.

Indicati con x_1 e x_2 gli zeri (o radici) di tale equazione, la seguente formula risolutiva:

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ci permette di calcolarli, ossia le due soluzioni sono:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Il radicando $\Delta=b^2-4ac$ della radice quadrata si chiama discriminante *dell'equazione.*
Poiché il radicando di una radice quadrata è un numero reale se non è negativo, ne consegue che l'equazione ha radici reali se il discriminante è positivo o nullo, diversamente le radici sono immaginarie. Precisamente abbiamo tre casi:

i) $\Delta > 0$, le radici sono reali e distinte
ii) $\Delta = 0$, le radici sono reali e coincidenti
iii) $\Delta < 0$, non ci sono radici reali.

Esempi

1. $(x-2)^2+(x-3)(x-1)+5=0$

Svolgendo i calcoli si ha:

$$x^2+4-4x+x^2-4x+3+5=0$$
$$2x^2-8x+12=0$$
$$x^2-4x+6=0.$$

Applicando la formula risolutiva abbiamo:

$$x_{12} = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2},$$

essendo $\Delta<0$ non ci sono radici reali.

2. $\frac{x(x+2)}{4} + \frac{x(x-5)}{3} = \frac{2x^2-15}{4}$

$$3x(x+2)+4x(x-5)=3(2x^2-15)$$
$$3x^2+6x+4x^2-20x=6x^2-45$$
$$x^2-14x+45=0$$

$\Delta=196-180=16,$

applicando la formula risolutiva abbiamo:

$$x_{12} = \frac{14 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{14 \pm 4}{2},$$

pertanto

$$x_1 = \frac{14-4}{2} = 5 \quad e \quad x_2 = \frac{14+4}{2} = 9$$

sono due radici reali e distinte dell'equazione.

3. $9x^2+12x+4=0$

Applicando la formula risolutiva abbiamo:

$$x_{12} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-144}}{18} = \frac{-12 \pm 0}{18},$$

quindi

$$x_1 = x_2 = -\frac{2}{3},$$

pertanto si hanno due radici reali e coincidenti.

Equazioni a coefficienti letterali

Un'equazione letterale è un'equazione nella quale i coefficienti sono espressioni letterali o parametri. Si risolvono riducendo l'equazione a forma normale, considerando le condizioni di esistenza delle eventuali frazioni e facendo attenzione al fatto che, per particolari valori delle lettere, l'equazione può diventare di primo grado o impossibile o indeterminata.

Esempi

1. $ax^2 + (a^2-1)x - a = 0$

Se $a=0$, l'equazione diventa di I grado e della forma $-x=0$, la cui soluzione è $x=0$.

Se $a \neq 0$, abbiamo applicando la formula risolutiva per le equazioni di II grado:

$$x_{12} = \frac{-(a^2-1) \pm \sqrt{(a^2-1)^2 + 4a^2}}{2a} =$$

$$= \frac{1-a^2 \pm \sqrt{a^4+1-2a^2+4a^2}}{2a} =$$

$$= \frac{1-a^2 \pm \sqrt{a^4+1+2a^2}}{2a} =$$

$$= \frac{1-a^2 \pm \sqrt{(1+a^2)^2}}{2a} = \frac{1-a^2 \pm (1+a^2)}{2a}$$

Pertanto abbiamo:

$$x_1 = \frac{1-a^2+1+a^2}{2a} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$$

$$x_2 = \frac{1-a^2-1-a^2}{2a} = \frac{-2a^2}{2a} = -a.$$

2. $4x^2 - 8ax + 3a^2 + b^2 = 0$

$$x_{12} = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 16(3a^2 + b^2)}}{8} =$$

$$= \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2 - 16b^2}}{8} =$$

$$= \frac{8a \pm \sqrt{16a^2 - 16b^2}}{8} =$$

$$= \frac{8a \pm \sqrt{16(a^2 - b^2)}}{8} = \frac{8a \pm 4\sqrt{a^2 - b^2}}{8} = \frac{2a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{2}$$

Se $a^2 - b^2 = 0,\quad ossia \quad a = b \quad o \quad a = -b$, l'equazione ha due soluzioni reali e coincidenti $x=a$.

Se $a^2 - b^2 < 0,\quad ossia \quad a^2 < b^2,$ l'equazione non ha soluzioni reali.

Se $a^2 - b^2 > 0,$ l'equazione ha due soluzioni reali e distinte, precisamente:

$$x_1 = \frac{2a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \quad e$$

$$x_2 = \frac{2a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}.$$

4.4 Equazioni di II grado fratte

Le equazioni fratte o frazionarie sono quelle in cui l'incognita compare al denominatore di qualche frazione. Possiamo risolverle riducendole a forma intera, in modo analoghe a quelle di primo grado.

Dobbiamo moltiplicare ambo i membri dell'equazione per un'espressione che è il m.c.m. dei denominatori.

Dobbiamo fare inoltre attenzione al campo di esistenza delle frazioni.

Esempio

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x} - 2 = 7$$

Le condizioni di esistenza delle frazioni sono: $x \neq 1 \wedge x \neq -1$.

Il m.c.m. del denominatore è $(x-1)(x+1)$. Moltiplichiamo tutti i termini dell'equazione per il m.c.m del denominatore per eliminare i denominatori, avendo imposto la condizione che i denominatori siano diversi da zero. Abbiamo:

$$1+x-(x-1)-2(x-1)(x+1)=7(x-1)(x+1)$$
$$1+x-x+1-2x^2+2=7x^2-7$$
$$9x^2 = 11,$$

da cui

$$x = \pm\frac{\sqrt{11}}{3},$$

essendo le soluzioni dell'equazione diverse da 1 e da -1, esse sono radici dell'equazione data.

Equazioni di II grado fratte letterali

Si procede in maniera analoga alle equazioni letterali intere, si impongono le condizioni di esistenza ed infine si scartano le eventuali soluzioni non accettabili.

Esempio

$$\frac{a^2-1}{x^2}+6=\frac{5a-1}{x}$$

Il campo di esistenza è $x \neq 0$. Il m.c.m. del denominatore è x^2. Moltiplichiamo tutti i termini dell'equazione per il m.c.m. e semplifichiamo:

$$a^2-1+6x^2 = x(5a-1)$$

$$6x^2+(1-5a)x+a^2-1=0$$

$$\Delta = 1+25a^2-10a-24a^2+24 = a^2-10a+25=(a-5)^2$$

$$x_{12}=\frac{5a-1\pm(a-5)}{12},$$

le cui soluzioni sono:

$$x_1=\frac{5a-1+a-5}{12}=\frac{6a-6}{12}=\frac{a-1}{2}, \quad e$$

$$x_2=\frac{5a-1-a+5}{12}=\frac{4a+4}{12}=\frac{a+1}{3}$$

tenendo conto delle condizioni di esistenza, ossia $x \neq 0$, dobbiamo imporre anche $a \neq 1$ e $a \neq -1$.

4.5 Equazioni abbassabili di grado: le equazioni biquadratiche

Un'equazione si dice *biquadratica* se, ridotta a forma normale, è di quarto grado ed è priva dei termini di grado dispari nell'incognita x, ossia è del tipo:

$$ax^4+bx^2+c=0$$
$$con \quad a \neq 0.$$

Ponendo x^2= t, si ha un'equazione di II grado in t, si risolve e poi si sostituiscono i valori trovati t_1 e t_2 nell'equazione x^2=t e si risolvono le due equazioni di II grado come mostrano i seguenti esempi:

1. $2x^4-7x^2+3=0$

Poniamo x^2= t e otteniamo:

$$2t^2-7t+3=0$$

Risolviamo e otteniamo:

$$t_{12}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm 5}{4}$$

$$t_1=\frac{1}{2} \quad e \quad t_2=3.$$

Le soluzioni dell'equazione biquadratica si ottengono risolvendo le due equazioni:

$$x^2=\frac{1}{2} \quad e \quad x^2=3.$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione data sono:

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_3=\sqrt{3} \quad e \quad x_4=-\sqrt{3}.$$

2. $9x^4+6x^2+1=0$

Poniamo x^2= t e otteniamo:

$$9t^2+6t+1=0$$

Risolviamo e otteniamo:

$$t_{12} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{18} = -\frac{1}{3}$$

$$t_1 = \quad t_2 = -\frac{1}{3}.$$

Da cui

$$x^2 = -\frac{1}{3}$$

non ha soluzioni reali.

4.6 Equazioni di grado superiore al secondo

Consideriamo altre due classi di equazioni: le binomie e le trinomie. Le prime si risolvono con l'estrazione di radice *n*-esima e le trinomie in modo analogo alle biquadratiche, ossia per sostituzione.

Un'equazione si dice *binomia* se, ridotta a forma normale, ha l'espressione del tipo:

$$ax^n + b = 0$$

con n intero positivo ed a e b numeri reali diversi da zero.

Per n=1 ed n=2, l'equazione diventa di I e II grado e sappiamo risolverla.

Essendo a non nullo, l'equazione precedente è equivalente alla seguente equazione:

$$x^n = -\frac{b}{a}.$$

Distinguiamo due casi.

1) Se n è pari, l'equazione ha due soluzioni opposte fra loro se $-\frac{b}{a} > 0$; precisamente $x = \pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$; un'unica soluzione se $-\frac{b}{a} = 0$; non ha soluzioni se $-\frac{b}{a} < 0$.
2) Se n è dispari, l'equazione ha un'unica soluzione:

$$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}.$$

Esempi

1. $16x^4 - 1 = 0$

È equivalente all'equazione $x^4 = \frac{1}{16}$, che ammette due soluzioni:

$$x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{2}.$$

2 $7x^6 = -13$

non ammette soluzioni perché $-\frac{b}{a} < 0$.

3. $27x^3 - 8 = 0$

È equivalente a

$$x^3 = \frac{8}{27},$$

che ammette un'unica soluzione

$$x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

Un'equazione si dice *trinomia* se, ridotta a forma normale, ha l'espressione del tipo:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

con n intero positivo ed a numero reale diverso da zero.

Si risolve per sostituzione ponendo $x^n = t$. Si ottiene un'equazione di II grado in t, si risolve e le soluzioni si sostituiscono in $x^n = t$. Si hanno in generale quindi due equazioni binomie da risolvere.

Esempi

1. $4x^6 + 11x^3 - 3 = 0$

Poniamo $x^3 = t$.
Abbiamo:

$$4t^2 + 11t - 3 = 0$$

da cui

$$t = \frac{-11 \pm \sqrt{121+48}}{8} = \frac{-11 \pm 13}{8}$$

$$t_1 = -3$$

$$t_2 = \frac{1}{4}.$$

Dobbiamo risolvere le due equazioni binomie:

$$x^3 = -3 \quad e \quad x^3 = \frac{1}{4}.$$

L'equazione data ha quindi le due soluzioni:

$$x = \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3} \quad e \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

2. $x^8 + 2x^4 - 3 = 0$

Poniamo $x^4 = t$.
Abbiamo:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

da cui

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = -3$$

$$t_2 = 1.$$

Dobbiamo risolvere le due equazioni:

$$x^4 = -3 \quad e \quad x^4 = 1.$$

La prima equazione non ha soluzioni, mentre la seconda ha due soluzioni x=1 ed x=-1.

ESERCIZI PROPOSTI

1. $2x+\sqrt{5}=0$

2. $\frac{3(1-x)}{4}-\frac{2x+1}{3}=\frac{5-2x}{3}-\frac{7x-1}{8}$ $[11]$

3. $(x-4)^2=4(x+2)^2$ $[0,-8]$

4. $x^2-3\sqrt{3}x+6=0$ $[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

5. $x^2-5ax+6a^2=0$ $[2a, 3a]$

6. $\frac{x+2}{x+3}-\frac{3x+1}{x-2}=-2$ $\left[-\frac{19}{8}\right]$

7. $\frac{2x}{3x-a}-\frac{3a}{x+2a}=\frac{x(2x+a)}{3x^2+5ax-2a^2}$ $\left[\frac{a}{2}\right]$

8. $x^3-x=0$ $[0,1,-1]$

9. $x^4-9x^2=0$ $[0,3,-3]$

10. $x^4-1=0$ $[1,-1]$

11. $x^5-32=0$ $[2]$

12. $x^4+3x^2-4=0$ $[1,-1]$

13. $x^{10}-33x^5+32=0$ $[1,2]$

Capitolo 5

Disequazioni razionali

5.1 Introduzione

La risoluzione di disequazioni è uno strumento fondamentale per lo studio del campo di esistenza di funzione. In questo capitolo esamineremo i seguenti tipi:

- disequazioni razionali di primo grado
- disequazioni razionali di secondo grado
- sistemi di disequazioni
- disequazioni di grado riconducibile al primo
- disequazioni frazionarie
- disequazioni con il valore assoluto.

5.2 Disequazioni razionali di primo grado

In generale una disequazione è una diseguaglianza che è verificata per certi intervalli di valori. Ad esempio la disequazione $x-5\geq 0$ è verificata per tutti i valori della x maggiori di 5 o uguali a 5, cioè se al posto della x metto 6, 7, oppure 5,3 è vero che il primo termine della disuguaglianza è maggiore o uguale al secondo. Risolvere una disequazione significa trovare gli intervalli dei valori che sostituiti alla x rendono la diseguaglianza vera.
In una disequazione possiamo trovare solo i valori maggiori > oppure minori < di qualcosa, oppure possiamo trovare i valori maggiori e uguali ≥ oppure minori e uguali ≤. Occorre fare molta attenzione e considerare sempre se devo prendere o no il valore corrispondente all'uguale.
Una *disequazione* si dice di *primo grado* quando la x vi compare a potenza 1.
Ad esempio:

$$x - 4 \geq 3x + 2$$

è una disequazione di primo grado.
Per risolvere una disequazione valgono le stesse regole delle equazioni di primo grado con una differenza: *se moltiplico o divido per un numero negativo devo cambiare di verso la disequazione.*
Porto le x prima dell'uguale ed i numeri dopo l'uguale; chi salta l'uguale cambia di segno

$$x - 3x \geq 2 + 4,$$

da cui

$$-2x \geq 6.$$

Divido entrambi i membri per -2 e contemporaneamente cambio di verso la disequazione, semplificando ottengo

$$x \leq -3.$$

Quindi la soluzione è l'insieme delle x minori od uguali a -3.

Esempi

1. $6x + 12 - 2x > 4x - 3$
Trasporto le x prima dell'uguale, i termini noti dopo l'uguale e chi salta l'uguale cambia di segno ,

$$6x - 2x - 4x > -3 - 12$$

sommo

$$0 > -15$$

sempre vero (perché 0 è sempre superiore a -15), quindi tutto $\mathbb{R}$.

2. $\frac{x+2}{2} - 2x \geq \frac{4x+3}{3}$
Il m.c.m. è 6, porto tutte le frazioni allo stesso denominatore

$$\frac{3(x+2)}{6} - \frac{6 \cdot 2x}{6} \geq \frac{2(4x+3)}{6}$$

Elimino i denominatori ed eseguo le operazioni al numeratore

$$3x + 6 - 12x \geq 8x + 6.$$

Trasporto le x prima dell'uguale, i termini noti dopo l'uguale e chi salta l'uguale cambia di segno

$$3x - 12x - 8x \geq 6-6$$

sommo

$$-17x \geq 0$$

cambio di segno e di verso

$$17x \leq 0.$$

Divido per 17 da entrambe le parti

$$x \leq 0.$$

5.4 Disequazioni di secondo grado

Una disequazione di secondo grado si può sempre scrivere, senza perdita di generalità, in uno dei seguenti due modi

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad ax^2 + bx + c > 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ ed $a \neq 0$, altrimenti il grado della disequazione sarebbe inferiore al secondo. Se una disequazione di secondo grado si presenta con il verso di disuguaglianza < o ≤, per ricondursi ad una delle due forme precedenti è sufficiente moltiplicare ambo i membri per -1.

Caso $ax^2 + bx + c \geq 0$

Sia $\Delta = b^2 - 4ac$ il discriminante del polinomio $ax^2 + bx + c$, e siano x_1 e x_2 le soluzioni dell'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$. Per determinare la soluzione della disequazione $ax^2 + bx + c \geq 0$ si distinguono i seguenti casi

- se $\Delta < 0$ e $a > 0$ la disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$,

- se $\Delta < 0$ e $a < 0$ non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ per cui la disequazione sia soddisfatta,

- se $\Delta = 0$ ed $a > 0$ la disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$,

- se $\Delta=0$ e $a<0$ la disequazione è soddisfatta per il solo valore $x=x_1$ (notare che in questo caso risulta $x_1=x_2$),

- se $\Delta>0$ e $a>0$, supponendo senza perdita di generalità $x_1<x_2$, la disequazione è soddisfatta per $\boldsymbol{x \le x_1 \vee x \ge x_2}$

- se $\Delta>0$ e $a<0$, supponendo senza perdita di generalità $x_1<x_2$, la disequazione è soddisfatta per $\boldsymbol{x_1 \le x \le x_2}$.

Esempi

1. $\boldsymbol{x^2-3x+2\ge 0}$

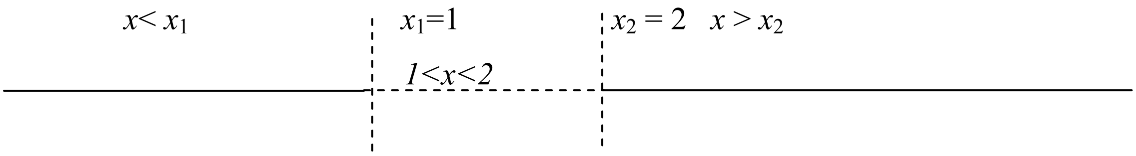
Risulta $\boldsymbol{\Delta=9-8=1>0,}$ le soluzioni dell'equazione

$$\boldsymbol{x^2-3x+2=0}$$

associata sono:

$\boldsymbol{x=\frac{3\pm 1}{2}}$, quindi $x_1=1$ e $x_2=2$. Dato che $a=1>0$ la disequazione è soddisfatta per $\boldsymbol{x\le 1 \vee x\ge 2.}$

Rappresentiamo graficamente gli intervalli:



2. $\boldsymbol{-x^2+5x-6>0}$

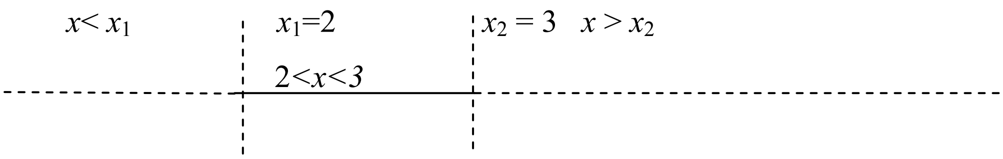
Risulta $\boldsymbol{\Delta=25-24=1>0,}$ le soluzioni dell'equazione

$$\boldsymbol{-x^2+5x-6=0}$$

associata sono:

$\boldsymbol{x=\frac{-5\pm 1}{-2}}$, quindi $x_1=2$ e $x_2=3$. Dato che $a=-1<0$ la disequazione è soddisfatta per $\boldsymbol{2<x<3.}$

Rappresentiamo graficamente gli intervalli:



3. . $\boldsymbol{x^2+x+1>0}$

Risulta $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0,$ a=1>0, la disequazione è soddisfatta da tutti i valori di x e cioè per ogni $x \in \mathbb{R}$.

4. $x^2 + 1 \le 0$

Risulta $\Delta = -4 < 0,$ a=1>0, la disequazione non ha alcuna soluzione.

5.5 Sistemi di disequazioni

Un sistema di disequazioni è l'insieme di due o più disequazioni nella stessa incognita che devono essere verificate simultaneamente. Risolvere il sistema significa determinare i valori dell'incognita che verificano contemporaneamente tutte le disequazioni date. La soluzione di un sistema di disequazioni è allora determinata dall'intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni.

Esempi

1.

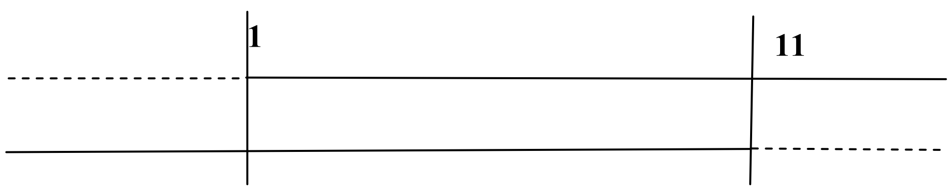
$$\begin{cases} 3x + 1 > 2x + 5 \\ \dfrac{x-2}{3} > \dfrac{x-3}{2} - 1 \end{cases}$$

La risoluzione delle due disequazioni non richiede particolari competenze. Poni sempre attenzione all'uso dei principi di equivalenza ed in particolare al cambiamento del verso della disequazione quando moltiplichi o dividi entrambi i membri per un numero negativo. Si risolvono singolarmente le due disequazioni.
La prima disequazione è verificata per x>1.
La seconda disequazione

$$\frac{x-2}{3} > \frac{x-3}{2} - 1$$
$$2(x-2) > 3(x-3) - 6$$
$$2x - 4 > 3x - 9 - 6$$
$$2x - 3x > 4 - 9 - 6$$
$$-x > -11$$
$$x < 11$$

è verificata per x<11.

Rappresentiamo graficamente i due intervalli e troviamo la soluzione del sistema:



La soluzione del sistema è $1<x<11$.

2.

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{2} - 3(x-2) < \dfrac{5(3-x)}{2} \\ \dfrac{6x+2}{4} + \dfrac{2x-1}{2} < \dfrac{15(x+1)}{8} \end{cases}$$

Risolviamo singolarmente le due disequazioni:

consideriamo la prima disequazione

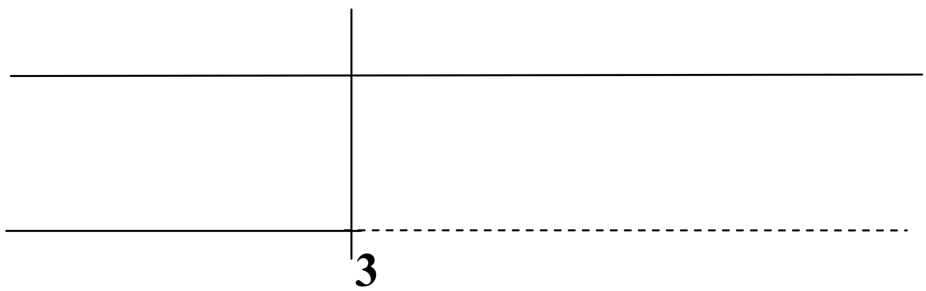
$$\frac{x-5}{2} - 3(x-2) < \frac{5(3-x)}{2}$$
$$x-5-6(x-2) < 5(3-x)$$
$$x-5-6x+12 < 15-5x$$
$$x-6x+5x < 15+5-12$$
$$0 \cdot x < 8$$

che è sempre verificata per ogni valore di x reale;

consideriamo la seconda disequazione

$$\frac{6x+2}{4} + \frac{2x-1}{2} < \frac{15(x+1)}{8}$$
$$2(6x+2)+4(2x-1) < 15(x+1)$$
$$12x+4+8x-4 < 15x+15$$
$$5x < 15$$
$$x < 3$$

Rappresentiamo graficamente le soluzioni:



Quindi la soluzione del sistema è $x<3$.

5.6 Disequazioni di grado riconducibile al primo

Un trinomio di II grado con $\Delta > 0$, si può scomporre nel prodotto di due binomi di I grado, basta ricordare che

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b).$$

Ad esempio, consideriamo la disequazione

$x^2 - 4x + 3 > 0$.

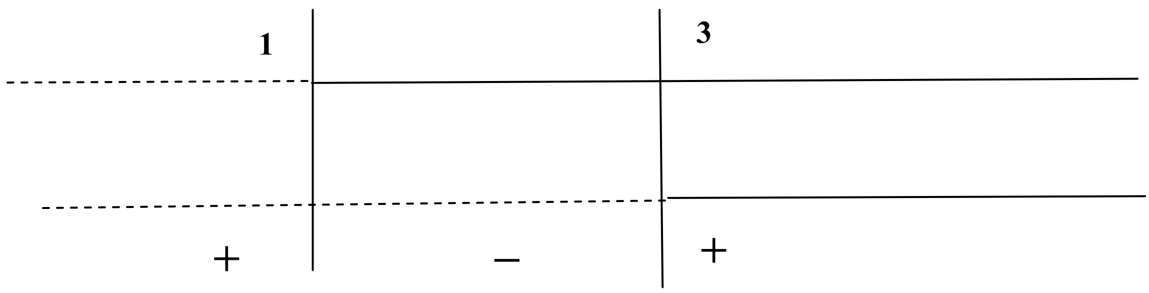
Applicando la precedente scomposizione

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

Possiamo scrivere la disequazione nel seguente modo:

$$(x-1)(x-3) > 0,$$

considerando che il prodotto di due fattori è positivo, se e solo se, essi sono o entrambi positivi, o entrambi negativi, l'insieme delle soluzioni della disequazione si ottiene studiando il segno dei fattori. Rappresentiamo graficamente le soluzioni, indicando con una linea continua i valori di x per cui ciascun fattore risulta positivo, e con una linea tratteggiata i valori di x per cui ciascun fattore risulta negativo, ed indichiamo nei vari intervalli il segno del prodotto dei due fattori:

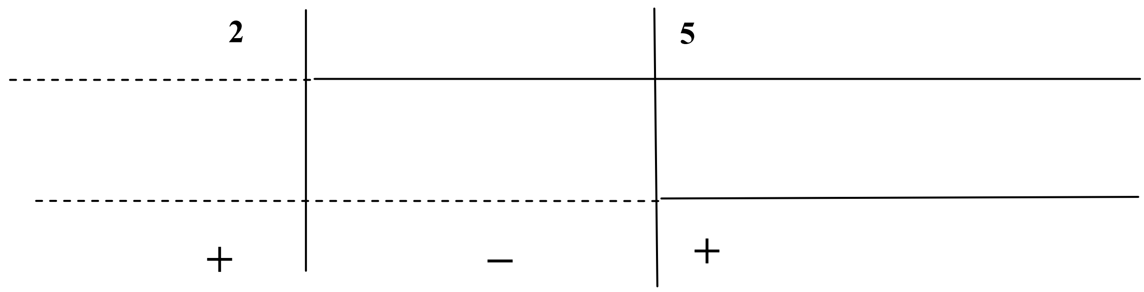


La disequazione ha il segno maggiore, quindi consideriamo gli intervalli con il segno +: $(x<1) \wedge (x>3)$.

2. $x^2 - 7x + 10 < 0$

Scomponiamo il trinomio: $x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$.

Rappresentiamo graficamente quando ciascun fattore è positivo con la linea continua e negativo con una linea tratteggiata:



La disequazione ha il segno minore, quindi la soluzione della disequazione è:

$$2<x<5.$$

La tecnica utilizzata negli esempi precedenti può essere applicata anche a disequazioni di grado superiore al secondo, rappresentando graficamente il segno di ogni fattore, come nell'esempio seguente.

$x^4 - 16x^2 > 0$

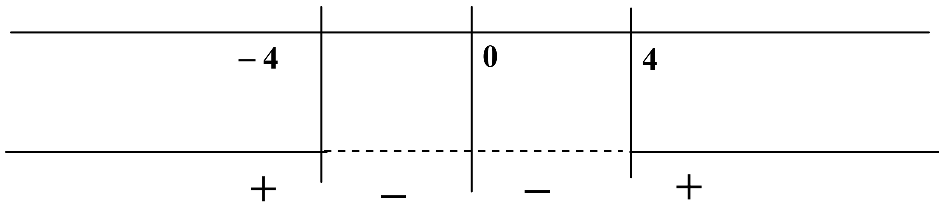
Scomponiamo il polinomio in fattori

$$x^4 - 16x^2 = x^2(x^2 - 16)$$

Il primo fattore è sempre positivo per ogni valore di x diverso da zero.

Il secondo fattore è positivo per ($x<-4$) $\vee$($x>4$).

Graficamente



Pertanto la soluzione della disequazione di partenza è ($x<-4$) $\vee$($x>4$).

5.7 Disequazioni frazionarie

Una disequazione razionale si dice fratta o frazionaria se l'incognita figura al denominatore di qualche frazione. Nella forma generica si presenta sotto la forma:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

(o con il segno < o ≤ o ≥) con A(x) e B(x) polinomi in x.

Questo tipo di disequazioni si risolvono come le precedenti, in quanto un quoziente è positivo se numeratore e denominatore hanno lo stesso segno, negativo in caso contrario. Bisogna solo ricordare che il denominatore deve essere sempre diverso da zero.

Esempi

1. $\dfrac{5}{2x+1} < \dfrac{1}{2-x}$

$$\frac{5(2-x)-2x-1}{(2x+1)(2-x)}<0$$

$$\frac{9-7x}{(2x+1)(2-x)}<0$$

Le soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} 9-7x>0 \\ (2x+1)(2-x)<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9-7x<0 \\ (2x+1)(2-x)>0 \end{cases}$$

Il primo sistema si può scrivere:

$$\begin{cases} x<\frac{9}{7} \\ (2x+1)(x-2)>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<\frac{9}{7} \\ x<-\frac{1}{2} \quad \vee x>2 \end{cases}$$

che è soddisfatto per

$$x<-\frac{1}{2} \quad .$$

Il secondo sistema è soddisfatto per $\frac{9}{7}<x<2.$

Quindi la disequazione data è verificata per $x<-\frac{1}{2} \quad \vee \frac{9}{7}<x<2.$

2. $\frac{4x^2-1}{x^2-16}<0$

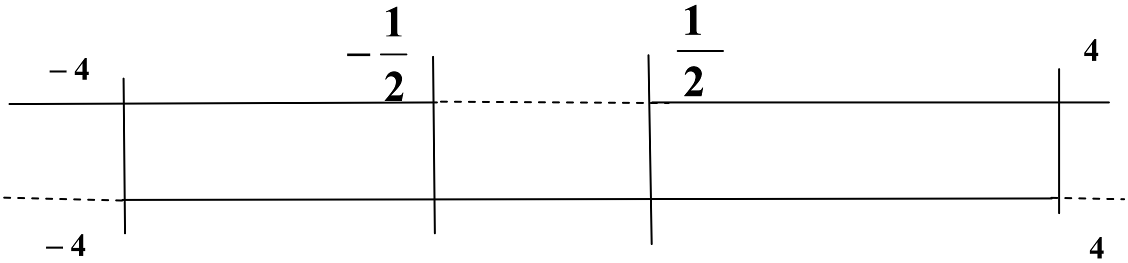
Dobbiamo risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} 4x^2-1>0 \\ x^2-16<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2-1<0 \\ x^2-16>0 \end{cases}$$

Risolviamo il I sistema

$$\begin{cases} \left(x<-\frac{1}{2}\right)\vee\left(x>\frac{1}{2}\right) \\ -4<x<4 \end{cases}$$

Graficamente si ha:



Il sistema è soddisfatto per $\left(-4<x<-\frac{1}{2}\right) \quad \vee\left(\frac{1}{2}<x<4\right).$

Risolviamo il II sistema:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ (x < -4) \vee (x > 4) \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzioni. Pertanto le soluzioni della disequazione data sono:

$$\left(-4 < x < -\frac{1}{2}\right) \vee \left(\frac{1}{2} < x < 4\right).$$

5.8 Equazioni e disequazioni con il valore assoluto

Ricordiamo la definizione di valore assoluto o modulo di x, è una quantità sempre positiva ed è uguale a $|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x\ se & x \leq 0. \end{cases}$ Più in generale, se $A(x)$ è un polinomio o un quoziente di due polinomi si ha:

$$|A(x)| = \begin{cases} A(x) & se \quad A(x) \geq 0 \\ -A(x)\ se & A(x) \leq 0. \end{cases}$$

Nella risoluzione di un'equazione con il valore assoluto intervengono le disequazioni, per tale motivo, le incontriamo in questo capitolo.

Esempio

1. $2x - |2 - x| = 1$

Questa equazione è equivalente a due equazioni la prima è

$$2x\text{-}(2\text{-}x)=1, \text{ se } 2\text{-}x \geq 0,$$

ossia se la quantità in valore assoluto è positiva.
La seconda è

$$2x\text{-}[\text{-}(2\text{-}x)]=1, \text{ se } 2\text{-}x \leq 0,$$

ossia se la quantità in valore assoluto è negativa.
Risolviamo la prima

$$2x\text{-}2+x=1 \text{ se } x\text{-}2 \leq 0,$$

ossia $3x=3$ se $x \leq 2$, quindi $x=1$ è una soluzione accettabile perché $x \leq 2$.
Risolviamo la seconda equazione

$$2x+2\text{-}x=1,$$
$$x=\text{-}1$$

non è una soluzione accettabile, perché x deve essere maggiore o uguale a 2. Quindi la soluzione dell'equazione con il valore assoluto data è $x=1$.

Dimostriamo ora l'equivalenza

$$|A(x)| < c \quad \Leftrightarrow \quad -c < A(x) < c \qquad (1)$$

dove c è un numero reale positivo, perché altrimenti la disequazione non è mai verificata, in quanto il valore assoluto che è una quantità positiva o nulla non può essere minore di un numero negativo.
La (1) è equivalente all'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < c \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \leq 0 \\ -A(x) < c \end{cases} \quad \textit{ossia} \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < c \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \leq 0 \\ A(x) > -c \end{cases}$$

Si ha inoltre:

$$|A(x)| > c \quad \Leftrightarrow \quad A(x) < -c \quad A(x) > c \qquad (2)$$

Infatti:

$$|A(x)| > c \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) > c \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \leq 0 \\ -A(x) > c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) > c \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \leq 0 \\ A(x) < -c \end{cases}$$

Esempi

1. $\left|x^2 - 5x + 5\right| > 1$

Per la (2), l'insieme delle sue soluzioni è l'unione dell'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$x^2 - 5x + 5 > 1 \qquad (3)$$

con l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$x^2 - 5x + 5 < -1 \qquad (4)$$

La (3) equivale a $x^2 - 5x + 4 > 0$ che è soddisfatta per (x<1) ∨(x>4).

La (4) equivale a $x^2 - 5x + 6 < 0$ che è soddisfatta per 2<x<3.

Quindi la soluzione della disequazione data è

(x<1) ∨ (2<x<3) ∨(x>4).

2. $\left|x^2 - 5x + 5\right| \leq 1$

Per la (1) si ha:

$$-1 \leq x^2 - 5x + 5 \leq 1$$

che si spezza in $x^2 - 5x + 5 \geq -1$ e $x^2 - 5x + 5 \leq 1$.

La prima disequazione è equivalente a $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ ed è verificata per (x≤2) ∨(x≥3).

La seconda disequazione è equivalente a $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ ed è verificata per 1≤x≤4.

Facendo il sistema tra le soluzioni della prima disequazione e della seconda si ha:

(1≤x≤2) ∨ ((3≤x≤4).

3. $\dfrac{1}{|3x-1|} < 1$

Poiché $|3x-1| = 3x - 1 \quad se \quad x > \dfrac{1}{3}$, mentre $|3x-1| = 1 - 3x \quad se \quad x < \dfrac{1}{3}$, la disequazione data ha significato solo se 3x-1≠ 0, ossia $x \neq \dfrac{1}{3}$, bisogna risolvere le due disequazioni

(1) $\dfrac{1}{3x-1} < 1 \quad per \quad x > \dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{1}{1-3x} < 1 \quad per \quad x < \dfrac{1}{3}$

e poi calcolare l'unione delle insieme delle soluzioni.

Risolviamo la I disequazione:

$$\frac{1-3x+1}{3x-1}<0 \quad per \quad x>\frac{1}{3}$$

$$\frac{2-3x}{3x-1}<0 \quad per \quad x>\frac{1}{3}$$

$$2-3x<0 \quad per \quad x>\frac{1}{3}$$

$$x>\frac{2}{3} \quad per \quad x>\frac{1}{3}.$$

Risolviamo la II disequazione:

$$\frac{1-1+3x}{1-3x}<0 \quad per \quad x<\frac{1}{3}$$

$$x<0 \quad per \quad x<\frac{1}{3}.$$

Le soluzioni della disequazione data sono:

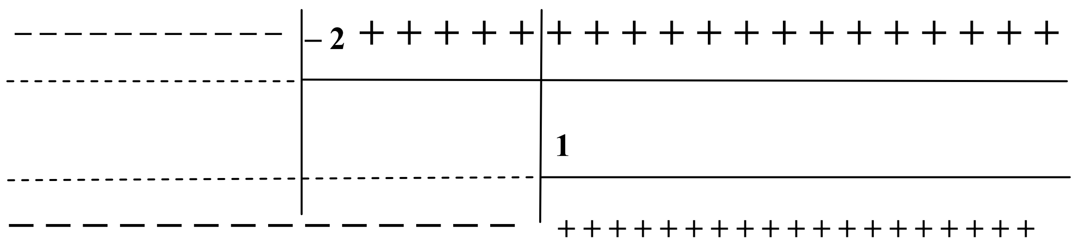
$$(x<0) \quad \vee \left(x>\frac{2}{3}\right).$$

Se una disequazione contiene due o più termini in valore assoluto, conviene rappresentare graficamente gli intervalli nei quali la disequazione data può variare, come mostriamo nel seguente esempio:

$$|x+2|<1+|x-1|$$

Indichiamo con *f(x) =x+2, g(x)=x-1*, si possono presentare i seguenti casi

1) *f(x) e g(x) ≥ 0*
2) *f(x) e g(x) ≤0*
3) *f(x) ≥ 0, g(x) ≤0*
4) *f(x) ≤ 0, g(x) ≥ 0*



Graficamente si vede che dobbiamo studiare la disequazione in tre intervalli:

1) se $x<-2$, f(x) ≤ 0, g(x) ≤ 0, $-x-2<1-x+1$, $-4<0$ sempre verificata
2) se $-2<x<1$, f(x) ≥ 0, g(x) ≤0, $x+2<1-x+1$, $2x<0$, $x<0$.
3) se $x>1$, f(x) e g(x) ≥ 0, $x+2<1+x-1$, $2<0$, mai verificata.

Infatti dal grafico si vede che non si verifica mai che f(x) ≤ 0 e g(x) ≥0.
Quindi la soluzione della disequazione data è $x<0$.

ESERCIZI PROPOSTI

Disequazioni di I grado

1. $3(x+2)-4(x+5)>6(1-x)+2$ $\left[x>\frac{22}{5}\right]$
2. $1-\frac{3-x}{6}+\frac{4x+1}{2}>\frac{x-3}{12}$ $\left[x>\frac{3}{5}\right]$
3. $3(x-4)+7(2-3x)\le\frac{1}{2}(3-2x)+6$ $\left[x\ge-\frac{11}{34}\right]$

Disequazioni di II grado

4. $x^2-9x+14<0$ $[2<x<7]$
5. $(x-3)(x-5)>0$ $[x<3 \vee x>5]$
6. $x^2-\frac{1}{25}<0$ $\left[-\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5}\right]$
7. $9x^2>0$ $[x\neq 0]$
8. $39x^2+5>0$ $[\forall\ x\in\mathbb{R}]$
9. $7x^2+3<0$ [nessuna soluzione]

Sistemi di disequazioni

10. $\begin{cases} x(x-1)<0 \\ \frac{2x+3}{3}+2>0 \end{cases}$ $[0<x<1]$

11. $\begin{cases} x^2-3x<+2<0 \\ 3x+2<6x \end{cases}$ $[1<x<2]$

12. $\begin{cases} 2x+1>0 \\ x^2-5x+6<0 \end{cases}$ $[2<x<3]$

13. $\begin{cases} x^2>4 \\ x^2+16>0 \\ x^2-6x>0 \end{cases}$ $[(x<-2)\vee(x>6)]$

Disequazioni di grado riconducibile al primo

14. $x^2-18x+81>0$ $[x\neq 9]$
15. $x^2(x^2-1)(x^2-4)>0$ $[(x<-2)\vee(-1<x<0)\vee(0<x<1)\vee(x>2)]$

Disequazioni frazionarie

16. $\frac{2x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}<\frac{1}{x^2-1}$ $\left[\left(\frac{1}{4}<x<1\right)\vee(x<-1)\right]$

17. $\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}<\frac{1}{x^2-1}$ $\left[(x<-1)\vee\left(\frac{2}{3}<x<1\right)\right]$

18. $\frac{x^2+9}{43x}>0$ $[x>0]$

19. $\frac{x+3}{x^2+25}>0$ $[x>-3]$

Equazioni e disequazioni con il valore assoluto

20. $6|x+1|=2x-1$ [*nessuna soluzione*]

21. $|2(x+1)|=-6x-6$ $[x=-1]$

22. $\left|x^2-5x+6\right|>0$ $[x\neq 2,3]$

23. $\left|\frac{2x}{3x-1}-\frac{2}{3}\right|<1$ $\left[\left(x<\frac{1}{9}\right)\vee\left(x>\frac{5}{9}\right)\right]$

24. $\left|4-x^2\right|-|3-x|>x$ $\left[\left(x<-\sqrt{7}\right)\vee(-1<x<1)\vee\left(x>\sqrt{7}\right)\right]$

Capitolo 6

Equazioni irrazionali

6.1 Introduzione

La risoluzione delle equazioni irrazionali è un primo esempio di applicazione delle disequazioni. Ricordiamo che un'equazione è *irrazionale* se contiene almeno un radicale nel cui radicando compare l'incognita. Ad esempio

$\sqrt{3x}-4=2x$ è un'equazione irrazionale;

$4x-\sqrt{5}=4$ non è un'equazione irrazionale.

Più precisamente vedremo come esista una certa distinzione nella risoluzione di equazioni irrazionali contenenti radicali di indice pari o radicali di indice dispari. Infatti, risolvendo le equazioni irrazionali solo nell'insieme dei numeri reali, considereremo in senso aritmetico i radicali con indice pari e in senso algebrico quelli con indice dispari. Quindi nel primo caso si dovrà determinare per quali valori della variabile il radicale risulta reale.
Le equazioni irrazionali più comuni sono del seguente tipo:

1. $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$

2. $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[m]{g(x)}$

3. $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}=h(x)$

4. equazioni con più di due radicali quadratici ed eventuali termini razionali.

5. equazioni irrazionali fratte

essendo $f(x)$ e $g(x)$ delle espressioni reali.

La difficoltà che si presenta in questo tipo di equazioni è legato alla presenza di soluzioni non accettabili nel caso di indice n pari.
Data un'equazione $f(x)=g(x)$, consideriamo l'equazione $\left[f(x)\right]^n=\left[g(x)\right]^n$:

i) se *n è dispari*, essa è equivalente a quella data;

ii) se *n è pari*, essa ha come soluzioni quelle due equazioni

- $f(x)=g(x)$
- $f(x)=-g(x)$;

Osserviamo che se n pari, $\left[f(x)\right]^n = \left[g(x)\right]^n$ ha soluzioni equivalenti all'equazione $f(x)=g(x)$ se e soltanto se $f(x)$ e $g(x)$ hanno segno concorde.

Da tale ragionamento possiamo considerare la seguente equivalenza

$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^n$ (*)

(con la condizione aggiuntiva $g(x) \geq 0$, se n è pari).

Esempio

1. Consideriamo le equazioni

$2x+1 = x-9$ e $(2x+1)^2 = (x-9)^2$.

La prima equazione ha l'unica soluzione $x=-10$, la seconda invece ha due soluzioni $x_1=-10$ e $x_2 = \frac{8}{3}$.

Per risolvere un'equazione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ è necessario eliminare in qualche modo dei radicali presenti, per ricondurre il problema alla soluzione di una equazione razionale che ci dia le soluzioni dell'equazione iniziale. Per fare questo operativamente dobbiamo elevare a *n* entrambi i membri delle equazioni, controllare se *n* è pari o dispari: se *n* è dispari, le soluzioni dell'equazione ottenuta sono le stesse dell'equazione irrazionale . Nel caso di *n* pari, possiamo eseguire anche un altro procedimento:

il controllo delle soluzioni mediante *verifica*, ovvero sostituire nell'equazione data le soluzioni trovate e accettare soltanto le soluzioni che verificano l'equazione.

Esempio

1. $\sqrt{x^2+3x+6} = 2x$

Elevando entrambi i membri al quadrato e svolgendo semplici conti, otteniamo:

$x^2 - x - 2 = 0$

che ha le due soluzioni

$x_1 = -1$ e $x_2 = 2$.

Per stabilire se -1 e 2 sono soluzioni dell'equazione di partenza, sostituiamo nell'equazione irrazionale data. Nel caso $x=-1$ si ottiene che i due membri dell'equazione non hanno lo stesso valore e quindi la sola soluzione accettabile è $x=2$.

6.2 Equazione $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ con *n* dispari

Se l'equazione irrazionale presenta un solo radicale con indice dispari *n*, le soluzioni si trovano elevando ad *n* ambo i membri (vedi 6.1 uguaglianza (*)).

Di conseguenza otteniamo un'equazione razionale la cui risoluzione è stata affrontata nel Cap.5.

Esempio

1. $3 = \sqrt[3]{3x+5}$

Risolviamo l'equazione senza dover imporre nessuna condizione di compatibilità:

$$27 = 3x + 5$$
$$3x = 22$$
$$x = \frac{22}{3}$$

6.3 Equazione $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ con n pari

Se l'equazione irrazionale presenta un solo radicale con indice pari *n*, le soluzioni si trovano elevando ad *n* ambo i membri (vedi 6.1 uguaglianza (*)) e imponendo alcune condizioni di esistenza:

1. affinché il radicale abbia significato, dobbiamo imporre $f(x) \geq 0$
2. essendo il radicale aritmetico $\sqrt[n]{f(x)} \geq 0$, ne segue che $g(x) \geq 0$ (in quanto devono avere segni concordi).

La risoluzione dell'equazione irrazionale presa in esame equivale alla risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$$

e, poiché per *n* pari la condizione $f(x) \geq 0$ deriva dall'altra disequazione e dall'equazione del sistema, otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$$

Esempio

1 $\sqrt{x^2 + 3x + 9} = x + 3$

Dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ x^2 + 3x + 9 = (x+3)^2 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione:

$$x^2+3x+9=x^2+9+6x$$
$$3x=0$$
$$x=0$$

Quindi otteniamo

$$\begin{cases} x>-3 \\ x=0 \end{cases}$$

e la soluzione $x=0$ è accettabile.

6.4 Equazione $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[m]{g(x)}$ con *n* ed *m* dispari

Per la risoluzione di questo tipo d'equazione occorre semplicemente elevare ambo i membri ad un preciso esponente, corrispondente al minimo comune multiplo tra gli indici dei radicali, ottenendo l'equazione:

$$\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]^{m.c.m(n;m)}=\left[\sqrt[m]{g(x)}\right]^{m.c.m(n;m)}$$

Non bisogna imporre nessuna condizione aggiuntiva, essendo nel caso di indici dispari.

Esempi

1. $\sqrt[3]{(x+4)}=\sqrt[3]{x^2+2x+4}$

Elevando ambo i membri al cubo otteniamo:

$$x+4=x^2+2x+4$$
$$x^2+x=0$$
$$x(x+1)=0$$

Le soluzioni quindi sono $x=0$ e $x=-1$.

2. $\sqrt[5]{x^2+3x+7}=\sqrt[5]{(x-1)(x+2)}$

Eleviamo ambo i membri alla quinta e svolgendo i calcoli si ha:

$$x^2+3x+7=x^2+2x-x-2$$
$$2x+9=0$$
$$x=-\frac{9}{2}$$

6.5 Equazione $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$ con *n* ed *m* pari

In questo caso si procede come nel caso dispari ed in più occorre tener conto della condizione da imporre nel caso di indici pari.
Quindi otteniamo il seguente sistema da risolvere:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ \left[\sqrt[n]{f(x)}\right]^{m.c.m(n;m)} = \left[\sqrt[m]{g(x)}\right]^{m.c.m(n;m)} \end{cases}$$

Esempio

1. $\sqrt{x+1} = \sqrt[4]{2x+2}$

In questo caso otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ (x+1)^2 = 2x+5 \end{cases}$$

essendo 4 il minimo comune multiplo tra gli indici dei radicali.

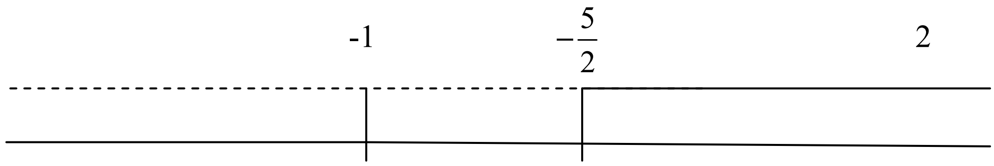
Risolvendo l'equazione si ha:

$$x^2 + 1 + 2x = 2x + 5$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

che deve essere compatibile col sistema:

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Dal grafico si ha:



Quindi l'unica soluzione accettabile è $x = 2$.

6.6 Equazione $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$ con *n* pari ed *m* dispari

Anche in questo caso si procede analogamente all'equazione con due indici di radicali dispari. Inoltre bisogna tener conto della condizione $f(x) \geq 0$ che deriva dall'indice pari e della concordanza del segno con il secondo membro $\sqrt[m]{g(x)}$. Ne segue il seguente sistema da risolvere:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ \left[\sqrt[n]{f(x)}\right]^{m.c.m(n;m)} = \left[\sqrt[m]{g(x)}\right]^{m.c.m(n;m)} \end{cases}$$

Osserviamo che la disequazione $f(x) \geq 0$ segue dalle altre condizioni del sistema. Pertanto possiamo considerare anche il sistema equivalente:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\sqrt[n]{f(x)}\right]^{m.c.m(n;m)} = \left[\sqrt[m]{g(x)}\right]^{m.c.m(n;m)} \end{cases}$$

Esempio

1. $\sqrt{x+1} = \sqrt[3]{2x+1}$

Dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ \left[\sqrt{x+1}\right]^6 = \left[\sqrt[3]{2x+1}\right]^6 \end{cases}$$

Troviamo le soluzioni dell'equazione tenendo conto che il $mcm(2,3) = 6$:

$$(x+1)^3 = (2x+1)^2$$
$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 4x^2 + 4x + 1$$
$$x^3 - x^2 - x = 0$$
$$x(x^2 - x - 1) = 0$$
$$x = 0$$
$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Dovendo tener conto della condizione $x \geq -\frac{1}{2}$ le soluzioni accettabili sono $x = 0$ e $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6.7 Equazione $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$ o con più di due radicali

In questo tipo di equazione, si procede sempre elevando ambo i membri al quadrato. L'equazione ottenuta generalmente sarà ancora un'equazione irrazionale più semplice della precedente da risolvere con i procedimenti conosciuti.
Bisognerà tener conto anche delle condizioni d'esistenza derivanti dall'indice pari dei radicali.

Esempi

1. $\sqrt{3x-1} - \sqrt{x+1} = 2$

Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Dal grafico si ha:

cioè $x \geq \frac{1}{3}$

Risolvendo l'equazione, si ha:

$$\sqrt{3x-1} = \sqrt{x+1} + 2$$

Elevando ambo i membri al quadrato, otteniamo:

$$3x-1 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x+1}$$
$$2x-6 = 4\sqrt{x+1}$$
$$x-3 = 2\sqrt{x+1}$$

Elevando nuovamente al quadrato ambo i membri e tenendo conto della condizione aggiuntiva d'esistenza $x-3\geq 0$, si ha:

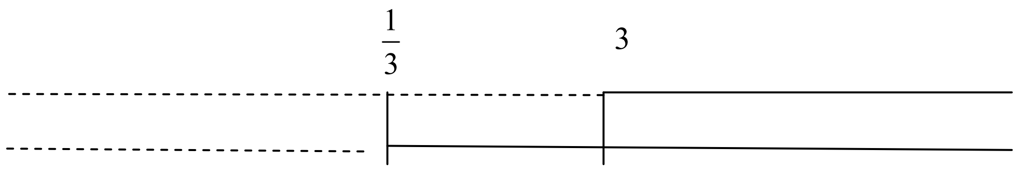
$$(x-3)^2 = 4(x+1)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 4x + 4$$

$$x^2 - 10x + 5 = 0$$

$$x = 5 \pm \sqrt{25-5} = 5 \pm 2\sqrt{5}$$

che deve essere compatibile con $x \geq \frac{1}{3}$ e $x \geq 3$. Dal grafico si ha:



cioè $x \geq 3$ (osserviamo che era possibile fare anche un unico grafico che raccoglieva le tre condizioni).
Quindi l'unica soluzione accettabile è $x = 5 + 2\sqrt{5}$.

2. $\sqrt{x+6} - \sqrt{2x-5} = \sqrt{x+1}$

Dobbiamo considerare il seguente sistema: $\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x+6} - \sqrt{2x-5}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 \end{cases}$

Risolvendo l'equazione, si ha:

$$x + 6 + 2x - 5 - 2\sqrt{(x+6)(2x-5)} = x + 1$$

$$3x + 1 - x - 1 = 2\sqrt{(x+6)(2x-5)}$$

$$2x = 2\sqrt{(x+6)(2x-5)}$$

Eleviamo nuovamente ambo i membri al quadrato:

$4x^2 = 4(2x^2 - 5x + 12x - 30)$

$x^2 + 7x - 30 = 0$

$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{169}}{2};$

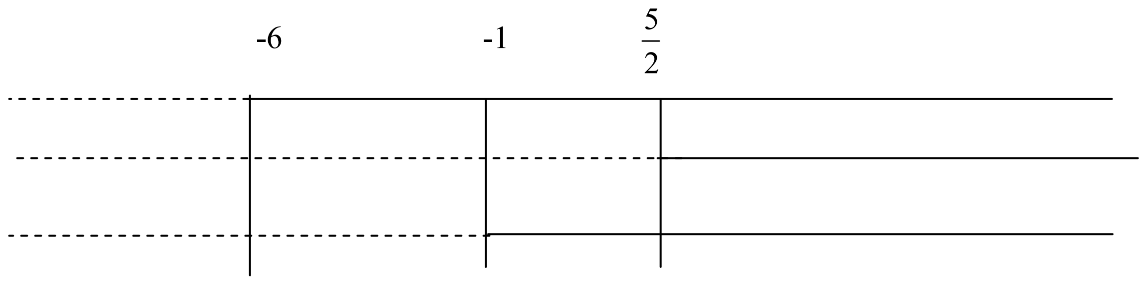
$x = 3$

$x = -10$

Tenendo conto delle condizioni

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ x \geq \dfrac{5}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}$$

si ha il seguente grafico:



e la soluzione è $x = 3$.

6.8 Equazioni irrazionali fratte

Le equazioni irrazionali si dicono fratte se presentano almeno un radicale con incognita al denominatore. La loro risoluzione consiste nel ricondurle ad equazioni irrazionali prive di denominatore o ad equazioni razionali fratte, imponendo le dovute condizioni d'esistenza . Segue un esempio chiarificatore.

Esempio

1. $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$

Occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x+5>0 \\ 2x-5>0 \\ \left(\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+5}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}\right)^2 \end{cases}$$

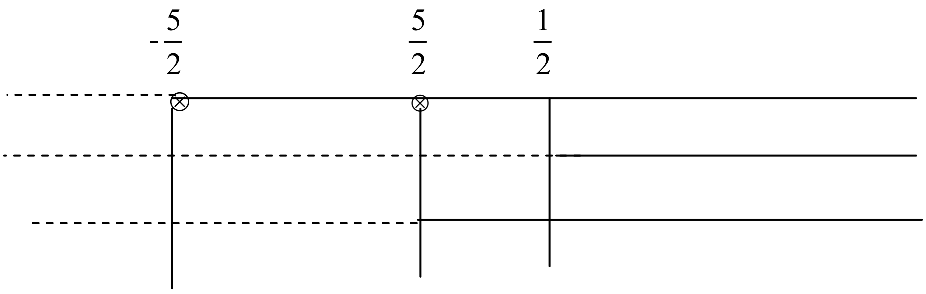
Osserviamo che le condizioni d'esistenza $2x+5 \geq 0$ e $2x+5 \neq 0$ sono state riunite nell'unica disequazione $2x+5>0$.
Analogamente si è fatto per l'altro denominatore dell'equazione data.

Adesso troviamo le soluzioni dell'equazione:

$$\frac{2x-1}{2x+5} = \frac{1}{2x-5}$$
$$(2x-1)(2x-5) = 2x+5$$
$$4x^2 - 10x - 2x + 5 = 2x + 5$$
$$4x^2 - 14x = 0$$
$$x(2x-7) = 0$$
$$x = 0$$
$$x = \frac{7}{2}$$

Le condizioni che dobbiamo imporre sono:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x > -\dfrac{5}{2} \\ x > \dfrac{5}{2} \end{cases}$$



(Il simbolo $\otimes$ indica l'esclusione del valore)
Quindi l'unica soluzione accettabile è $x = \dfrac{7}{2}$.

ESERCIZI PROPOSTI

1. $\sqrt{x+4}=1$ [-3]

2. $\sqrt{2x-3}+1=x$ [2]

3. $\sqrt{4-3x}+1=2x$ [1]

4. $\sqrt{x(5-x)}=x-2$ [4]

5. $\sqrt{x}=\sqrt{1-2x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

6. $\sqrt[3]{3x+2}=\sqrt{x+2}$ [2]

7. $\sqrt{x^2+4}-x=2\sqrt{1-x}$ [0]

8. $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}-\sqrt{2x}=0$ [4]

9. $\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{9-3x}$ $[-3;\ 0\ ;\ 3]$

Capitolo 7

Disequazioni irrazionali

7.1 Introduzione

La risoluzione delle disequazioni irrazionali si basa essenzialmente su risultati legati alla equazioni irrazionali e alle disequazioni in generale. Precisamente si dice *irrazionale* ogni disequazione in cui l'incognita compare sotto radice.
Tali sono, ad esempio, le disequazioni

$\sqrt{3x+1}-x>0$ e $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}\leq\sqrt{2}$.

Vedremo inoltre come il procedimento di risoluzione cambi a seconda che l'indice di radice sia pari o dispari e a seconda di quanti radicali siano presenti nella disequazione. Inoltre analizzeremo disequazioni con segno $<$, $>$, essendo che i segni $\leq$, $\geq$ rappresentano un' estensione dei procedimenti illustrati, semplicemente tenendo conto dell'uguaglianza. Infine indicheremo con $f(x)$ e $g(x)$ delle espressioni reali.

7.2 Disequazioni con un solo radicale di indice dispari

Le disequazioni con indice *n* dispari del seguente tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \text{ o } \sqrt[n]{f(x)} < g(x)$$

Si risolvono elevando ambo i membri alla potenza *n.*

Esempio

1. $\sqrt[3]{8+4x} \le x+2$

Elevando ambo i membri al cubo, si ha:

$8+4x \le (x+2)^3$.

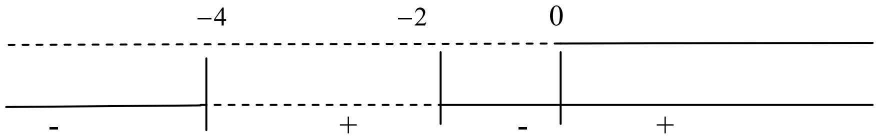
Svolgendo i calcoli, si ha:

$8+4x \le x^3+6x^2+12x+8$

$x^3+6x^2+8x \ge 0$

$x(x^2+6x+8) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x \ge 0\,,\ x \le -4 \vee x \ge -2\,.$

Dal grafico si ha:



Quindi le soluzioni sono date da $-2 \le x \le 4 \quad \vee \quad x \ge 0$.

7.3 Disequazioni con un solo radicale di indice pari

Le disequazioni con indice n pari si risolvono differentemente, a seconda che il segno della disequazione sia $>$ o $<$.

Se la disequazione è del seguente tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x)\,,$$

allora bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^n \end{cases}$$

Infatti, affinché la disequazione presa in esame abbia significato nell'insieme dei numeri reali, occorre imporre

- $f(x) \ge 0$.

I valori della x che soddisfano la disequazione rendono anche

- $g(x) > 0$ (essendo $g(x) > \sqrt[n]{f(x)}$).

A questo punto è lecito elevare ambo i membri alla potenza *n*:

- $f(x) < [g(x)]^n$

Se la disequazione è invece del seguente tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x)\,,$$

allora bisogna risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^n \end{cases}$$

Infatti, per il I sistema se

- $g(x) < 0$,

allora la disequazione ha significato nell'insieme dei numeri reali se

- $f(x) \geq 0$.

Per il II sistema, se

- $g(x) \geq 0$

Allora anche il primo membro è non negativo e possiamo elevare ambo i membri alla potenza *n*

- $f(x) > [g(x)]^n$

(stavolta la condizione d'esistenza $f(x) \geq 0$, è implicita nella disequazione).

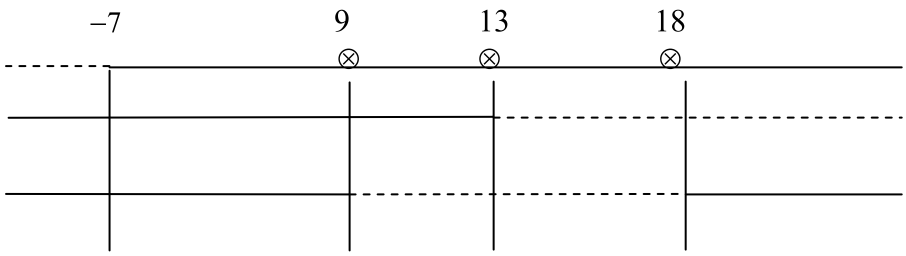
Esempio

1. $\sqrt{x+7} < 13 - x$

Consideriamo il sistema $\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 13 - x > 0 \\ x+7 < (13-x)^2 \end{cases}$. Eseguendo i calcoli, si ha:

$$\begin{cases} x \geq -7 \\ x < 13 \\ x + 7 < 169 + x^2 - 26x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x < 13 \\ x^2 - 27x + 162 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x < 13 \\ x < 9 \vee x > 18 \end{cases}$$

Disegnando il grafico corrispondente al sistema, si ha:

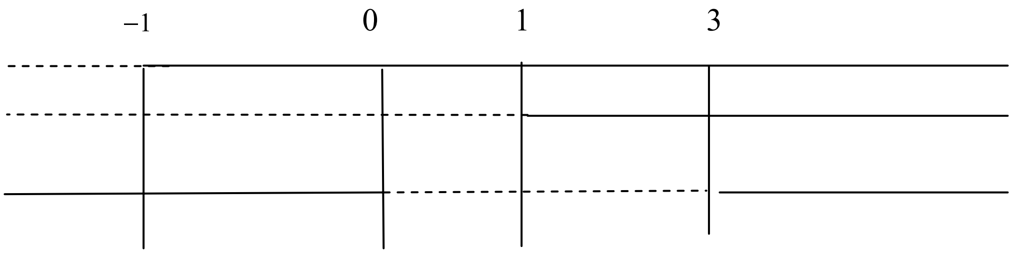


Le soluzioni sono date da $-7 \leq x < 9$.

2. $\sqrt{x+1} \leq x - 1$

Consideriamo il sistema $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x+1 \leq (x-1)^2 \end{cases}$. Eseguendo i calcoli, si ha:

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \\ x+1 \leq x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \\ x(x-3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 1 \\ x \leq 0 \vee x \geq 3 \end{cases}$$



Dal grafico del sistema si ha che le soluzioni sono date da $x \geq 3$.

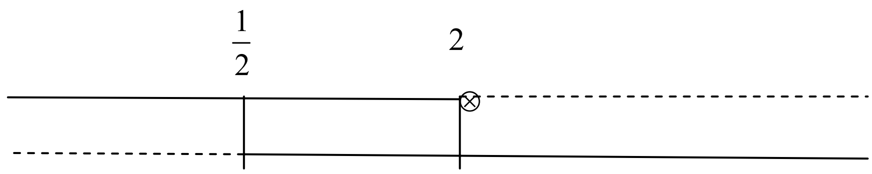
3. $\sqrt{2x-1} > x-2$

Consideriamo i sistemi

I $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$ e II $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x-1 > (x-2)^2 \end{cases}$. Svolgendo i calcoli,

otteniamo dal I sistema:

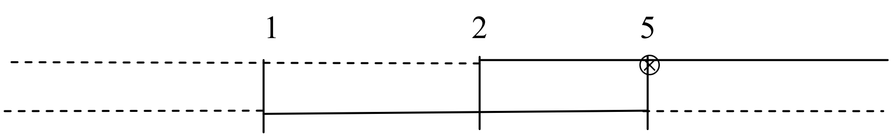
$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 2 \end{cases}$$



$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq x < 2$

otteniamo dal II sistema:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 1 < x < 5 \end{cases}$$



$\Rightarrow \quad 2 \leq x < 5$.

Unendo le soluzioni dei due sistemi, si hanno infine le soluzioni $\frac{1}{2} \le x < 5$.

7.4 Disequazioni con due radicali

Nel caso di disequazioni con due o più radicali, non c'è un procedimento standard. Occorre essenzialmente basarsi sulle regole applicate nel caso di disequazioni con un solo radicale e imporre le condizioni aggiuntive a secondo dell'esercizio dato.

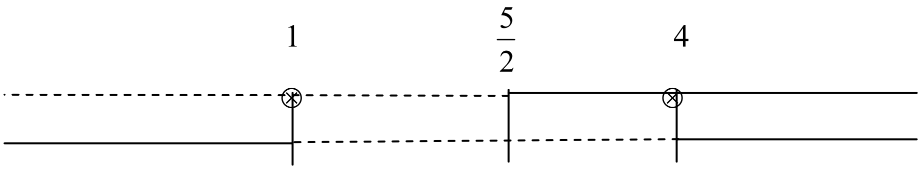
Esempi

1. $\sqrt{x^2-3x-1} > \sqrt{2x-5}$

In questo caso consideriamo il sistema $\begin{cases} 2x-5 \ge 0 \\ x^2-3x-1 > 2x-5 \end{cases}$. Da semplici calcoli, si ha:

$$\begin{cases} x \ge \frac{5}{2} \\ x^2-5x+4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge \frac{5}{2} \\ x<1 \vee x>4 \end{cases}$$

. Quindi la soluzione è $x > 4$.



Osserviamo che abbiamo omesso la condizione x^2-3x-1 perché implicita nella seconda disequazione del sistema.

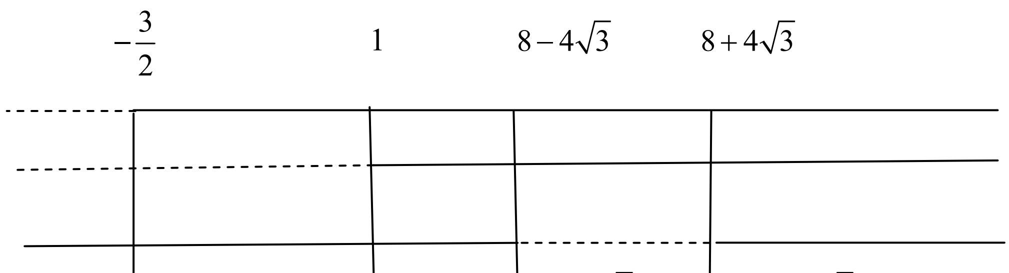
2. $\sqrt{2x+3} \ge 2+\sqrt{x-1}$

In questo caso il sistema da considerare è $\begin{cases} 2x+3 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \\ 2x+3 \ge 4\sqrt{x-1}+x-1 \end{cases}$, cioè

$$\begin{cases} x \ge -\frac{3}{2} \\ x \ge 1 \\ x \ge 4+4\sqrt{x-1} \end{cases}$$

. Elevando al quadrato i membri dell'ultima disequazione, si ha:

$$\begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ x \geq 1 \\ x^2 \geq 16x - 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ x \geq 1 \\ x^2 - 16x + 16 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{2} \\ x \geq 1 \\ x \leq 8 - 4\sqrt{3} \vee x \geq 8 + 4\sqrt{3} \end{cases}$$



Pertanto le soluzioni sono date da $1 \leq x \leq 8 - 4\sqrt{3} \quad \vee \quad x \geq 8 + 4\sqrt{3}$.

ESERCIZI PROPOSTI

1. $\sqrt{4x-1} > -1$ $\left[x \geq \dfrac{1}{4}\right]$
2. $\sqrt{3-2x} > 5$ $[x < -11]$
3. $\sqrt{3-2x} + 3 > 0$ $\left[x \leq \dfrac{3}{2}\right]$
4. $\sqrt{x^2 - 6x + 8} < 2\sqrt{2}$ $[0 < x \leq 2 \text{ e } 4 \leq x < 6]$
5. $\sqrt{1+x} < 2x - 1$ $\left[x > \dfrac{5}{4}\right]$
6. $\sqrt{2x+1} > x - 3$ $\left[-\dfrac{1}{2} \leq x < 4 + 2\sqrt{2}\right]$
7. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < \sqrt{2x+3}$ $[0 < x \leq 1 \text{ e } 3 \leq x < 6]$
8. $\sqrt{-x^2 + 6x} > \sqrt{x-1}$ $\left[1 \leq x < \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}\right]$
9. $\sqrt{-x^2 + 6x} < \sqrt{x-1}$ $\left[\dfrac{5+\sqrt{29}}{2} < x \leq 6\right]$

Capitolo 8

Equazioni esponenziali e logaritmiche

8.1 Introduzione

Il calcolo logaritmico fu inventato da John Napier (1550-1617), chiamato comunemente Nepero, e pubblicato nel 1614.
Lo scopo era quello di facilitare problemi di geometria e aritmetica, semplificare ad esempio l'estrazione della radice, risolvere problemi di natura fisica. Tale calcolo fu infatti applicato per definire le leggi sul moto dei corpi celesti. Con l'avvento dei computer, la loro importanza è diminuita ma restano sempre degli strumenti di calcolo utili. Osserviamo inoltre che il calcolo esponenziale è strettamente collegato ed in un certo senso equivalente al calcolo logaritmo come emerge dalle definizioni e dagli esempi che seguono. Sia il logaritmo che l'esponenziale e le relative proprietà saranno nuovamente studiati come funzioni nel Cap.14, dove ritroveremo anche delle interpretazioni grafiche.

8.2 Equazioni esponenziali

Un'equazione si dice *esponenziale* quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.

L'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo :

$a^x = b$, con $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$; $x \in \mathbb{R}$, x incognita dell'equazione, a è detta *base* dell'esponenziale ed x è detto *esponente*.

Osserviamo che un errore comune è di scambiare l'esponenziale con la potenza dove l'incognita si trova alla base e non all'esponente. Inoltre le condizioni imposte sulla base a sono legate ad un problema d'esistenza degli esponenti. Richiamiamo le seguenti definizioni chiarificatrici:

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{n-volte}$ con n numero intero positivo
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $(n > 0)$, con n numero intero relativo
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, n ed m numeri interi

Il problema emerge nella terza definizione in cui notiamo come non possano esistere radici con indice pari di numeri negativi.

La limitazione $a \neq 1$ deriva dall'equazione esponenziale banale che si otterrebbe. Precisamente, se $a = 1$, l'equazione $a^x = b$ ammette soluzioni solo per $b = 1$.

Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere:

- *impossibile* se $b \neq 1$ e $a = 1$

Esempi

1. $2^x = -5$
2. $1^x = -4$

- *indeterminata* se $a = 1$ e $b = 1$

Esempio

1. $1^x = 1$

- *determinata* se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

Esempio

1. $2^x = 2$
In questo caso osserviamo che $a = b$. Quindi la soluzione è $x = 1$.

2. $5^x = 3$
Stavolta non si può procedere come nell'esercizio precedente ed occorre introdurre la nozione di logaritmo.

8.3 Equazioni logaritmiche

Richiamiamo la definizione di logaritmo e relative proprietà utili per lo svolgimento delle equazioni logaritmiche.

Si chiama *logaritmo in base* a *di* b l'unica soluzione dell'equazione esponenziale elementare nel caso determinato, cioè l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Supponiamo di dover risolvere un'equazione esponenziale $a^x = b$:

- se a e b si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, si eguagliano gli esponenti .

- se a e b non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono sotto forma di logaritmi

Esempi

1. $2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

2. $2^x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \log_2 3$

3. $5^x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \log_5 3$

Il logaritmo risulta essere l'operazione inversa dell'esponenziale, pertanto le limitazioni cui è soggetto l'esponenziale e relative proprietà si riflettono sul logaritmo:

fissata la base $a > 0$, deve essere $b > 0$, detto *argomento* del logaritmo.

Inoltre valgono i casi particolari:

$\log_a 1 = 0$, poiché $a^0 = 1$; $\log_a a = 1$, poiché $a^1 = a$.

Inoltre valgono le seguenti proprietà dei logaritmi:

1. $\log_a x^y = y \log_a |x|$
2. $\log_a x \cdot y = \log_a |x| + \log_a |y|$
3. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$
4. $\log_a x = \dfrac{\log_c |x|}{\log_c a}$ (formula del cambiamento di base)

avendo supposto che l'argomento del logaritmo al primo membro sia sempre positivo. Al secondo membro abbiamo considerato i moduli degli argomenti dei logaritmi per garantirne la positività.

Precisiamo che i logaritmi che compaiono sulle calcolatrici sono in base $a = 10$ oppure in base $a = e \approx 2{,}718\ldots$.

L'espressione $\log x$ indica il $\log_{10} x$, detto anche *logaritmo decimale*; l'espressione $\ln x$ indica il $\log_e x$, detto anche *logaritmo naturale* o *neperiano*.

Un'equazione si dice *logaritmica* quando l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.

L'equazione logaritmica più semplice (elementare) è del tipo :

$\log_a x = b$, con $a > 0$, $b \in ¡$ e $x > 0$ che è l'incognita dell'equazione.

La sua soluzione, per quanto detto a proposito dell'equazione esponenziale, è :

$$x = a^b.$$

Esempio

1. $\log_2 x = 5$**.** La base è 2, quindi la soluzione è $x = 2^5$.

Analizziamo adesso le più comuni non elementari equazioni logaritmiche ed esponenziali che si incontrano durante i corsi di studi:

8.4 Equazione $m \cdot a^{f(x)} = n \cdot b^{g(x)}$

In questo caso la risoluzione dell'equazione si ottiene passando ai logaritmi in una base qualsiasi e applicando le proprietà dei logaritmi in maniera opportuna:

$\log_c\left(ma^{f(x)}\right) = \log_c\left(n \cdot b^{g(x)}\right)$

$\log_c m + f(x)\log_c a = \log_c n + g(x)\log_c b$

Esempi

1. $5 \cdot 3^x = 7$

Possiamo trasformare l'equazione eseguendo il logaritmo (in una base qualsiasi, per esempio in base 10) del primo e del secondo membro:
$\log(5 \cdot 3^x) = \log 7$.
Applichiamo la proprietà 2 dei logaritmi:

$\log 5 + \log 3^x = \log 7$.

Applichiamo la proprietà 1 dei logaritmi:

$\log 5 + x \log 3 = \log 7$

Isolando x otteniamo: $x = \dfrac{\log 7 - \log 5}{\log 3}$.

Un altro procedimento consiste nell'isolare 3^x, ottenendo: $3^x = \dfrac{7}{5}$

Prendendo il logaritmo in base 3 di entrambi i membri si ha:
$x = \log_3 \dfrac{7}{5} = \log_3 7 - \log_3 5$

Mediante la formula 4. di cambiamento di base , otteniamo lo stesso risultato.

8.5 Equazione $f(a^x) = b$

In questo caso si è soliti procedere con la sostituzione di variabile $a^x = t$, risolvere l'equazione ottenuta e porre i valori di t trovati in $a^x = t$ che rappresenta un'equazione esponenziale elementare.

Esempi

1. $8 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 16$
Scriviamo l'equazione nel seguente modo:
$4 \cdot 2^x - 2^{x+1} = 16$
Poniamo $2^x = t$. Da cui otteniamo
$4t - 2t = 16$

$2t = 16$

$t = 8$
Ritornando all'equazione esponenziale elementare si ha:

$2^x = 8$

$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3.$

8.6 Equazione $\log_a f(x) = b$

In questo caso bisogna porre la condizione d'esistenza dell'argomento del logaritmo cioè $f(x) > 0$ e risolvere l'equazione $f(x) = a^b$.

Esempio

1. $\log_2(x^2 - 3x) = 1$

Innanzitutto dobbiamo imporre la condizione d'esistenza: $x^2 - 3x > 0$ che corrisponde a

$x(x-3) > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 3$. A questo punto risolviamo l'equazione:

$$x^2 - 3x = 2$$
$$x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Le soluzioni sono entrambe accettabili, poiché compatibili con la condizione d'esistenza.

8.7 Equazione $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Per la risoluzione di tale equazione si ricorre alle proprietà del logaritmo

$$a^{\log_a f(x)} = f(x)$$
$$a^{\log_a g(x)} = g(x)$$

Tenendo sempre conto delle condizioni d'esistenza $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ l'equazione diventa $f(x) = g(x)$.

Esempio

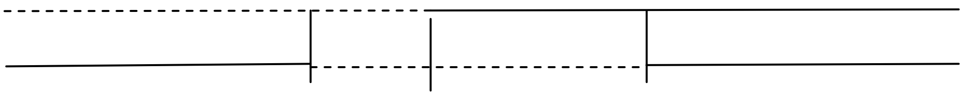
1. $\log_3(x+1) - \log_3(x^2 - 2) = 0$

Imponiamo le condizioni di esistenza sui logaritmi dell'equazione data, ricordando che gli argomenti devono essere positivi:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x^2 - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Dal grafico si ha:

$-\sqrt{2}$ $\quad -1 \quad$ $\sqrt{2}$



$\Rightarrow x > \sqrt{2}$

Risolviamo adesso l'equazione applicando le proprietà dei logaritmi.

$\log_3(x+1) = \log_3(x^2-2)$

Uguagliando gli argomenti si ha la seguente equazione equivalente:

$$x+1 = x^2-2$$

$$x^2 - x - 3 = 0 \cdot$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Il valore $x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ è minore di $\sqrt{2}$, quindi non è compatibile con le condizioni di esistenza. L'unica soluzione dell'equazione è data da:

$$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \cdot$$

8.8 Equazione $f(\log_a x) = b$

In questo caso si procede ponendo l'intero logaritmo uguale ad una nuova variabile t, ottenendo così un'equazione in t. A questo punto le soluzioni trovate si sostituiscono nell'equazione relativa alla posizione fatta inizialmente. Ovviamente dobbiamo sempre tener conto delle condizioni d'esistenza.

Esempio

1. $\ln^2 x + 2\ln x - 8 = 0$

Poniamo $\ln x = t$ e otteniamo la nuova equazione

$t^2 + 2t - 8 = 0$. Ricaviamo $t = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3 \quad \Rightarrow t_1 = -4$ e $t = 2$.

Quindi otteniamo le due equazioni

1. $\ln x = -4$

2. $\ln x = 2$

Dalla prima otteniamo $x = e^{-4}$ e dalla seconda $x = e^2$.

ESERCIZI PROPOSTI

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali e logaritmiche:

1. $2^x = 16\sqrt{2}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$
2. $8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$
3. $a^x \cdot a^{2x-1} = \frac{a^2}{\sqrt{a}}$ $\left[\frac{5}{6}\right]$
4. $2^x + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 7$ $\left[\log_2 \frac{14}{5}\right]$
5. $3 \cdot 5^x = 7$ $\left[\log_5 \frac{7}{3}\right]$
6. $\log_2 (x-1) = 3$ $[9]$
7. $\log(x-2) + \log 5 = \log x$ $\left[\frac{5}{2}\right]$
8. $2\log_2 x = 2 + \log_2 (x+3)$ $[6]$
9. $\log_3 (x-1) = \frac{1}{2}\log_3 x$ $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

Capitolo 9

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

9.1 Introduzione

Nell'ambito delle disequazioni un ulteriore tassello è rappresentato dalle disequazioni esponenziali e logaritmiche, la cui risoluzione si basa essenzialmente su nozioni date nel Cap. 8 e su proprietà che troveranno una rappresentazione grafica e numerose applicazioni nello studio delle funzioni esponenziale e logaritmica, illustrate nel Cap.15**.**

9.2 Disequazioni esponenziali e logaritmiche

Una disequazione è detta esponenziale (elementare) se appare sotto forma di una delle seguenti espressioni:

1. $a^x > b$
2. $a^x < b$
3. $a^x \geq b$
4. $a^x \leq b$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Risolvere una disequazione esponenziale vuol dire trovare gli intervalli di numeri reali che verificano la disequazione.

Tenendo conto di risultati e proprietà dell'esponenziale trattati nel Cap.8, si ha:

se $b < 0$, allora

- la disequazione $a^x > b$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$,
- la disequazione $a^x < b$ non è verificata per nessuna $x \in \mathbb{R}$,

essendo l'esponenziale sempre positiva;

se $a > 1$ e $b > 0$ ed è una potenza di a, cioè $b = a^\alpha$, allora

- la disequazione $a^x > b$ diventa $a^x > a^\alpha$ e per proprietà dell'esponenziale
$$a^x > a^\alpha \Leftrightarrow x > \alpha .$$
- la disequazione $a^x < b$ diventa $a^x < a^\alpha$ e per proprietà dell'esponenziale
$$a^x < a^\alpha \Leftrightarrow x < \alpha ;$$

se $0 < a < 1$ e $b > 0$ e ed è una potenza di a, cioè $b = a^\alpha$, allora

- la disequazione $a^x > b$ diventa $a^x > a^\alpha$ e per proprietà dell'esponenziale
$$a^x > a^\alpha \Leftrightarrow x < \alpha .$$
- la disequazione $a^x < b$ diventa $a^x < a^\alpha$ e per proprietà dell'esponenziale

$$a^x < a^\alpha \Leftrightarrow x > \alpha .$$

Precisiamo che le disequazioni con segno $\geq$, $\leq$ si risolvono in maniera analoga alle disequazioni con segno $>$, $<$, precedentemente o successivamente trattate.

Esempi

1. $3^x > -1$
E' verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. $4^x < -5$
Non è verificata per nessuna $x \in \mathbb{R}$.

3. $5^x > 25$
$5^x > 5^2 \Rightarrow x > 2$ dalle proprietà dell'esponenziale

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{9}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow x < 2$ dalle proprietà dell'esponenziale.

Fino ad ora abbiamo esaminato solo esempi in cui entrambi termini dell'equazione compaiono potenze aventi la stessa base. Se b non è una potenza di a occorre applicare i logaritmi.

Una disequazione logaritmica (elementare) si presenta nelle seguenti forme

1. $\log_a x > b$
2. $\log_a x < b$

con a, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ed $x > 0$.

Valgono i seguenti fatti:

Se $a > 1$:

- $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$
- $\log_a x < b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$

Se $0 < a < 1$:

- $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$
- $\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b$

Esempio

1. $\log_3 x > -2$

Innanzitutto imponiamo la condizione d'esistenza del logaritmo $x > 0$. Poiché $a > 1$, si ha :

$x > 3^{-2} \quad \Rightarrow x > \frac{1}{9}$.

2. $\log_{\frac{1}{2}} x > 3$

Poniamo, come sempre, la condizione di esistenza del logaritmo: $x > 0$.
Poiche $0 < a < 1$, si ha :

$$x < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{8}$$

Ricordiamo che l'insieme delle soluzioni ottenute deve essere posto a sistema con la condizione di esistenza del logaritmo. Quindi la disequazione è verificata per $0 < x < \frac{1}{8}$.

9.3 Disequazioni esponenziali e logaritmiche più complicate

La risoluzione delle disequazioni esponenziali e logaritmiche risulta essere più complicata dal punto di vista dei calcoli se, ad esempio, l'incognita non è semplicemente la x ma è una funzione di x, cioè una $f(x)$, o anche quando nella disequazione sono presenti due o più esponenziali oppure due o più logaritmi. Diamo quindi una schematizzazione della risoluzione dei casi che si presentano più frequentemente, con relativi esempi:

Se $a > 1$:

1. $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
2. $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
3. $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow f(x) > a^b$
4. $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow f(x) < a^b$

I casi 3 e 4 si possono anche risolvere riscrivendo b sottoforma di logaritmo e applicando il procedimento che illustreremo qui di seguito:

5. $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
6. $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Invece le disequazioni del seguente tipo

7. $f(a^x) > b$
8. $f(\log_a x) > b$

si risolvono con una sostituzione. Precisamente poniamo l'intero esponenziale (logaritmo) uguale alla variabile t, risolviamo la disequazione in t e ritorniamo poi alla disequazione di partenza .

Se $0 < a < 1$ le disequazioni equivalenti risultano avere versi discordi. Per essere chiari, si ha:

9. $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
10. $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
11. $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow f(x) < a^b$
12. $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow f(x) > a^b$
13. $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
14. $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

Esempio

1. $3^{5x-1} > 3^{2x-3}$

Consideriamo la disequazione equivalente $5x - 1 > 2x - 3$. Da semplici conti otteniamo

$$x > -\frac{2}{3}.$$

2. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 2$

Per l'esistenza del logaritmo dobbiamo imporre $x - 1 > 0$, cioè $x > 1$.

La disequazione equivalente è

$$x - 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^2, \text{ cioè } x < \frac{5}{4}$$

(essendo la base del logaritmo minore di uno).

Tenendo conto della condizione d'esistenza le soluzioni sono date da $1 < x < \frac{5}{4}$.

3. $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) > \log_2(2x-5)$

Imponiamo le condizioni di esistenza dei logaritmi che compaiono nella disequazione:

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \\ 2x-5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>2 \\ x>\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow x>\frac{5}{2}$$

Applicando le proprietà dei logaritmi alla disequazione di partenza, si ha:

$$\log_2[(x+2)(x-2)] > \log_2(2x-5) \Rightarrow \log_2(x^2-4) > \log_2(2x-5)$$

Passando alla disequazione relativa agli argomenti, essendo $a>1$, si ha:

$$x^2-4>2x-5 \Rightarrow x^2-2x+1>0 \Rightarrow (x-1)^2>0.$$

Quindi la disequazione è verificata $\forall x, x \neq 1$. Mettendo a sistema l'insieme delle soluzioni ottenuto e la condizione di esistenza dei logaritmi, otteniamo che la soluzione della disequazione logaritmica è: $x>\frac{5}{2}$.

4. $\log^2 x + \log x - 2 \leq 0$
Imponendo la condizione di esistenza del logaritmo, si ha $x>0$. A questo punto poniamo $\log x = t$ e otteniamo la disequazione $t^2+t-2\leq 0$. Da semplici conti troviamo la soluzione

$-2 \leq t \leq 1$ cioè $-2 \leq \log x \leq 1$

che possiamo scrivere come

$10^{-2} \leq x \leq 10$.
Mettendo a sistema con la condizione $x>0$, ritroviamo la soluzione $10^{-2} \leq x \leq 10$.

ESERCIZI PROPOSTI

1. $3^x > 9$ $\quad [x>2]$
2. $2^x < 4$ $\quad [x<2]$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 16$ $\quad [x<-4]$
4. $2^{5x-1} > \frac{1}{16}$ $\quad \left[x>-\frac{3}{5}\right]$
5. $81^x \cdot \frac{1}{3} > 3^{2x-1}$ $\quad [x>0]$
6. $\log(x^2+x)-\log(x-1)>\log(x+3)$ $\quad [1<x<3]$
7. $\ln(x^2-1)-\ln(x^2-7x+12)<\ln 4$ $\quad \left[x<\frac{7}{3},\ x>7\right]$

8. $\ln(x-7)+\ln 100 > \ln(x+8)(2x+1)$ $\left[12 < x > \frac{59}{2}\right]$

9. $\ln(3x-4)+\ln(5-x) > \ln 10$ $\left[3 < x < \frac{10}{3}\right]$

Capitolo 10

Sistemi di equazioni

10.1 Introduzione

Un sistema di equazioni è un insieme di equazioni le cui soluzioni devono soddisfare contemporaneamente tutte le equazioni del sistema preso in esame. Questa argomento è di fondamentale importanza perché in moltissime applicazioni si devono risolvere uno o più sistemi per giungere ad un risultato. Le applicazioni in ambito scolastico sono essenzialmente legate allo studio dei punti di intersezione tra curve rappresentate in forma cartesiana.
Ma esistono moltissime altre applicazioni ed è stata sviluppata tutta una teoria al riguardo, facendo uso della cosiddetta notazione matriciale, che però generalmente viene affrontata durante gli studi universitari.

10.2 Le soluzioni di un sistema d'equazioni

Per la risoluzione dei sistemi di equazioni di primo grado (detti anche sistemi lineari)in due variabili (ad esempio x ed y), esistono 4 metodi di risoluzione che portano, ovviamente, allo stesso risultato e la cui preferenza dipende di uno rispetto ad un altro dipende dallo svolgimento di un numero minore di calcoli (il discorso vale in maniera analoga se consideriamo n incognite).
Consideriamo, quindi, il generico sistema di due equazioni in due incognite**:**

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

Un sistema può essere

- *Determinato* se ammette un numero finito di soluzioni
- *Indeterminato* se ammette un numero infinito di soluzioni
- *Impossibile* se non ammette nessuna soluzione

Vediamo i vari metodi con cui si può risolvere, considerando anche degli esempi specifici.

10.3 Metodo di sostituzione

Iniziamo con l'effettuare tutte le operazioni presenti nel sistema e ridurre così i monomi simili. A questo punto esplicitiamo una delle due equazioni, cioè ricaviamo un'incognita in funzione dell'altra e la sostituiamo nella restante equazione che, riducendosi ad una equazione di primo grado in una sola variabile, si risolve facilmente. Infine sostituiamo il valore dell'incognita così ottenuto nell'equazione in cui l'altra incognita era stata esplicitata, ottenendo un valore anche per questa seconda incognita. La coppia di valori trovata è la soluzione del sistema.

Esempio

1. $\begin{cases} x+2y+5=0 \\ -2y+1-5x=0 \end{cases}$

Ricaviamo la variabile x dalla prima equazione e la sostituiamo nella seconda .

$$\begin{cases} x=-2y-5 \\ -2y+1-5(-2y-5)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y-5 \\ -2y+1+10y+25=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y-5 \\ 8y=-26 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=-2y-5 \\ y=-\dfrac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2\left(-\dfrac{13}{4}\right)-5 \\ y=-\dfrac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{13}{4} \end{cases}$$

La soluzione è data dalla coppia $(3/2,-13/4)$.

Sottolineamo il fatto che il metodo di sostituzione è il più facile da ricordare e da applicare, ma nel caso di più incognite può presentare dei calcoli molto lunghi e quindi è da ritenersi sconsigliabile per non incorrere in errori di calcolo.

2. $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

In questo caso il sistema è di tre equazioni in tre incognite. Iniziamo col ricavare l'incognita x dalla prima equazione in funzione dell'incognita y e la sostituiamo nella seconda e terza equazione:

$$\begin{cases} x=1-y \\ 1-y+z=2 \\ 1-y+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 1-y+z=2 \\ z=-1 \end{cases}$$

e, sostituendo il valore di z trovato nelle prime due equazioni, otteniamo:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

La soluzione trovata è la terna (3,-2,-1).

10.4 Metodo di riduzione

Inizialmente effettuiamo sempre tutte le operazioni presenti nel sistema e riduciamo i monomi simili.

- si individua il minimo comune multiplo dei coefficienti di una delle due incognite
- si trova il fattore che consente di ottenere tale m.c.m. (e il suo opposto) per l'incognita considerata.
- si sommano algebricamente in colonna le due equazioni: in questo modo scompare un'incognita
- si risolve l'equazione così ottenuta ad una sola incognita
- a scelta si può ripetere il procedimento per l'eliminazione dell'altra incognita oppure effettuare il metodo di sostituzione.

Esempio

1. $\begin{cases} 12x + y = 9 \\ 15x - y = 18 \end{cases}$

Essendo già il sistema nella forma per applicare il metodo di riduzione occorre scegliere l'incognita.
Osserviamo che i coefficienti dell'incognita y nelle due equazioni coincidono a meno del segno. Quindi si può procedere direttamente alla somma algebrica delle due equazioni. Otteniamo così l'equazione:

$$12x + 15x + (y - y) = 9 + 18 \quad \Rightarrow \quad 27x = 27 \quad \Rightarrow \quad x = 1 .$$

Sostituendo il valore della x trovato in una delle due equazioni del sistema, otteniamo $y = -3$.
Quindi la soluzione è la coppia $(1,-3)$.

Adesso è importante sottolineare come i conti possono talvolta essere più complicati a seconda dell'incognita che si sceglie inizialmente. Consideriamo l'incognita x. Il m.c.m. tra 12 e 15 è 60, perciò moltiplichiamo la prima equazione per 5, risultato della divisione tra 60 e 12, e la seconda equazione per -4, il risultato della divisione tra 60 e 15, cambiato di segno (ricordiamo che moltiplicare per un numero un'equazione vuol dire moltiplicare per quel numero tutti i termini dell'equazione):

$$\begin{cases} 60x + 5y = 45 \\ -60x + 4y = -7 \end{cases}$$

Sommando algebricamente le due equazioni, si ha:

$9y = -27 \quad \Rightarrow \quad y = -3$. Sostituendo il valore trovato in una delle due equazioni, si trova $x = 1$.

Denotare la differenza di conti a seconda dell'incognita scelta. Tuttavia talvolta sarà inevitabile.

10.5 Metodo del confronto

Dopo aver effettuato tutte le operazioni presenti nel sistema e aver ridotto i monomi simili, esplicitiamo entrambe le equazioni rispetto alla stessa variabile e le eguagliamo. Si ottiene così un'equazione in una sola incognita. Sostituiamo il valore ottenuto in una delle due equazioni di partenza.

Esempio

1. $\begin{cases} 3x - y = -2 \\ x + y = 6 \end{cases}$

Ricaviamo l'incognita y da entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 6 - x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3x + 2 = 6 - x \quad \Rightarrow \quad 4x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Sostituendo in una delle due equazioni del sistema otteniamo $y = 5$. Quindi la soluzione è la coppia (1,5).

10.6 Metodo di Cramer

Premettiamo che questo tipo di risoluzione utilizza risultati matematici che verranno affrontati nello studio dell'algebra lineare durante il I anno universitario. Qui daremo una schematizzazione della risoluzione di un sistema di due equazioni in due incognite, senza scendere nei dettagli.

Poniamo il sistema nella seguente forma, nota come *forma canonica*:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Chiamiamo Δ, Δ_x, Δ_y, rispettivamente, le seguenti espressioni:

$\Delta = ab' - a'b$, $\Delta_x = cb' - c'b$, $\Delta_y = ac' - c'a$

Se $\Delta \neq 0$, la soluzione è unica ed è data dalle seguenti formule:

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ e $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

La condizione $\Delta \neq 0$ è essenziale. Se $\Delta = 0$, allora il sistema è indeterminato o impossibile.

Esempio

1. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

Calcoliamo inizialmente Δ per stabilire se è diverso da zero:
$\Delta = 2 - 1 = 1 \neq 0$. Quindi il sistema è determinato. Ne segue che
$\Delta_x = 2 - 3 = -1$ e $\Delta_y = 3 - 1 = 2$ e si ha $x = -\frac{1}{1} = -1$ e $y = \frac{2}{1} = 2$.
La soluzione è la coppia (-1,2).

ESERCIZI PROPOSTI

1. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$ $[(3,\ 2)]$

2. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $[(4,\ 5)]$

3. $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 3x + 8y = 5 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)\right]$

4. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 11 \end{cases}$ $[(9,\ -2)]$

5. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $[(2,\ 3)]$

6. $\begin{cases} x - y + z = 8 \\ 2x + y + 3z = 11 \\ 3x + y - 3z = 10 \end{cases}$ $[(5,\ -2,\ 1)]$

7. $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ x + 2y - 8z = 1 \end{cases}$ $\left[\left(1,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)\right]$

8. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y + 3z = 2 \\ 3x + 6y - 5z = 3 \end{cases}$ [indeterminato]

Capitolo 11

La retta

11.1 Introduzione

La geometria analitica è l'esempio di una prima applicazione dell'algebra. Ha permesso infatti di tradurre un ente "geometrico" in un ente "algebrico". In questo capitolo vedremo come un'equazione di I grado in due incognite rappresenta geometricamente una retta, la soluzione di un sistema lineare in due incognite rappresenta il punto d'intersezione di due rette. Nel capitolo successivo vedremo come le equazioni di II grado in due incognite rappresentano curve del piano. Inoltre numerose applicazioni della geometria analitica sono presenti ormai in svariati campi delle scienze e dell'ingegneria e della fisica.

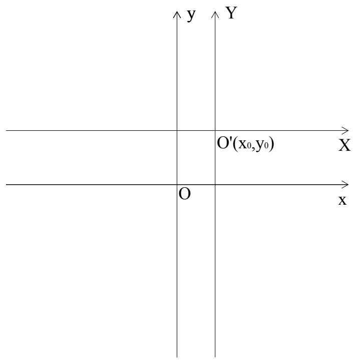
11.2 Coordinate cartesiane ortogonali

Dato un piano α, consideriamo su di esso due rette fra loro perpendicolari e un'unità di misura *u*. Indichiamo con O (origine) il punto di incontro delle rette e ad esso assegniamo la coppia di valori $(0,0)$. Fissiamo orizzontale il punto 1 riportando l'unità di misura sulla retta orizzontale a destra di O e sulla retta verticale in alto rispetto ad O. Dal primo punto ottenuto consideriamo la verticale e dal secondo l'orizzontale; chiamiamo $U(1,1)$ il punto ottenuto. Si ha così una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali, nel senso che ad ogni
coppia di numeri, corrisponde un punto nel piano e ad ogni punto nel piano corrisponde una coppia di numeri reali. Indicheremo con la notazione (*x, y*) la coppia di numeri reali associata ad ogni punto del piano (le sue *coordinate*), e chiameremo *ascissa* la *x* e *ordinata* la *y*.
Con la costruzione precedente abbiamo diviso il piano in 4 parti che chiameremo quadranti.
Nel primo quadrante i punti hanno entrambe le coordinate positive, nel secondo quadrante i punti hanno la prima coordinata negativa e la seconda positiva, nel terzo quadrante i punti hanno entrambe le coordinate negative ed infine nel quarto quadrante i punti hanno la prima coordinata positiva e la seconda negativa.

11.3 Traslazioni degli assi

Consideriamo due sistemi di riferimento cartesiani Oxy e $O'XY$, paralleli e equiversi (cioè gli assi x e X, y e Y hanno lo stesso verso). Supponiamo che O' abbia coordinate (x_0, y_0) rispetto al sistema di riferimento Oxy e consideriamo il punto P avente coordinate (x, y) e (X, Y) rispetto ai due sistemi di riferimento Oxy e $O'XY$. Allora valgono le seguenti formule di traslazione:

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$$



11.4 Punto medio del segmento

Considerato il segmento di estremi $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$, il punto medio M di tale segmento si dimostra avere le seguenti coordinate: $M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Esempio

1. Dato il segmento di estremi $A=(1,-2)$ e $B=(3,4)$, il punto medio del segmento è

$M=\left(\frac{1+3}{2},\frac{-2+4}{2}\right)=(2,1)$.

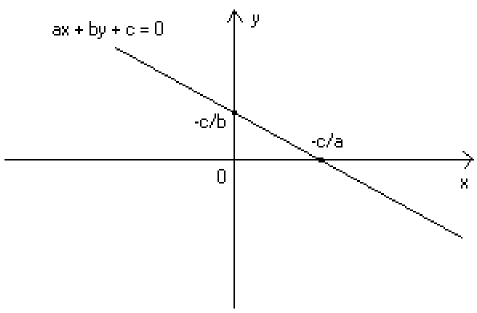
11.5 Equazione cartesiana della retta

Un'equazione di primo grado

$$ax+by+c=0$$

con i parametri a e b non contemporaneamente nulli, rappresenta la generica *retta* del piano cartesiano in *forma implicita*. Possiamo distinguere i seguenti casi:

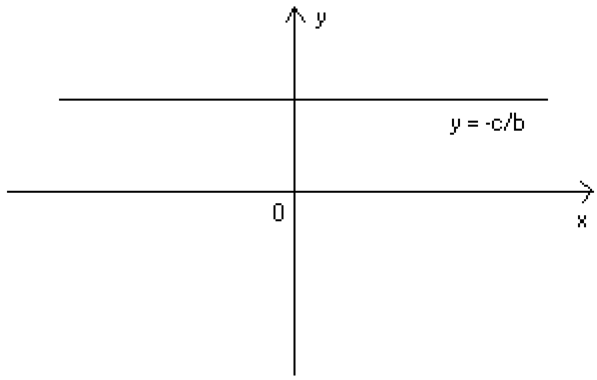
- $a\neq 0$, $b\neq 0$



Esempio

1. $3x + 2y + 5 = 0$

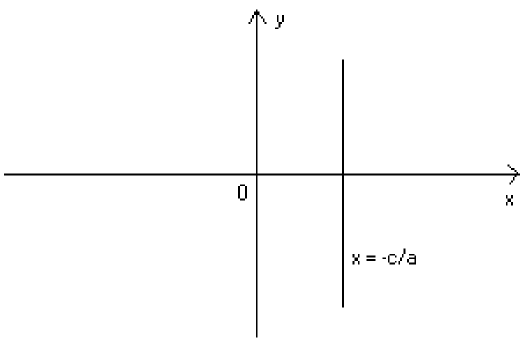
- $a = 0$, $b \neq 0$ (retta parallela all'asse x):



Esempio

1. $y = -5$

- $a \neq 0$, $b = 0$ (retta parallela all'asse y):



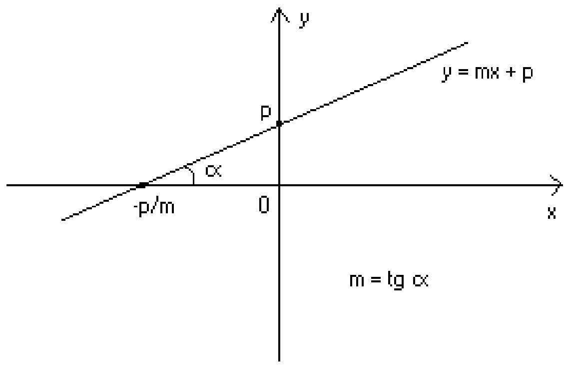
Esempio

1. $x = 3$

Nel caso in cui $b \neq 0$, l'equazione della retta può essere messa in forma esplicita : $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

che in genere assume l'espressione $y = mx + q$, nota come *forma esplicita* della retta, n $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$.

Il parametro m è detto *coefficiente angolare* della. La forma esplicita ha il seguente significato geometrico:



m rappresenta la pendenza della retta. Infatti se consideriamo il triangolo rettangolo intercettato dalla retta sugli assi cartesiani, m è uguale alla tangente dell'angolo α (preso a partire dalla semiretta Ox in senso antiorario), argomento che verrà affrontato nel Cap.14. Altra interpretazione geometrica del coefficiente angolare sarà trattata nel concetto di *derivata*, argomento che invece sarà affrontato durante i corsi del I anno universitario. Osserviamo che la forma esplicita non rappresenta le rette del tipo $x = k$.

11.6 Equazione parametrica della retta

Una forma parametrica generale della retta è :

$$\begin{cases} x = at + b \\ y = a't + b' \end{cases}$$

dove a, a', b, b' sono numeri reali e t è un parametro reale .

Quindi in questo caso la retta è rappresentata da due equazioni caratterizzate da un parametro. In genere si preferisce questa forma nell' ambito della fisica matematica o dei software di calcolo. Per ritrovare la forma cartesiana dell'equazione della retta è sufficiente eliminare il parametro t.

Esempio

1. Considerata l'equazione della retta in forma parametrica $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$, ricaviamo il parametro t

da entrambe le equazioni e applichiamo il metodo del confronto (vedi cap.11):

$$t = x - 1$$
$$t = \frac{y+1}{2}$$
$$x - 1 = \frac{y+1}{2}$$
$$2x - 2 = y + 1$$
$$2x - y - 3 = 0$$

che rappresenta l'equazione della retta in forma cartesiana.

11.7 Rette incidenti e applicazione geometrica nei sistemi lineari

Due rette nel piano che si incontrano vengono dette secanti. Più precisamente ricordiamo che esse possono incontrarsi soltanto in un punto, detto punto di intersezione. Esso è la soluzione del sistema lineare formato con le equazioni delle due rette.

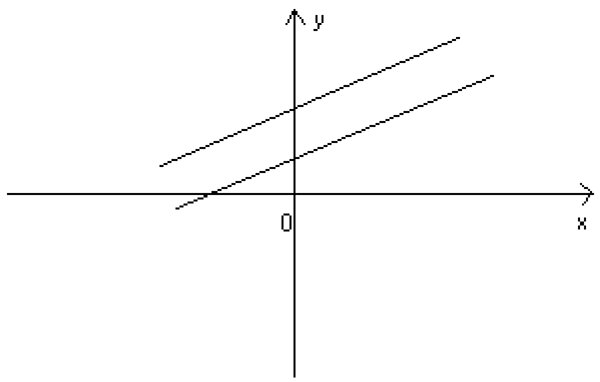
Esempio

1. Consideriamo le rette d'equazione $y=-3x-1$ e $y=2x+5$. Per trovare il punto d'intersezione consideriamo il sistema $\begin{cases} y=-3x-1 \\ y=2x+5 \end{cases}$. Con uno dei metodi visti nel Cap. 11, troviamo la soluzione $x=-\frac{6}{5}$, $y=\frac{13}{5}$. Quindi il punto d'intersezione è $\left(-\frac{6}{5},\frac{13}{5}\right)$.

11.8 Rette parallele e ortogonali

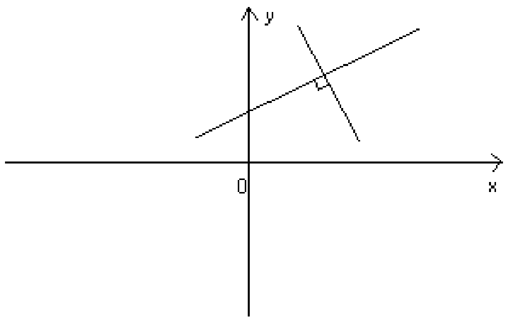
Due rette sono parallele dal punto di vista analitico se hanno lo stesso coefficiente angolare. Se consideriamo le equazioni di due rette in forma esplicita

$y=mx+q$ e $y=m'x+q'$, allora esse sono parallele $\Leftrightarrow$ $m=m'$.



Osserviamo che le rette parallele all'asse y, non rappresentabili in forma esplicita, sono ovviamente parallele.

Due rette sono perpendicolari se si intersecano in un angolo di 90 gradi. Analiticamente si dimostra che se consideriamo le equazioni di due rette in forma esplicita $y=mx+q$ e $y=m'x+q'$ allora esse sono perpendicolari $\Leftrightarrow$ $m\cdot m'=-1$.



Rette parallele agli assi coordinati vanno ovviamente considerate separatamente. Esse sono le rette di equazione $x = k$ e $y = h$, che sono naturalmente perpendicolari. Il problema è che la retta $x = k$ non ha una forma esplicita.

Esempio

1. Consideriamo le equazioni delle rette $y = 3x + 2$ e $6x - 2y + 5 = 0$. Portando la seconda equazione in forma esplicita, otteniamo $y = 3x + \frac{5}{2}$. Quindi le due rette sono parallele perché hanno lo stesso coefficiente angolare pari a 3.

2. Le rette di equazione $y = 4x + 2$ e $y = -\frac{1}{4}x + 5$ sono perpendicolari poiché $m \cdot m' = 4\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$.

11.9 Retta per un punto.

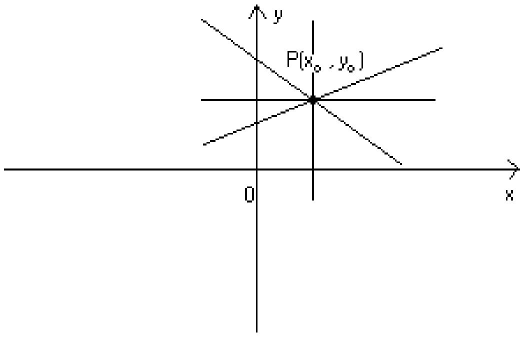
L'insieme delle infinite rette del piano cartesiano che passano per un punto $P = (x_0, y_0)$ è detto *fascio proprio* di centro P. L'equazione del fascio si ottiene sostituendo le coordinate del punto nell'equazione della retta in forma esplicita o implicita. Noi considereremo quella in forma implicita:

$$ax + by = c$$
$$ax_0 + by_0 = c$$

Sottraendo membro a membro, otteniamo:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

dove a e b sono parametri reali.



Esempio

1. Il fascio di rette passante per il punto $P(1,2)$ ha equazione:

$a(x-2)+b(y-2)=0$

11.10 Retta per due punti

Consideriamo l'equazione della retta in forma esplicita $y = mx + q$ e imponiamo il passaggio per il punto $A=(x_1, y_1)$

$$\begin{aligned} y &= mx+q \\ y_1 &= mx_1+q \\ y_2 &= mx_2+q \end{aligned}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo

(1) $\quad y-y_1 = m(x-x_1)$.

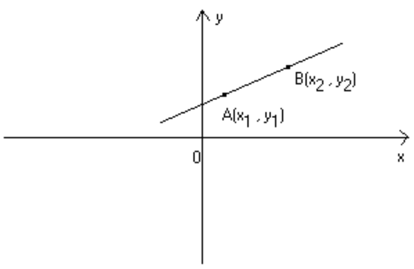
Imponendo il passaggio per $B=(x_2, y_2)$:

(2) $\quad y_2-y_1 = m(x_2-x_1)$.

Da (1) e (2) si ha l'equazione della retta passante per i punti A e B:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

I casi in cui la retta è parallela ad un asse coordinato non sono ovviamente contemplati in questa equazione, in quanto i denominatori si annullerebbero.



Esempio

1. La retta passante per i punti $A(2,1)$ e $B(3,3)$ ha equazione
$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{3-1}.$$

Da semplici conti otteniamo $x-2=\dfrac{y-1}{2}$ ovvero $2x-y-3=0$.

ESERCIZI PROPOSTI

1. Trovare il punto medio del segmento di estremi $A=(1,3)$ e $B=(5,9)$ [(3,6)]

2. Consideriamo una traslazione di assi che porta l'origine del sistema di riferimento nel punto $P=(-4,-5)$. Trovare le coordinate del seguente punto nel sistema di riferimento *vecchio* Oxy, di cui sono date le coordinate nel sistema di riferimento *nuovo* $O'XY$: $A=(-2,-2)$

[(-6,-7)]

3. Trovare il punto d'intersezione delle due rette aventi equazione $y=3x+2$ e $2x-y+4=0$ [(2,8)]

4. Trovare il punto d'intersezione delle due rette aventi equazione
$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{y}{2}$ e $\dfrac{x+y}{2}+x=-1$ [-2,4]

5. Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $A=(1,3)$ e $B=(-2,4)$ [$x+3y=10$]

6. Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $A=(-1,-3)$ e $B=(-2,-4)$ [$x-y=2$]

7. Trovare il coefficiente angolare e l'ordinata all'origine della retta d'equazione $7x-8y+4=0$ $\left[\dfrac{7}{8}\right]$

8. Stabilire se le rette di equazione $y=x+2$ e $2x-y+3=0$ sono parallele e giustificarne la risposta [no]

9. Stabilire se le rette di equazione $y=x+2$ e $2x+2y+3=0$ sono ortogonali e giustificarne la risposta [si]

Capitolo 12

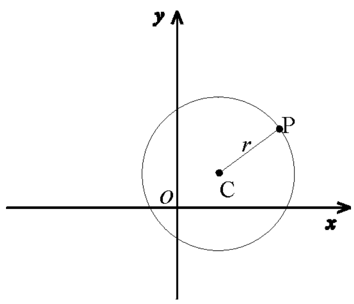
Le coniche: circonferenza, parabola, ellisse e iperbole

12.1 Introduzione

Queste curve si chiamano *coniche* perché sono ottenute tramite l'intersezione di una superficie conica con un piano.
Si possono definire tutte come luoghi geometrici e, di conseguenza, ricavarne l'equazione algebrica che le rappresenta nel piano cartesiano.
Lo vedremo come esempio per la circonferenza.

12.2 La Circonferenza

La *circonferenza* è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto *C*, detto *centro*.
Si ottiene tagliando un cono con un piano perpendicolare al suo asse.
La distanza fra ognuno dei suoi punti e il centro è il *raggio* della circonferenza.



Note le *coordinate del centro C (α;β)* e la *misura r del raggio*, *l'equazione della circonferenza* è allora

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad \text{(equazione canonica)}$$

Ricaviamola.
Tutti i punti *P* che stanno sulla circonferenza hanno la proprietà comune che

$$\overline{PC}=r,$$

cioè

$$\overline{PC}^2=r^2.$$

Utilizzando la formula della distanza tra due punti si ottiene allora

$$\overline{PC} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

Elevando al quadrato e sostituendo al posto di $\overline{PC}^2$ la sua misura si ottiene allora l'equazione cercata.

Esempio

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$
è l'equazione della circonferenza con centro C(2; -1) e raggio 3.
L'equazione può anche essere scritta nella forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \qquad \text{(equazione generale)}$$

dove *a, b* e *c* sono legati alle coordinate del centro

$$C(\alpha;\beta)$$

ed al raggio dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{a}{2}, \\ \beta = -\dfrac{b}{2}, \\ r = \sqrt{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{b}{2}\right)^2 - c}, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases}$$

Esempio

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$
è l'equazione della circonferenza con centro *C*(-1,2) e raggio 4.

Si segnalano i seguenti casi particolari

a=0, il centro appartiene all'asse y:
b=0, il centro appartiene all'asse x;
c=0, la circonferenza passa per l'origine degli assi.

Per determinare l'equazione di una circonferenza è necessario determinare i tre parametri (*a, b, c*) dell'equazione generale di una circonferenza.
Ad esempio citiamo i seguenti casi:

- sono note le coordinate del centro e il raggio;
- sono note le coordinate degli estremi di un diametro;
- la circonferenza passa per un punto e sono note le coordinate del centro;
- la circonferenza passa per tre punti non allineati;

- la circonferenza passa per due punti e il centro appartiene a una retta nota;
- sono note le coordinate del centro e la circonferenza è tangente a una retta nota.

N.B.: Lo studente è invitato a verificare graficamente con degli esempi che queste condizioni sono sufficienti per disegnare circonferenze.
Vediamo un esempio per chiarire le idee.
Esempio

Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C(2,-3)$ e passante per $A(1,1)$.
Il raggio della circonferenza sarà:
$r = \overline{CA} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$
Usando l'equazione canonica della circonferenza otteniamo

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 35 = 0$$

Una retta ed una circonferenza possono essere *secanti*, *tangenti* o *esterne* l'una rispetto all'altra.
Dato allora il sistema formato dall'equazione della circonferenza e da quella della retta

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

nell'equazione di secondo grado che risolve il sistema (ricavando una delle due variabili in funzione dell'altra nella seconda equazione), abbiamo allora le tre possibilità alternative:

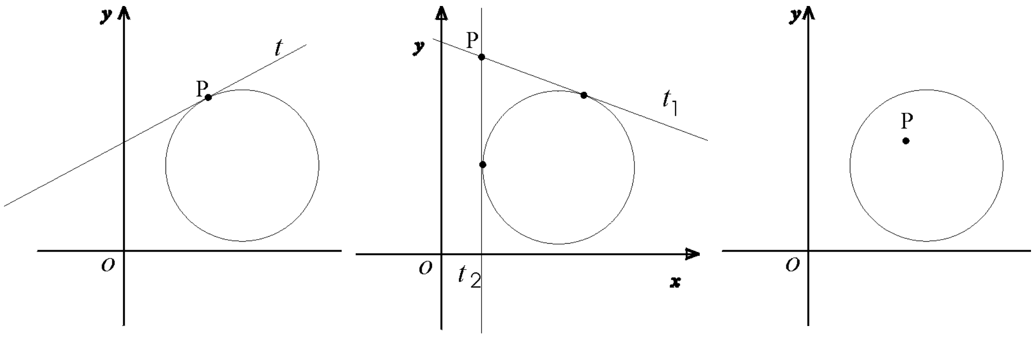
- $\Delta > 0$, la retta è *secante*;
- $\Delta = 0$, la retta è *tangente*;
- $\Delta < 0$, la retta è *esterna*.

Dato un punto $\boldsymbol{P(x_0, y_0)}$ e una circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 ,$$

si possono verificare le tre condizioni.

- P è esterno alla circonferenza, le *rette per P tangenti alla circonferenza sono due*;
- P appartiene alla circonferenza, la *retta tangente è una sola*;
- P è interno alla circonferenza, *non esistono rette tangenti* uscenti da P.



Per determinare le equazioni delle eventuali *rette tangenti*, si possono seguire due metodi.

I metodo

- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

- si scrive il sistema fra le equazioni del fascio e la circonferenza:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = y_0 + m(x - x_0) \\ x^2 + (y_0 + m(x - x_0))^2 + \dots \end{cases}$$

- con il metodo di sostituzione si ottiene quindi un'equazione di secondo grado nella variabile *x*;
- si impone la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$;
- si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a *m*;
  se $m_1 \neq m_2$, le rette tangenti sono due e il punto *P* è esterno alla circonferenza;
  se $m_1 = m_2$, la retta tangente è una sola e il punto *P* appartiene alla circonferenza;
  se $m_1, m_2 \notin \mathbb{R}$, non esistono rette tangenti e il punto *P* è interno alla circonferenza;
- si sostituisce il valore o i valori trovati di *m* nell'equazione del fascio di rette.

Esempio

Scrivere l'equazione delle rette passanti per *P(0,-4)* e tangenti alla circonferenza

$$x^2 + y^2 = 4.$$

L'equazione della retta generica passante per *P* è:

$$y - (-4) = m(x - 0)$$

intersecando con la circonferenza otteniamo

$$\begin{cases} y = mx - 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = mx - 4 \\ x^2(1+m^2) - 8mx + 12 = 0 \end{cases}$$

imponendo

$$\frac{\Delta}{4} = 0$$

si ottiene

$$\frac{\Delta}{4} = (4m)^2 - 12(1+m^2) = 0$$

che ci dà il coefficiente angolare delle rette tangenti

$$m = \pm\sqrt{3}\,.$$

Le due rette sono quindi:

$$y = \pm\sqrt{3}x - 4$$

II Metodo

- si determinano le coordinate del centro C e del raggio r della circonferenza;
- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $\boldsymbol{P(x_0, y_0)}$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

  cioè

$$mx - y + y_0 - mx_0 = 0$$

- si applica la formula della distanza fra le rette e il centro C;
- si pone tale distanza uguale al raggio e si risolve l'equazione in m;
- si sostituisce il valore o i valori trovati di m nell'equazione del fascio di rette.

Se il punto P appartiene alla circonferenza, allora la retta tangente è la retta per P perpendicolare a PC.

Due circonferenze possono essere *secanti* in due punti, *tangenti* in uno stesso punto (esternamente o internamente), *una interna all'altra, concentriche o esterne*.

Per determinare gli eventuali punti di intersezione o il punto di tangenza, occorre risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

È conveniente risolvere il sistema con il metodo di riduzione.

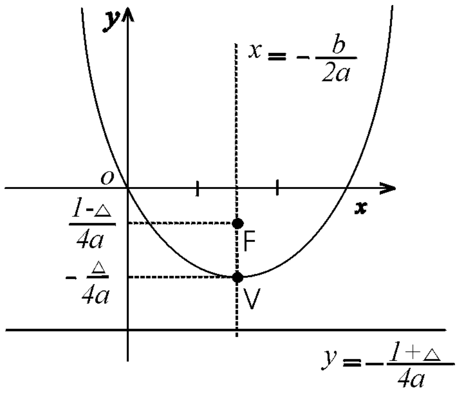
Sottraendo le due equazioni, si ottiene infatti l'equazione di primo grado

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$$

che è l'asse radicale, nella quale si potrà ricavare x in funzione di y (per esempio) e sostituirla poi in una delle due equazioni della circonferenza.

12.3 La parabola

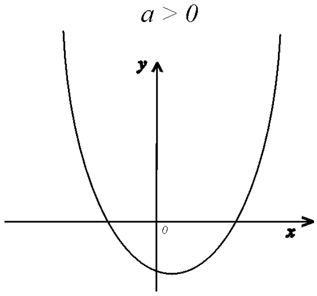
La *parabola* è il luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta detta *direttrice* e da un punto fisso detto *fuoco*. La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama *asse* della parabola.

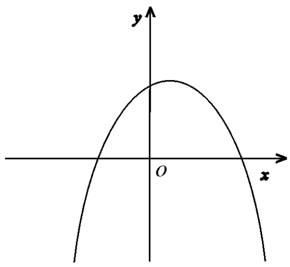


L'asse della parabola è un asse di simmetria e interseca la parabola nel *vertice*.
Una *parabola con asse parallelo all'asse y* è rappresentata da un'equazione del tipo

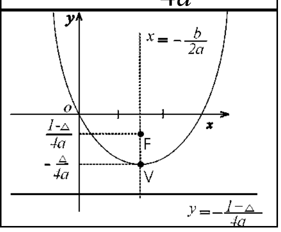
$y = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$)

Concavità e apertura della parabola dipendono dal parametro *a*.





Riassumiamo alcune caratteristiche della parabola nel seguente schema.

Equazione	$y = ax^2 + bx + c$
Asse	$x = -\frac{b}{2a}$
Vertice	$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$
Fuoco	$F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
Direttrice	$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$
Figura	

L'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse x è del tipo

$$x = ay^2 + by + c \qquad \text{(con } a \neq 0\text{)}.$$

dove *a, b, c* sono coefficienti reali e $a \neq 0$.
Anche nell'equazione della parabola (come in quella della circonferenza)

$$y = ax^2 + bx + c$$

sono presenti i tre coefficienti *a, b* e *c*. Per poterli determinare occorrono in genere *tre condizioni*.
Alcune possibili condizioni sono le seguenti:

- sono note le coordinate del vertice e del fuoco;
- sono note le coordinate del vertice (o del fuoco) e l'equazione della direttrice;
- la parabola passa per tre punti non allineati;
- la parabola passa per due punti e si conosce l'equazione dell'asse;
- la parabola passa per un punto e sono note le coordinate del vertice (o del fuoco);
- la parabola passa per un punto e sono note le coordinate dell'asse e della direttrice.

N.B.: Per le soluzioni di problemi di tangenza o intersezione tra rette e parabola ed esercizi riguardanti la determinazione dell'equazione della parabola (cioè dei suoi parametri *a, b, c*) soddisfacente tre condizioni date, si procederà nello stesso modo e con le stesse procedure utilizzate nel caso della circonferenza.
A titolo di esempio riportiamo solo lo schema riguardante le condizioni di tangenza tra retta e parabola.
Le *rette tangenti a una parabola*, uscenti da un punto $\boldsymbol{P(x_0, y_0)}$, possono essere due, una o nessuna.
Per determinare le equazioni delle eventuali *rette passanti per* $\boldsymbol{P(x_0, y_0)}$ *e tangenti alla parabola*, si procede nel seguente modo:

- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $\boldsymbol{P(x_0, y_0)}$,

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

- si scrive il sistema fra le equazioni del fascio e della parabola:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

- si perviene all'equazione di secondo grado in x:

$$ax^2 + (b - m)x + (c + mx_0 - y_0) = 0;$$

- si calcola Δ:

$$\Delta = (b - m)^2 - 4a(c + mx_0 - y_0);$$

- si pone la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$:

$$(b - m)^2 - 4a(c + mx_0 - y_0) = 0,$$

ossia

$$m^2 - 2m(b + 2ax_0) + (b^2 - 4ac + 4ay_0) = 0;$$

- si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m:
  - se $m_1 \neq m_2$, le rette tangenti sono due;
  - se $m_1 = m_2$, la retta tangente è una sola e il punto P appartiene alla parabola;
  - l'equazione non ha soluzioni.
- se si trova il valore (o i valori) di m, si sostituisce nell'equazione del fascio di rette determinando così le equazioni delle rette tangenti.

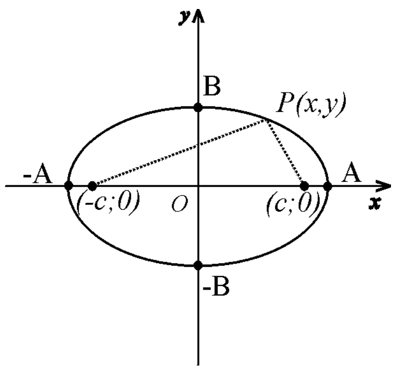
12.4 L'ellisse

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi. L'equazione dell'ellisse riferita al centro degli assi cartesiani è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

centro *O(0,0)*
fuochi $\boldsymbol{F_1(c,0)}$ e $\boldsymbol{F_2(-c,0)}$,
essendo $c^2 = a^2 - b^2$
vertici *A(a,0)*, *B(b,0)*, *-A, -B*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$



L'eccentricità e indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse: $0 \leq e < 1$.

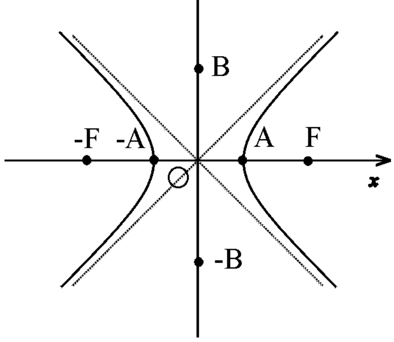
12. 5 L'iperbole

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.
L'equazione dell'iperbole riferita al centro degli assi cartesiani è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

centro *O(0,0)*
fuochi $\boldsymbol{F\ (c,0)}$ e $\boldsymbol{-F\ (-c,0)}$,
essendo $c^2 = a^2 + b^2$ vertici *A(a,0)*, *B(-a,0)*
asintoti:

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$



$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Per l'iperbole è e>1.

Un'iperbole si dice *equilatera* se ha gli asintoti ortogonali e si presenta in una delle due forme:

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2} \quad (1)$$

o

$$xy=k \quad (2).$$

Quest'ultima equazione si ottiene considerando un'iperbole avente gli asintoti coincidenti con gli assi cartesiani

Esercizi proposti

1. Disegnare, dopo aver ricavato centro e raggio, le seguenti circonferenze.

$x^2+y^2+2x-4y-11=0$
$x^2+y^2-8x-9=0$
$x^2+y^2-2x=0$
$x^2+(y-2)^2+9=0$
$16x^2+16y^2-24x+32y-7=0$ [**N.B.:** Ricorda, devi dividere per 16!]

2. Trovare l'intersezione tra retta e circonferenza e rappresentarle graficamente.

$$\begin{cases} x^2+y^2+3x-3y-2=0 \\ 3x-2y+1=0 \end{cases}$$

[*A* (1; 2) e *B* (-1; -1)]

3. Determinare l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi *A*(-3; 1) e *B*(2; 5).
[**N.B.:** Il centro è il punto medio del segmento AB ed il raggio si ottiene utilizzando la formula della distanza tra due punti. La circonferenza cercata è $x^2+y^2+x-6y-1=0$]

4. Determinare l'equazione della circonferenza passante per *A*(2; 0); *B*(-1; 0) e *C*(1; 2).

[**N.B.:** Basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4+0+2a+0+c=0 \\ 1+0-a+0+c=0 \\ 1+4+a+2b+c=0 \end{cases}$$

per ottenere

$$x^2+y^2-\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{8}{3}=0$$]

5. Stabilire se i punti *A*(1; 5); *B*(10; 2); *C*(-1; -2) appartengono o meno alla circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$$

[si, si, no]

6. Determinare l'equazione delle rette tangenti alla circonferenza
$$x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$$
nei punti $O(0; 0)$ e $A(0; 6)$.

[**N.B.:** Sono le intersezioni della circonferenza con l'asse delle y. Basterà sfruttare il fatto che il raggio della circonferenza è perpendicolare alla retta tangente nei suoi punti di tangenza….

$4x - 3y = 0$; $4x + 3y - 18 = 0$]

7. Determinare gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze e rappresentarli graficamente.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 8x - 16y + 30 = 0 \end{cases}$$

[**N.B.:** Ricorda, usa il metodo di riduzione sottraendo….$A(-1; 3)$; $B(3; 1)$]

8. Data la parabola di equazione
$$y = x^2 - 3x - 4$$
determinare le sue intersezioni con gli assi cartesiani e disegnarla.
Determinare poi i punti di intersezione con la prima bisettrice *(y = x)*
$$\left[\begin{cases} x_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{2} \\ y_{1,2} = ? \end{cases}\right]$$

9. Determinare l'equazione della parabola di vertice $V(1; 0)$ e direttrice *d: y = 2*.
$$\left[y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right]$$

10. Determinare l'equazione della parabola passante per i punti $A(-1; 0)$; $B(0; 5)$; $C(2; 3)$.

[Basta risolvere il sistema $\begin{cases} 0 = a - b + c \\ 5 = c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases}$]

11. Stabilire se la retta di equazione

$$y = x\text{-}4$$

è secante, tangente o esterna alla parabola di equazione

$$y = -x^2 + 3x + 4$$

[secante]

12. Data la parabola di equazione

$$y = -x^2 + 2x + 3,$$

determinare le equazioni delle rette passanti per $P(0; -1)$.

[Puoi risolvere, imponendo il $\Delta = 0$, il sistema

$$\begin{cases} y = mx + m \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}$$

ottenendo $m = \pm 2\sqrt{2}$]

13. Disegna l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

14. Disegna l'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Capitolo 13

Elementi di Goniometria e Trigonometria

13.1 Introduzione

Goniometria e trigonometria sono due termini che derivano dal greco e significano rispettivamente misura degli angoli e misura dei triangoli. Le origini della goniometria e della trigonometria sono assai lontane nel tempo; risalgono a qualche secolo prima di Cristo e sono inizialmente ispirate da esigenze legate alla risoluzione di vari problemi pratici di geodesia, di navigazione, di astronomia, problemi che in genere richiedono di risalire dalla determinazione di angolazioni e distanze misurabili alla determinazione di altre angolazioni e distanze non direttamente misurabili. A partire dal sedicesimo secolo la trigonometria si sviluppa e si afferma anche come disciplina autonoma, raggiungendo quel rigore teorico e quell'aspetto formale e simbolico caratteristici del linguaggio matematico. Nel frattempo però sempre più numerose divengono le implicazioni dei concetti goniometrici con le applicazioni della matematica nel campo scientifico e tecnologico; ben pochi sono infatti i rami della fisica, sia classica che moderna, che non contemplano per la loro trattazione il calcolo goniometrico e trigonometrico.

13.2 Gli angoli e la loro misura

Per angolo si intende la porzione di piano compreso tra due semirette a e b aventi l'origine O in comune. Tali semirette prendono il nome di **lati dell'angolo**, mentre l'origine prende il nome di **vertice dell'angolo.**

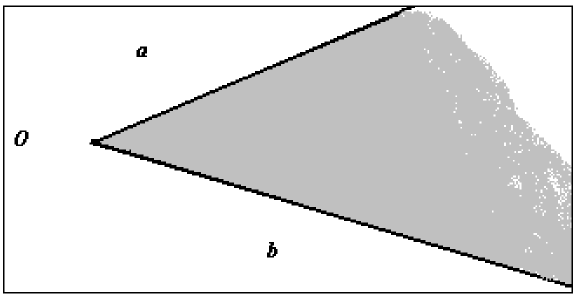


Fig. 13.1

La misura di un angolo è effettuata utilizzando due diverse unità di misura: la misura in gradi e la misura in radianti.

13.1.1 Misure in gradi

Si considera come unità di misura 1/90 dell'angolo retto: in questo modo ogni angolo può essere espresso come frazione dell'angolo retto, che misura, appunto, 90 gradi (in simboli: 90°). Non vengono utilizzati però centesimi e decimi di grado, bensì si fa uso di multipli non decimali, che prendono il nome di **sessagesimali**. In questo modo, otteniamo

- il **primo** $\left(\text{pari a } \frac{1}{60} \text{ di grado}\right)$, in simboli $1' = \frac{1}{60°}$.
- il **secondo** $\left(\text{pari a } \frac{1}{3600} \text{ di grado}\right)$, in simboli $1'' = \frac{1}{60'} = \frac{1}{3600°}$.

Esempi

1) L'angolo corrispondente alla ventesima parte dell'angolo retto misura:

$$\frac{90}{20} \text{ di grado} = 4{,}5 \text{ gradi} = 4 \text{ gradi e } (0{,}5 \times 60) \text{ primi} = 4 \text{ gradi e } 30 \text{ primi.}$$

Avremo:

$$4{,}5 \text{ gradi} = 4°30'.$$

2) La sedicesima parte di un angolo retto misura

$$\frac{90}{16} \text{ di grado} = 5{,}625 \text{ gradi} = 5 \text{ gradi e } (0{,}625 \times 60) \text{ primi} = 5 \text{ gradi e } 37{,}5 \text{ primi.}$$

Ma poiché

$$37{,}5 \text{ primi} = 37 \text{ primi e } (0{,}5 \times 60) \text{ secondi} = 37 \text{ primi e } 30 \text{ secondi.}$$

Avremo:

$$5{,}625 \text{ gradi} = 5°37'30''.$$

13.1.2 Misure in radianti

Consideriamo un angolo α di vertice O, coincidente con il centro di una circonferenza di raggio r (figura 13.2). L'angolo α individua lungo la circonferenza un arco di lunghezza l.

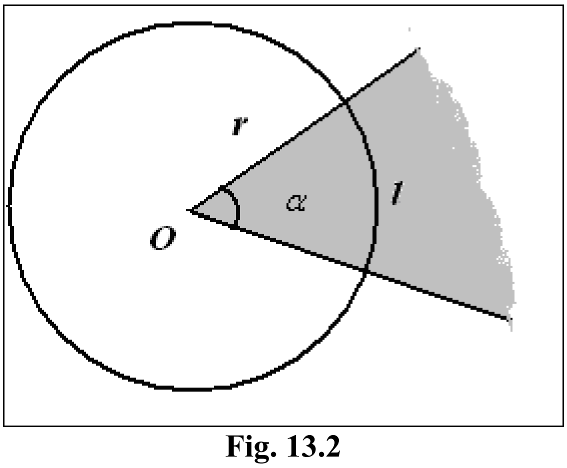


Fig. 13.2

Definizione 13.1 (misura dell'angolo α in radianti). *Si definisce misura dell'angolo α in radianti il rapporto*

$$\frac{l}{r}$$

tra la lunghezza l dell'arco individuato da α su una circonferenza di centro nel vertice O di α e il raggio r della circonferenza. Tale misura è indipendente dalla circonferenza considerata.

Si ha pertanto:

Definizione 13.2 (radiante). *Si definisce radiante la misura di un angolo che ha vertice nel centro della circonferenza (si tratta cioè di un angolo al centro) e sottende un arco di lunghezza pari al raggio r (figura 13.3).*

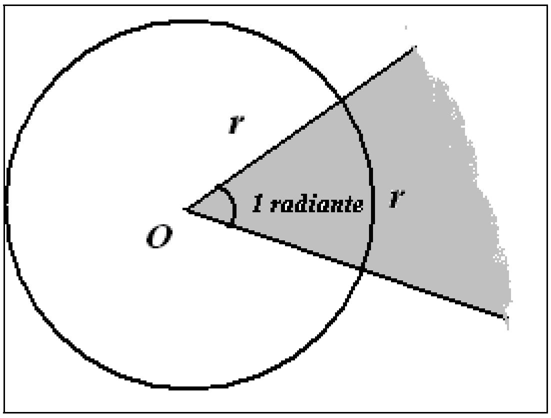


Fig. 13.3

13.1.3 Formule di trasformazione

Osserviamo che un angolo giro misura 360°. L'arco sotteso dall'angolo giro è la circonferenza che ha lunghezza $l = 2\pi r$. Applicando la definizione di misura di un angolo in radianti (definizione 13.1) si ottiene che la misura dell'angolo giro in radianti è:

$$\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \, .$$

L'angolo retto, pari ad $\frac{1}{4}$ dell'angolo giro, misurerà $\frac{\pi}{2}$ radianti. L'angolo piatto, metà angolo giro, misurerà π radianti. Denotiamo con $\alpha°$ la misura dell'angolo α in gradi e con α^r la misura dell'angolo α in gradi.

In generale, per passare dalla misura in gradi di un angolo alla misura in radianti dello stesso angolo, il modo migliore è fare una proporzione:

$$180° : \pi = \alpha° : \alpha^r$$

(180° sta a π come la misura di alfa in gradi sta alla misura di alfa in radianti). Applicando le proprietà delle proporzioni si ha:

$$\alpha° = \frac{180 \cdot \alpha^r}{\pi}, \qquad (1)$$

$$\alpha^r = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180}. \qquad (2)$$

In altre parole:

- *per passare da radianti a gradi si moltiplica per 180 e si divide per π,*
- *per passare da gradi a radianti si moltiplica per π e si divide per 180°.*

Esempi

1) Determiniamo la misura dell'angolo $\frac{3}{4}\pi$ in gradi. Si ha:

$$\alpha^r = \frac{3}{4}\pi$$

$$\alpha° = \frac{3}{4} \cdot 180° = 135°$$

(si noti che è sufficiente sostituire π con 180).

2) Determiniamo la misura dell'angolo $20°$ in radianti. Si ha:

$$\alpha° = 20° ;$$

applicando la formula (2) segue che:

$$\alpha^r = \frac{\pi \cdot 20}{180} = \frac{\pi}{9}.$$

Riportiamo nella seguente tabella le misure in radianti di alcuni angoli particolari:

Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

13.1.4 Angoli ed archi orientati.

Per **rappresentare** gli **angoli** consideriamo una circonferenza di **raggio** r avente il centro coincidente con l'origine in un **sistema di assi cartesiani ortogonali** sul quale vengono disegnati gli angoli con la **convenzione** di fare sempre **coincidere un lato dell'angolo con il semiasse positivo delle ascisse**.

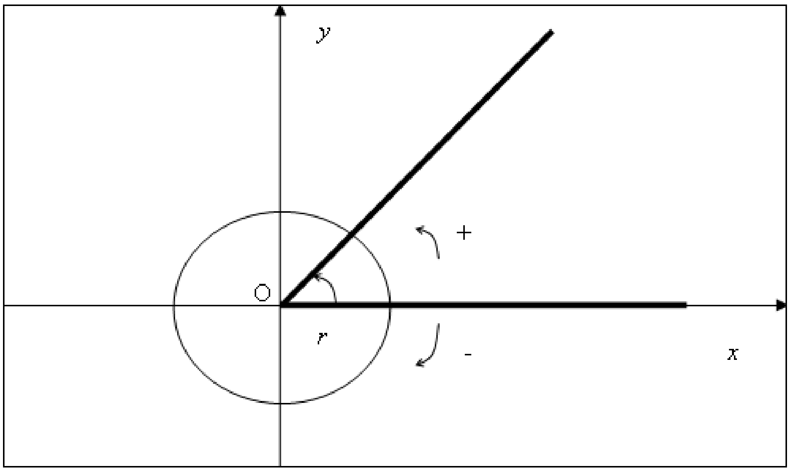
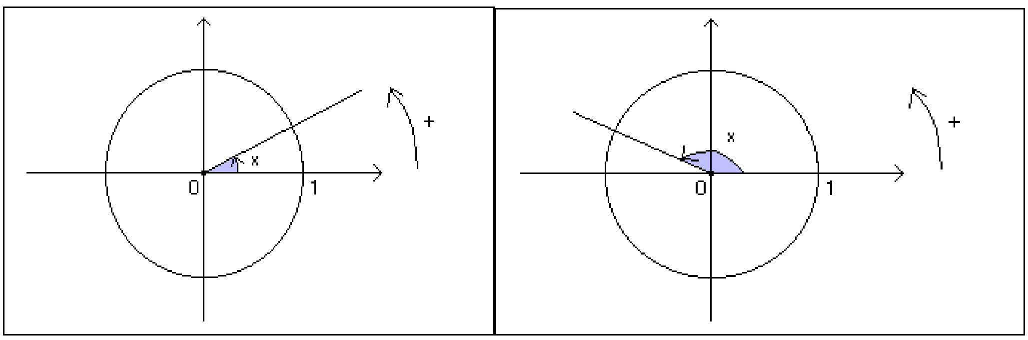


Fig. 13. 4

Gli angoli così rappresentati vengono misurati in **radianti** dando loro un **valore positivo** se percorsi in **senso antiorario** a partire dal semiasse positivo delle ascisse o un **valore negativo** se percorsi in **senso orario**.



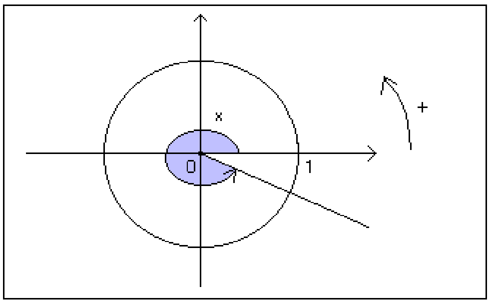


Fig. 13. 5: Esempi di angoli positivi.

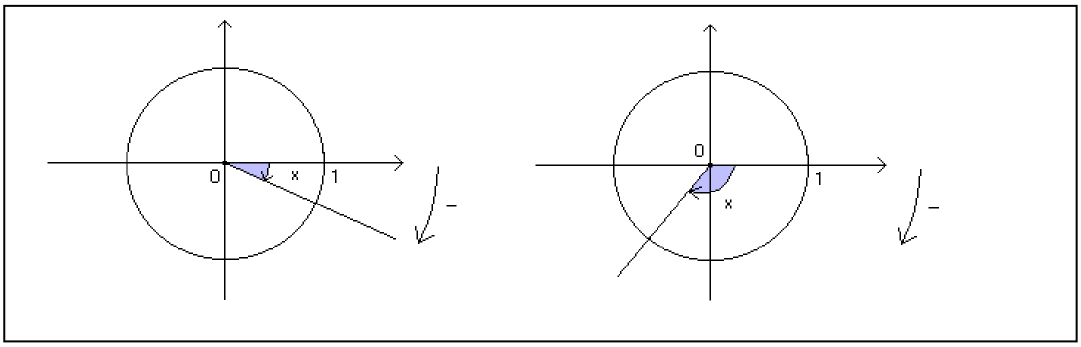


Fig. 13.6: Esempi di angoli negativi

Un angolo può **superare** in senso positivo o negativo un **angolo giro**. Per esempio:

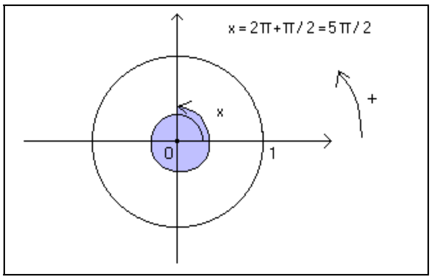


Fig. 13.7

In questo modo abbiamo raggiunto il risultato molto importante di potere rappresentare sulla circonferenza: angoli da **meno infinito** a **più infinito**, cioè rappresentati da **qualsiasi numero reale**. Possiamo allora scrivere per un qualunque angolo x: $-\infty < x < +\infty$.

13.3 Funzioni goniometriche
Seno, coseno e tangente di un angolo (o di un arco) orientato.

Consideriamo un angolo α e rappresentiamolo utilizzando le convenzioni descritte nel paragrafo precedente (cioè facendo coincidere il primo lato dell'angolo con il semiasse positivo delle ascisse). Sia $P(x_P, y_P)$ il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo α con la circonferenza (figura 13.8).

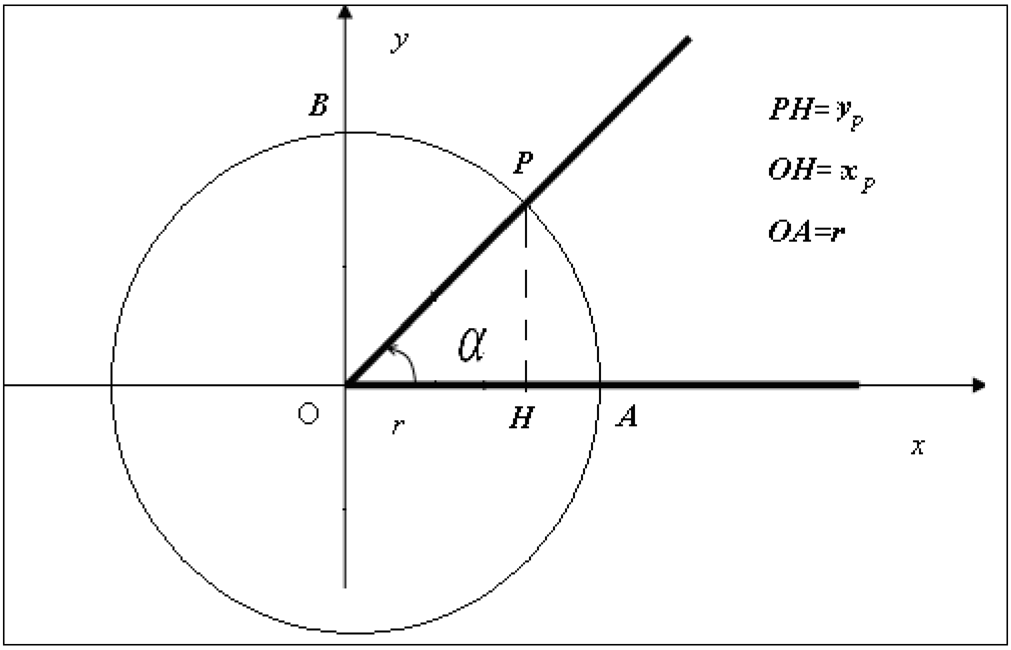


Fig. 13.8

Definizione 13.3 (seno di un angolo). *Si definisce* **seno dell'angolo** α *e si indica con* $\mathbf{sin}\,\alpha$ *il rapporto fra l'ordinata del punto P e il raggio r della circonferenza (figura 13.8):*

$$\mathbf{sin}\,\alpha = \frac{PH}{OA}\left(=\frac{y_P}{r}\right)$$

Definizione 13.4 (coseno di un angolo). *Si definisce* **coseno dell'angolo** α *e si indica con* $\mathbf{cos}\,\alpha$ *il rapporto fra l'ascissa del punto P e il raggio r della circonferenza (figura 13.8):*

$$\mathbf{cos}\,\alpha = \frac{OH}{OA}\left(=\frac{x_P}{r}\right)$$

Si consideri ora la retta *t*, tangente geometrica alla circonferenza nel punto $A(r,0)$.
Sia $Q(x_Q,y_Q)$ il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo con la retta *t* (figura 13.9).

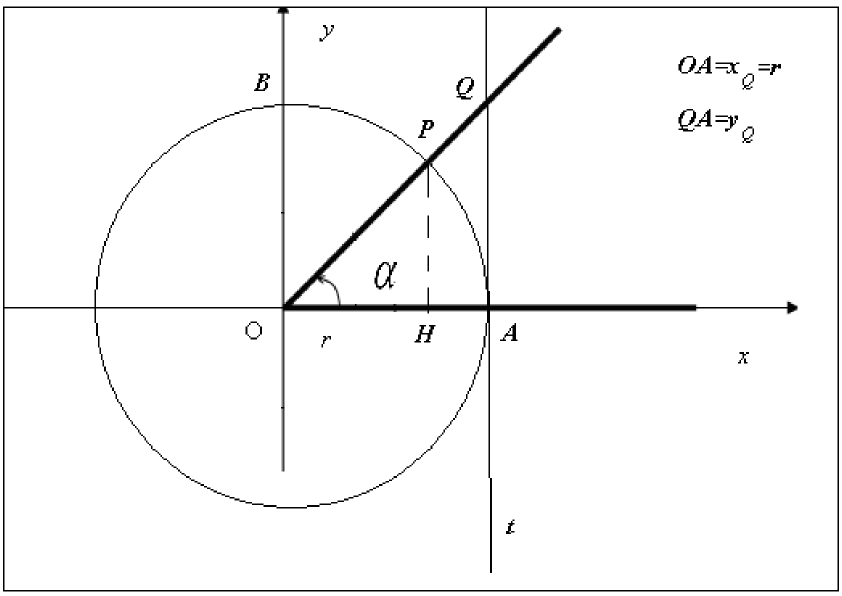


Fig. 13.9

Definizione 13.5 (tangente di un angolo). *Si definisce* ***tangente dell'angolo*** α *e si indica con* $\mathbf{tan}\,\alpha$ *il rapporto fra l'ordinata del punto Q e il raggio r della circonferenza (figura 13.9):*

$$\mathbf{tan}\,\alpha = \frac{QA}{OA}\left(= \frac{y_Q}{r}\right)$$

Si dimostra che il rapporto $\frac{PH}{OA}$ non varia al variare del raggio OA della circonferenza. Consideriamo infatti la circonferenza di raggio OA'. Il secondo lato dell'angolo α incontra tale circonferenza nel punto $P'(x_{P'}, y_{P'})$, con $x_{P'} = OH'$, $y_{P'} = P'H'$ (figura 13.10).

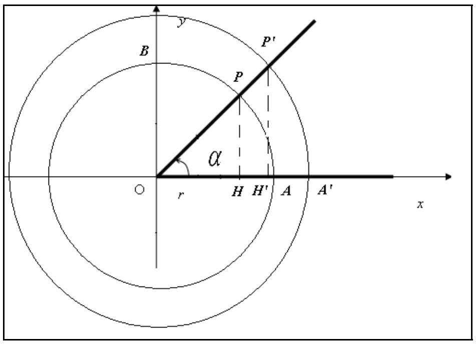


Fig. 13.10

Poiché i triangoli OPH e $OP'H'$ sono simili , i rapporti tra i lati corrispondenti sono costanti:

$$\frac{PH}{OA} = \frac{P'H'}{OA'}.$$

Pertanto il seno di un angolo non dipende dal raggio della circonferenza utilizzata per rappresentarlo. In maniera analoga si dimostra che il coseno e la tangente di un angolo non dipendono dal raggio della circonferenza utilizzata per rappresentarlo.
In virtù delle considerazioni precedenti, nulla vieta di rappresentare gli angoli utilizzando una circonferenza con centro nell'origine e raggio $r = 1$ (quest'ultima è detta **circonferenza goniometrica**).

Definizione 13.6 (circonferenza goniometrica). *Si definisce* ***circonferenza goniometrica*** *una circonferenza avente il centro coincidente con l'origine del sistema di riferimento Oxy e raggio unitario.*

Rivediamo ora le definizioni di seno, coseno e tangente di un angolo, nel caso in cui quest'ultimo è rappresentato sulla circonferenza goniometrica (figura 13.11). Si ha:

$\mathbf{sin}\,\alpha = \frac{PH}{OA} = \frac{PH}{1} = PH$	Il seno dell'angolo α è l'ordinata del punto *P* (essendo *P* il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza goniometrica).
$\mathbf{cos}\,\alpha = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{1} = OH$	Il coseno dell'angolo α è l'ascissa del punto *P* (essendo *P* il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza goniometrica).

$\mathbf{tan}\,\alpha = \dfrac{QA}{OA} = \dfrac{QA}{1} = QA$	La *tangente goniometrica* dell'angolo α è l'ordinata del punto *Q* (essendo *Q* il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo con la *tangente geometrica* in *A(1,0)* alla circonferenza goniometrica).

Non si confonda tra *tangente geometrica* e *tangente goniometrica*: la tangente geometrica è infatti la retta tangente *t* in *A* alla circonferenza utilizzata per rappresentare l'angolo, la tangente goniometrica è il segmento *QA*, essendo *Q* il punto di intersezione tra la retta *t* e il secondo lato dell'angolo (figura 13.11).

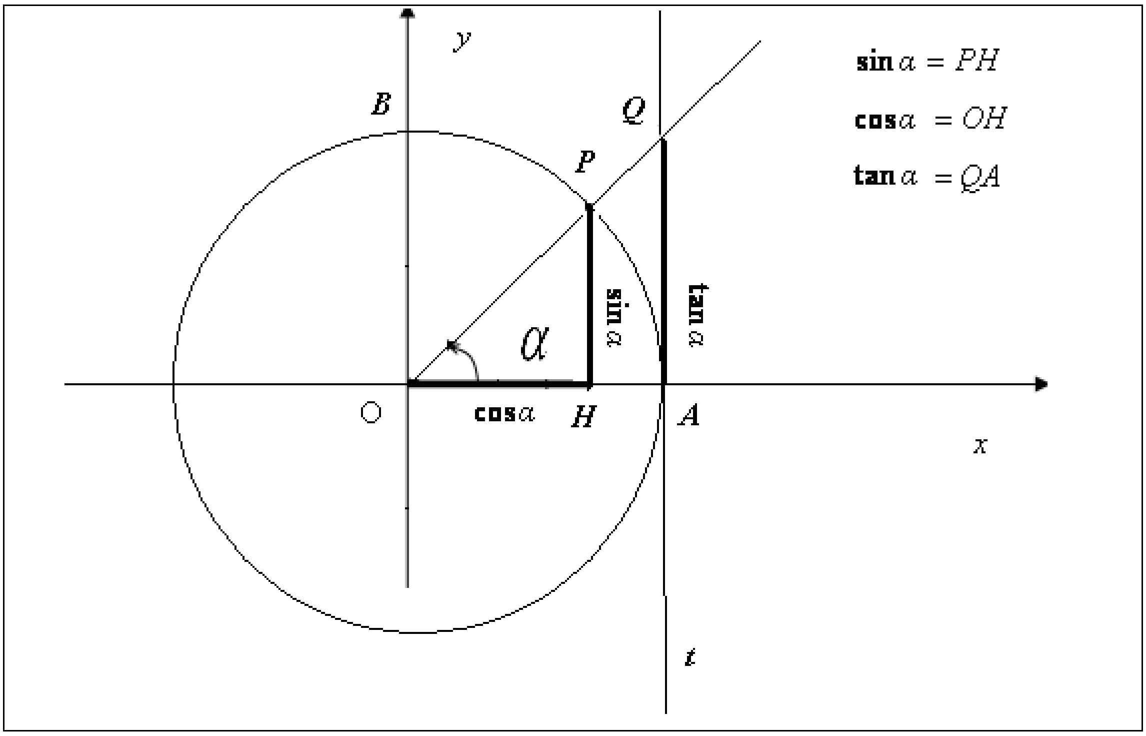


Fig. 13.11

Variazione del seno e del coseno

- $\mathbf{sin}\,0° = \mathbf{sin}\,0 = 0$ (ordinata del punto A(1,0)), $\mathbf{cos}\,0° = \mathbf{cos}\,0 = 1$ (ascissa del punto A(1,0)).
- $\mathbf{sin}\,90° = \mathbf{sin}\,\dfrac{\pi}{2} = 1$ (ordinata del punto B(0,1)), $\mathbf{cos}\,90° = \mathbf{cos}\,\dfrac{\pi}{2} = 0$ (ascissa del punto B(0,1)).
- $\mathbf{sin}\,180° = \mathbf{sin}\,\pi = 0$ (ordinata del punto (-1,0)), $\mathbf{cos}\,180° = \mathbf{cos}\,\pi = -1$ (ascissa del punto (-1,0)).
- $\mathbf{sin}\,270° = \mathbf{sin}\,\dfrac{3}{2}\pi = -1$ (ordinata del punto (0,-1)), $\mathbf{cos}\,270° = \mathbf{cos}\,\dfrac{3}{2}\pi = 0$ (ascissa del punto (0,-1)).
- $\mathbf{sin}\,360° = \mathbf{sin}\,2\pi = 0$ (ordinata del punto A(1,0)), $\mathbf{cos}\,360° = \mathbf{cos}\,2\pi = 1$ (ascissa del punto A(1,0)).

- Per ogni angolo $0 < \alpha < 90°$ (I quadrante) si ha: $\mathbf{sin}\,\alpha > 0, \mathbf{cos}\,\alpha > 0$.
- Per ogni angolo $90° < \alpha < 180°$ (II quadrante) si ha: $\mathbf{sin}\,\alpha > 0, \mathbf{cos}\,\alpha < 0$.
- Per ogni angolo $180° < \alpha < 270°$ (III quadrante) si ha: $\mathbf{sin}\,\alpha < 0, \mathbf{cos}\,\alpha < 0$.
- Per ogni angolo $270° < \alpha < 360°$ (IV quadrante) si ha: $\mathbf{sin}\,\alpha < 0, \mathbf{cos}\,\alpha > 0$.

- Al crescere di α oltre i 360° (cioè oltre 2π radianti) il secondo lato dell'angolo torna ad assumere, ogni giro, le medesime posizioni assunte nel primo giro; ne consegue che il seno ed il coseno di α riprendono periodicamente gli stessi valori corrispondenti all'intervallo $0 \le \alpha \le 360°$. Diremo quindi che il seno ed il coseno sono funzioni periodiche di periodo 360° (o 2π radianti), e scriveremo:

$$\mathbf{sin}(\alpha + k360°) = \mathbf{sin}(\alpha + 2k\pi) = \mathbf{sin}\,\alpha\,,$$
$$\mathbf{cos}(\alpha + k360°) = \mathbf{cos}(\alpha + 2k\pi) = \mathbf{cos}\,\alpha\,,$$

dove k è un qualunque numero intero, positivo, negativo o nullo.

- Il seno ed il coseno assumono, al variare dell'angolo α, tutti e soli i valori reali compresi tra - 1 e 1; per $\mathbf{sin}\,\alpha$ e $\mathbf{cos}\,\alpha$ valgono dunque le condizioni:

$$-1 \le \mathbf{sin}\,\alpha \le 1,$$
$$-1 \le \mathbf{cos}\,\alpha \le 1,$$

per ogni α.

Secante, cosecante e cotangente di un angolo (o di un arco) orientati

Oltre a seno, coseno e tangente, esistono altre funzioni, che possono essere definite tramite quelle fondamentali:

$\mathbf{sec}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathbf{cos}\,\alpha}$	Secante dell'angolo α
$\mathbf{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathbf{sin}\,\alpha}$	Cosecante dell'angolo α
$\mathbf{cot}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathbf{tan}\,\alpha}$	Cotangente dell'angolo α

Significato geometrico della cotangente

Si consideri ora la retta *s*, tangente geometrica alla circonferenza nel punto $B(0,r)$. Sia $R(x_R,y_R)$ il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo con la retta *s* (figura 13.12).

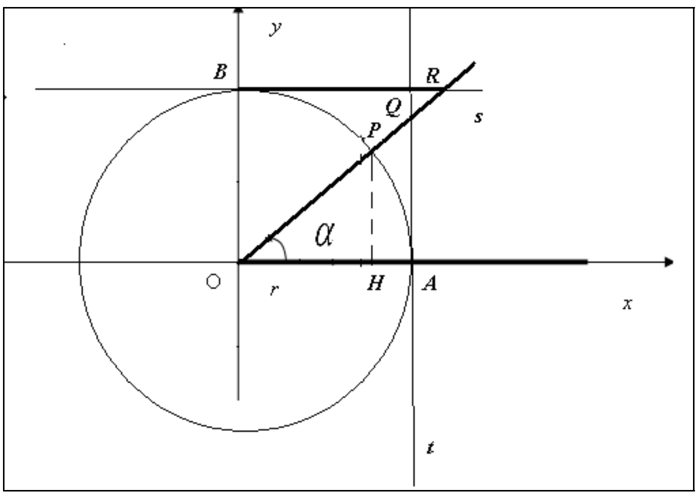


Fig. 13.12

La cotangente dell'angolo α può essere definita come segue:
Definizione 13.7 (cotangente di un angolo). *Si definisce* ***cotangente dell'angolo*** α *e si indica con* **cotan** α *il rapporto fra l'ascissa del punto R e il raggio r della circonferenza (figura 13.12).*

Pertanto, se si utilizza la circonferenza goniometrica per rappresentare gli angoli:

$$\mathbf{cot}\,\alpha = BR = \text{ascissa del punto R.}$$

Si dimostra che quest'ultima definizione è equivalente a quella data in precedenza $\left(\mathbf{cot}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathbf{tan}\,\alpha}\right)$.

Variazione della tangente e della cotangente

Dalla figura 13.12 si deducono le seguenti proprietà della tangente e della cotangente:

- $\mathbf{tan}\,0° = \mathbf{tan}\,0 = 0$, $\mathbf{cot}\,0° = \mathbf{cot}\,0$ non esiste (la retta s non interseca il secondo lato dell'angolo),
- $\mathbf{tan}\,90° = \mathbf{tan}\,\dfrac{\pi}{2}$ non esiste (la retta r non interseca il secondo lato dell'angolo), $\mathbf{cot\,an}90° = \mathbf{cot}\,\dfrac{\pi}{2} = 0$.
- $\mathbf{tan}\,180° = \mathbf{tan}\,\pi = 0$, $\mathbf{cot}\,180° = \mathbf{cot}\,\pi$ non esiste.
- $\mathbf{tan}\,270° = \mathbf{tan}\,\dfrac{3}{2}\pi$ non esiste, $\mathbf{cot}\,270° = \mathbf{cot}\,\dfrac{3}{2}\pi = 0$.
- $\mathbf{tan}\,360° = \mathbf{tan}\,2\pi = 0$, $\mathbf{cot}\,360° = \mathbf{cot}\,2\pi$ non esiste.
- Per ogni angolo $0 < \alpha < 90°$ (I quadrante) si ha: $\mathbf{tan}\,\alpha > 0, \mathbf{cot}\,\alpha > 0$.
- Per ogni angolo $90° < \alpha < 180°$ (II quadrante) si ha: $\mathbf{tan}\,\alpha < 0, \mathbf{cot}\,\boldsymbol{\alpha} < 0$.
- Per ogni angolo $180° < \alpha < 270°$ (III quadrante) si ha: $\mathbf{tan}\,\alpha > \mathbf{0}, \mathbf{cot}\,\alpha > 0$.
- Per ogni angolo $270° < \alpha < 360°$ (IV quadrante) si ha: $\mathbf{tan}\,\alpha < 0, \mathbf{cot}\,\boldsymbol{\alpha} < 0$.
- Quando l'angolo α cresce da 180° a 270° (cioè da π a $\frac{3}{2}\pi$ radianti) la tangente e la cotangente risultano positive e riprendono i valori assunti per α compreso tra 0° e 90°; analogamente, per α compreso tra 270° e 360° (cioè tra $\frac{3}{2}\pi$ e 2π radianti) la tangente e la cotangente riprendono i valori assunti tra 90° e 180°; diremo quindi che la tangente e la cotangente sono funzioni periodiche di periodo 180° (o π radianti) e scriveremo:

  $$\mathbf{tan}(\alpha + k180°) = \mathbf{tan}(\alpha + k\pi) = \mathbf{tan}\,\alpha$$
  $$\mathbf{cot}(\alpha + k180°) = \mathbf{cot}(\alpha + k\pi) = \mathbf{cot}\,\alpha$$

  dove k è qualunque numero intero, positivo, negativo o nullo.

13.4 Identità goniometriche fondamentali.

Si noti (figura 13.11) che il triangolo *OPH* è rettangolo in H. Applicando il teorema di Pitagora a tale triangolo si ha:

$$PH^2 + OH^2 = OP^2.$$

Ma poiché $PH = \mathbf{sin}\,\alpha$, $OH = \mathbf{cos}\,\alpha$ e $OP = r = 1$ si ha:

$$\boxed{\mathbf{sin}^2\,\alpha + \mathbf{cos}^2\,\alpha = 1.} \qquad (3)$$

Quest'ultima, valida per ogni α, è detta *prima relazione fondamentale della goniometria*. Osservando ancora la figura 13.11 si noti che i triangoli *OQA* e *OQH* sono simili, pertanto i rapporti tra i lati corrispondenti sono costanti:

$$\frac{QA}{OA}=\frac{PH}{OH},$$

e poiché $QA=\mathbf{tan}\,\alpha$, $OA=1$, $PH=\mathbf{sin}\,\alpha$, $OH=\mathbf{cos}\,\alpha$, si ha:

$$\boxed{\mathbf{tan}\,\alpha=\frac{\mathbf{sin}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha}.} \qquad (4)$$

Questa relazione prende il nome di *seconda relazione fondamentale della goniometria.*

13.5 Angoli Notevoli

Applicando noti teoremi della geometria del piano si possono ricavare i valori delle funzioni goniometriche per alcuni valori speciali degli angoli.

Funzioni goniometriche dell'angolo di 30°

Rappresentiamo l'angolo di 30° sulla circonferenza goniometrica (figura 13.13).

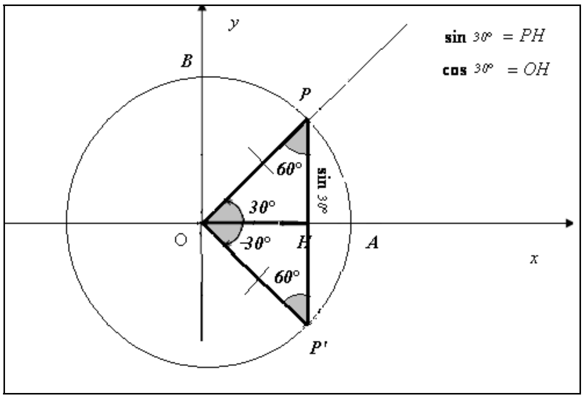


Fig. 13.13

Consideriamo l'angolo orientato $-30°$. Sia *P'* il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo $-30°$ con la circonferenza. Allora il triangolo *OPP'* è equilatero di lato *OP=1*, di altezza $OH=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (l'altezza del triangolo equilatero si ottiene moltiplicando il lato per $\sqrt{3}$ e dividendo per 2). Si ha pertanto

$$\mathbf{sin}\,30°=PH=\frac{PP'}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\mathbf{cos}\,30°=OH=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Segue dalla (4) che:

$$\mathbf{tan}\,30°=\frac{\mathbf{sin}\,30°}{\mathbf{cos}\,30°}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Dalle definizioni di secante, cosecante e cotangente (paragrafo 13.3) si ha inoltre:

$$\mathbf{sec}\,30°=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\mathbf{cosec}30°=2,$$

$$\mathbf{cot}30°=\sqrt{3}.$$

Funzioni goniometriche dell'angolo di 60°

Rappresentiamo l'angolo di 60° sulla circonferenza goniometrica (figura 13.14).

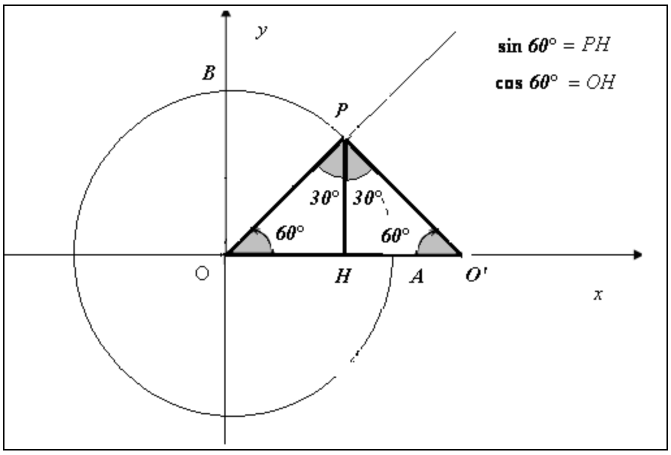


Fig. 13.14

Costruiamo il triangolo *OPO'* come in figura 13.14, in maniera tale che l'angolo $O\hat{P}H$ sia congruente all'angolo $O'\hat{P}H$. Il triangolo OO'P è equilatero di lato *OP=1* e altezza $PH=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si ha pertanto

$$\mathbf{sin}\,60° = PH = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathbf{cos}\,60° = \frac{OO'}{2} = \frac{1}{2}.$$

Segue dalla (4) che:

$$\mathbf{tan}\,60° = \frac{\mathbf{sin}\,60°}{\mathbf{cos}\,60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Dalle definizioni di secante, cosecante e cotangente (paragrafo 12.3) si ha inoltre:

$$\mathbf{sec}\,60° = 2,$$

$$\mathbf{cosec}60° = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\mathbf{cot}60° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Funzioni goniometriche dell'angolo di 45°

Rappresentiamo l'angolo di 45° sulla circonferenza goniometrica (figura 13.15).

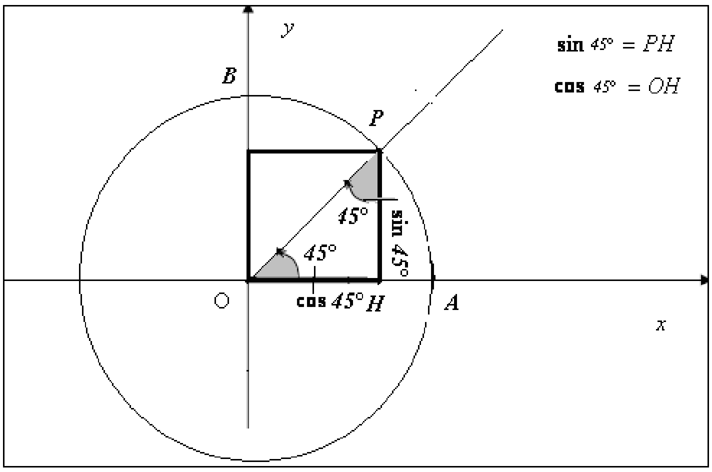


Fig. 13.15

Il triangolo OPH è isoscele, con $PH \cong OH$. Pertanto *OPH* è la metà di un quadrato di diagonale *OP=1.* Poiché il lato di un quadrato si ottiene dividendo la diagonale per $\sqrt{2}$, si ha:

$$PH = OH = \frac{OP}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pertanto

$$\mathbf{sin}\, 45° = \mathbf{cos}\, 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Segue dalla (4) che:

$$\mathbf{tan}\, 45° = 1,$$

Dalle definizioni di secante, cosecante e cotangente (paragrafo 13.3) si ha inoltre:

$$\mathbf{cot}\, 45° = 1$$

$$\mathbf{sec}\, 45° = \mathbf{cosec}\, 45° = \sqrt{2}.$$

Per comodità, nella tabella che segue, si riportano i valori delle funzioni goniometriche in alcuni angoli notevoli.

Misura In Radianti	Misura In Gradi	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
0	0°	0	1	0	Non esiste
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{10}$	18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{8}$	22°33'	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Non esiste	0
π	180°	0	-1	0	Non esiste
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	Non esiste	0

Gli altri valori si determinano con la calcolatrice, salvo quelli relativi agli **angoli associati agli angoli notevoli,** che sono descritti nel paragrafo seguente. Essi infatti si possono ricavare da quelli noti, applicando le proprietà descritte nel paragrafo successivo. Tali proprietà consentono di operare **la riduzione al primo quadrante** di ogni angolo maggiore di 90°.

13. 6 Angoli Associati

Angoli Complementari.

Consideriamo l'angolo α e l'angolo $\frac{\pi}{2}-\alpha$; essi sono complementari, poiché la loro somma è 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

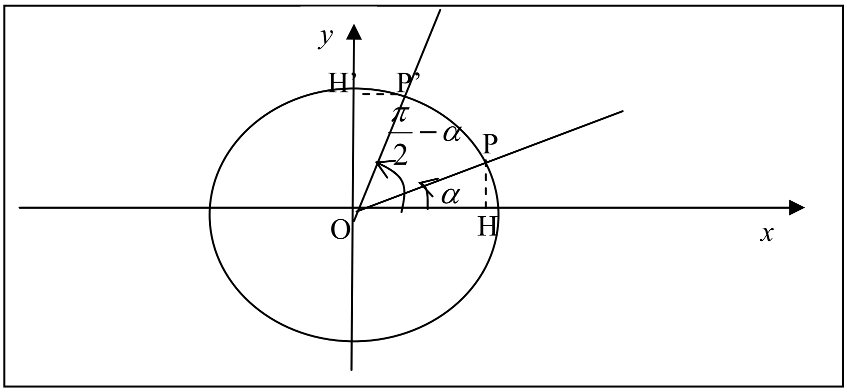


Fig. 13.16

I due triangoli *OHP* e *OH'P'* sono congruenti. Infatti poiché $P'\hat{O}H' \cong P\hat{O}H = \alpha$ e $O\hat{H}P \cong O\hat{H}'P' = 90°$ allora $H\hat{O}P \cong H'\hat{O}P' = 90°$. Per il secondo criterio di congruenza, poiché hanno i lati *OP* e *OP'* congruenti e gli angoli ad esso adiacenti congruenti). Pertanto i lati corrispondenti sono congruenti:

$$OH' = OH \Rightarrow \mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \mathbf{cos}\,\alpha\ ,$$

$$HP' = HP \Rightarrow \mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \mathbf{sin}\,\alpha\ .$$

Segue che:

$$\mathbf{tan}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\mathbf{cos}\,\alpha}{\mathbf{sin}\,\alpha} = \mathbf{cot}\alpha\ .$$

Angoli Supplementari

Consideriamo ora l'angolo α e l'angolo π − α; essi sono supplementari poiché la loro somma è 180°(π radianti).

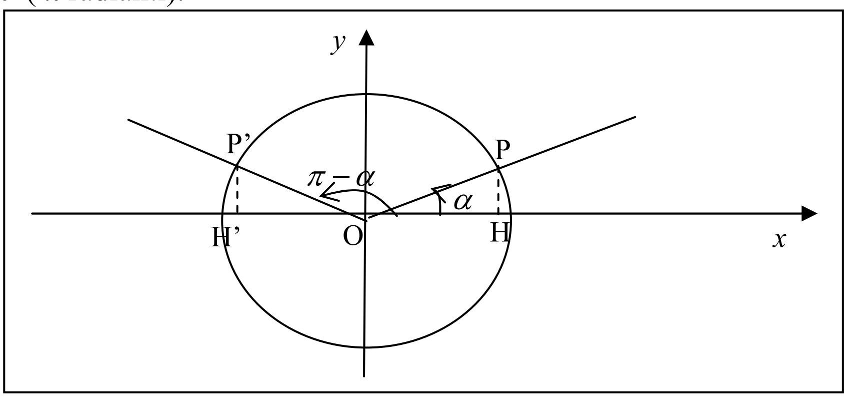


Fig. 13.17

Osservando che $P'\hat{O}H' \cong P\hat{O}H = \alpha$ si dimostra che i due triangoli *OHP* e *OH'P'* sono congruenti. Pertanto:

$$PH = P'H' \Rightarrow \mathbf{sin}(\pi - \alpha) = \mathbf{sin}\,\alpha\,,$$

$$OH = -OH' \Rightarrow \mathbf{cos}(\pi - \alpha) = -\mathbf{cos}\,\alpha\,.$$

Segue che:

$$\mathbf{tan}(\pi - \alpha) = \frac{\mathbf{sin}(\pi - \alpha)}{\mathbf{cos}(\pi - \alpha)} = \frac{\mathbf{sin}\,\alpha}{-\mathbf{cos}\,\alpha} = \mathbf{-tan}\,\alpha\,.$$

Angoli che differiscono di 90°.

Consideriamo l'angolo α e l'angolo $\frac{\pi}{2} + \alpha$; essi differiscono di 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

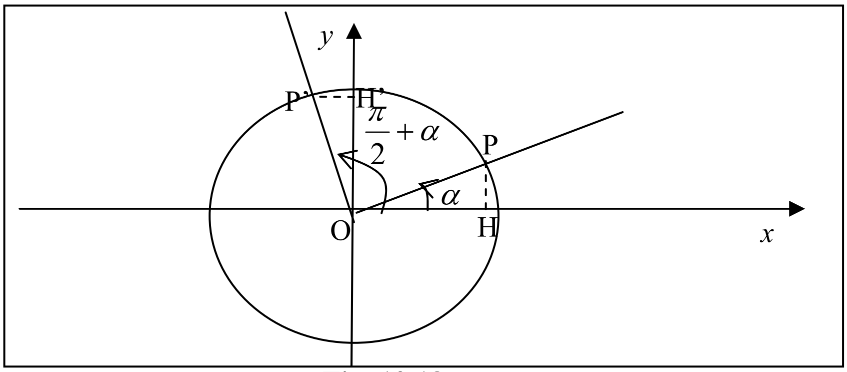


Fig. 13.18

Dalla congruenza dei triangoli *OHP* e *OH'P'* segue che:

$$P'H' = -PH \Rightarrow \mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathbf{sin}\,\alpha,$$

$$OH' = OH \Rightarrow \mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \mathbf{cos}\,\alpha.$$

Segue che:

$$\mathbf{tan}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\mathbf{cos}\,\alpha}{-\mathbf{sin}\,\alpha} = \mathbf{-cot}\,\alpha\,.$$

Angoli che differiscono di un angolo piatto

Consideriamo ora l'angolo α e l'angolo π + α; essi differiscono di 180°(π radianti).

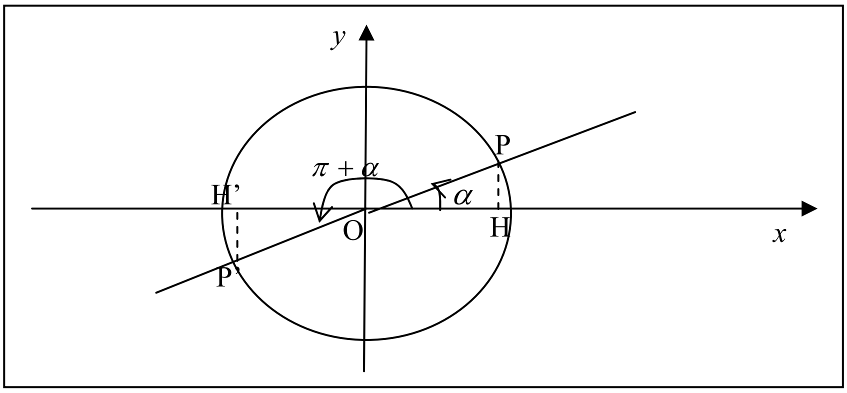


Fig. 13.19

Osservando che $P'\hat{O}H' \cong P\hat{O}H = \alpha$ si dimostra che i due triangoli *OHP* e *OH'P'* sono congruenti. Pertanto:

$$P'H' = -PH \Rightarrow \mathbf{sin}(\pi + \alpha) = -\mathbf{sin}\,\alpha\,,$$

$$OH' = -OH \Rightarrow \mathbf{cos}(\pi + \alpha) = -\mathbf{cos}\,\alpha\,.$$

Segue che:

$$\mathbf{tan}(\pi + \alpha) = \frac{\mathbf{sin}(\pi + \alpha)}{\mathbf{cos}(\pi + \alpha)} = \frac{-\mathbf{sin}\,\alpha}{-\mathbf{cos}\,\alpha} = \mathbf{tan}\,\alpha\,.$$

Angoli esplementari

Consideriamo la differenza tra l'angolo giro e un angolo α, ossia 2π − α; tali angoli sono esplementari poiché la loro somma è 360°(2π).

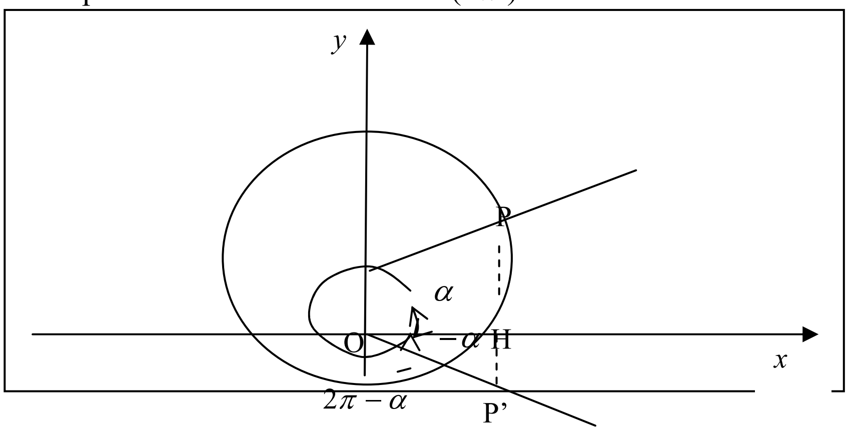


Fig. 13.20

Osservando che $P'\hat{O}H \cong P\hat{O}H = \alpha$ si dimostra che i due triangoli *POH* e *P'OH* sono congruenti.

Pertanto:

$$P'H' = -PH \Rightarrow \mathbf{sin}(2\pi - \alpha) = -\mathbf{sin}\,\alpha\,,$$
$$OH' = \mathbf{cos}(2\pi - \alpha) = \mathbf{cos}\,\alpha\,.$$

Segue che:

$$\mathbf{tan}(2\pi - \alpha) = \frac{\mathbf{sin}(2\pi - \alpha)}{\mathbf{cos}(2\pi - \alpha)} = \frac{-\mathbf{sin}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha} = -\mathbf{tan}\,\alpha\mathbf{.}$$

Angoli opposti

Consideriamo due angoli opposti α e − α; osserviamo che l'angolo $-\alpha$ corrisponde all'angolo $2\pi - \alpha$ (figura 13.20). Pertanto:

$$\mathbf{sin}(-\alpha) = \mathbf{sin}(2\pi - \alpha) = -\mathbf{sin}\,\alpha$$
$$\mathbf{cos}(-\alpha) = \mathbf{cos}(2\pi - \alpha) = \mathbf{cos}\,\alpha$$
$$\mathbf{tan}(-\alpha) = \mathbf{tan}(2\pi - \alpha) = -\mathbf{tan}\,\alpha$$

Angoli la cui somma è 270°

Consideriamo ora l'angolo α e l'angolo $\frac{3}{2}\pi - \alpha$; la loro somma è 270° ($\frac{3}{2}\pi$ radianti).

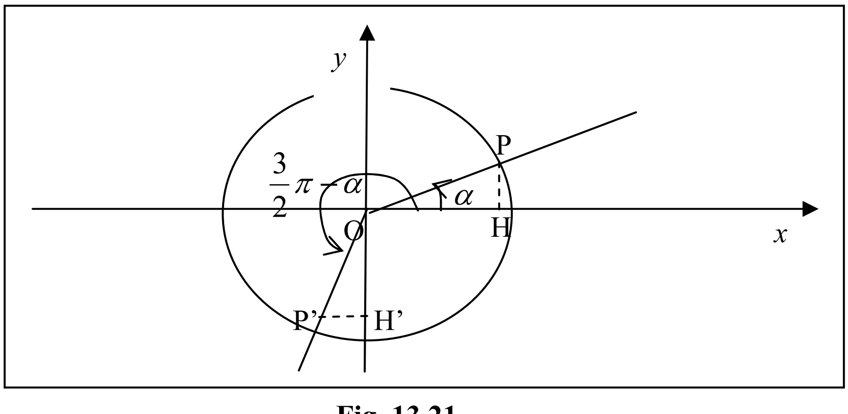


Fig. 13.21

Dalla congruenza dei triangoli *OPH* e *OP'H'* si ha:

$$P'H' = -PH \Rightarrow \mathbf{cos}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\,\mathbf{sin}\,\alpha,$$

$$OH' = -OH \Rightarrow \mathbf{sin}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\,\mathbf{cos}\,\alpha.$$

Segue che:

$$\mathbf{tan}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \frac{\mathbf{sin}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{\mathbf{cos}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)} = \frac{-\,\mathbf{cos}\,\alpha}{-\,\mathbf{sin}\,\alpha} = \mathbf{cot}\alpha\,.$$

Angoli che differiscono di 270°

Consideriamo ora l'angolo α e l'angolo $\frac{3}{2}\pi + \alpha$; la loro differenza è 270° ($\frac{3}{2}\pi$ radianti).

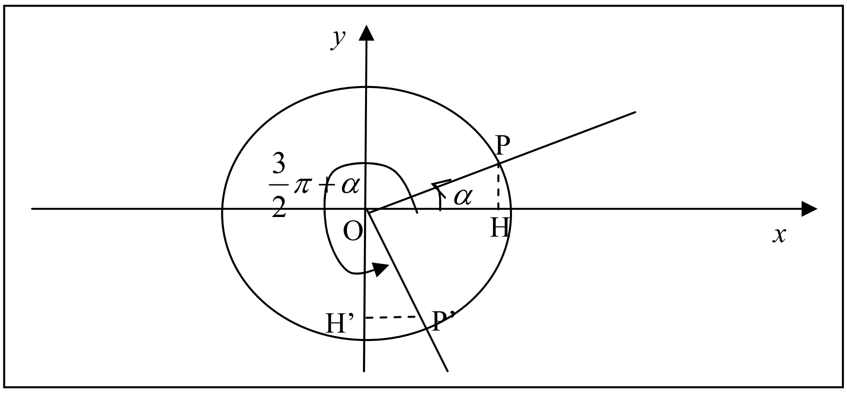


Fig. 13.21

Dalla congruenza dei triangoli *OPH* e *OP'H'* si ha:

$$P'H' = -PH \Rightarrow \mathbf{cos}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = +\,\mathbf{sin}\,\alpha,$$

$$OH' = OH \Rightarrow \mathbf{sin}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\,\mathbf{cos}\,\alpha.$$

Segue che:

$$\mathbf{tan}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \frac{\mathbf{sin}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)}{\mathbf{cos}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)} = \frac{-\,\mathbf{cos}\,\alpha}{\mathbf{sin}\,\alpha} = -\mathbf{cot}\alpha.$$

Ricapitolando:

misura dell'arco	seno	coseno	tangente	cotangente
α	**sin** α	**cos** α	**tan** α	**cot** α
$\pi-\alpha$	**sin** α	**-cos** α	**-tan** α	**- cot** α
$\pi+\alpha$	**-sin** α	**-cos** α	**tan** α	**cot** α
$-\alpha$	**-sin** α	**cos** α	**– tan** α	**- cot** α
$2\pi-\alpha$	**-sin** α	**cos** α	**– tan** α	**- cot** α
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	**cos** α	**sin** α	**cot** α	**tan** α
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	**cos** α	**– sin** α	**- cot** α	**– tan** α
$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	**– cos** α	**sin** α	**- cot** α	**– tan** α
$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	**– cos** α	**– sin** α	**cot** α	**tan** α

13.7 Interpretazione goniometrica del coefficiente angolare di una retta

Nella figura 13.22 è tracciata una retta *r* passante per l'origine *O* del sistema di riferimento e formante un angolo α con la direzione positiva dell'asse *x*.

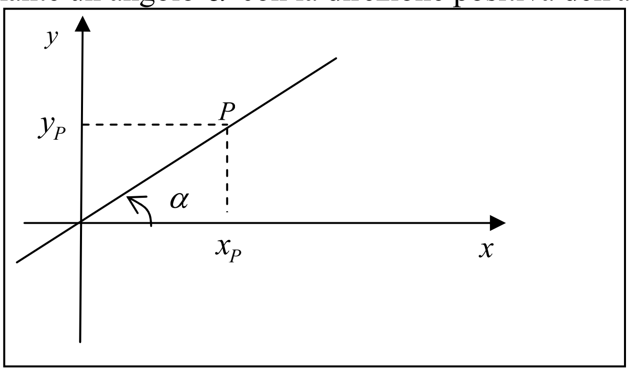


Fig. 13.22

Com'è noto l'equazione della retta è:

$$y = mx$$

dove *m* è una costante detta *coefficiente angolare* della retta stessa. Per ogni punto $P(x_P, y_P)$ P della retta è dunque:

$$m = \frac{y_P}{x_P}$$

Ma essendo anche (per la seconda relazione fondamentale):

$$\mathbf{tan}\,\alpha = \frac{y_P}{x_P}$$

se ne deduce che:

$$m = \mathbf{tan}\ \alpha\ ,$$

cioè che il coefficiente angolare di una retta è la tangente goniometrica dell'angolo che essa forma con la direzione positiva dell'asse *x*. Ne consegue che una retta che forma con la direzione positiva dell'asse *x* un angolo, ad esempio di 30°, ha per coefficiente angolare $m = \mathbf{tan}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e quindi equazione del tipo $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + q$; una retta che forma con la direzione positiva dell'asse x un angolo, ad esempio di 60°, ha per coefficiente angolare $m = \mathbf{tan}\,60° = \sqrt{3}$ e quindi equazione del tipo $y = \sqrt{3}x + q$.

13.8 Formule goniometriche

Relazioni tra le funzioni goniometriche di uno stesso angolo (o arco)

Dalla prima relazione fondamentale della goniometria si può ricavare il seno di un angolo, noto il suo coseno, e viceversa:

$$\mathbf{cos}\,\alpha = \pm\sqrt{1-\mathbf{sin}^2\,\alpha}\,,\quad \mathbf{sin}\,\alpha = \pm\sqrt{1-\mathbf{cos}^2\,\alpha}\,.$$

Il doppio segno deriva dal fatto che il seno ed il coseno di un angolo a assumono valori positivi o negativi a seconda del quadrante nel quale giace il secondo lato dell'angolo.

Esempi

1. Sapendo che 0°< α <90° e che $\mathbf{sin}\,\alpha = \frac{2}{3}$, determinare il valore di $\mathbf{cos}\,\alpha$ e $\mathbf{tan}\,\alpha$.

Essendo 0°< α <90°, e quindi $\mathbf{cos}\,\alpha > 0$, avremo

$$\mathbf{cos}\,\alpha = +\sqrt{1-\mathbf{sin}^2\,\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

e pertanto:

$$\mathbf{tan}\,\alpha = \frac{\mathbf{sin}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,.$$

2. Sapendo che $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ e che $\mathbf{cos}\,\alpha = \frac{3}{5}$ determinare $\mathbf{sin}\,\alpha$, $\mathbf{tan}\,\alpha$ e $\mathbf{cot}\,\alpha$.

Per $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ è $\mathbf{sin}\,\alpha < 0$; quindi:

$$\mathbf{sin}\,\alpha = -\sqrt{1-\mathbf{cos}^2\,\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}\,,$$

$$\mathbf{tan}\,\alpha = \frac{\mathbf{sin}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}\,,$$

$$\mathbf{cot}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{tan}\,\alpha} = -\frac{3}{4}\,.$$

Dalle relazioni fondamentali della goniometria si possono ricavare delle formule mediante le quali, noto il valore di una delle funzioni goniometriche e noto il quadrante in cui giace il secondo lato dell’angolo, si calcolano i valori delle altre funzioni goniometriche elementari. Nella tabella di seguito riportata sono riunite tutte le formule che danno i valori di tre funzioni goniometriche in funzione di una quarta, supposta nota.

	Valori			
Noto	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\pm\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\tan\alpha$	$\dfrac{1}{\tan\alpha}$
$\cot\alpha$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cot\alpha}$	$\cot\alpha$

Esempi

1. Esprimere in funzione di $\sin\alpha$, e poi semplificare, la seguente espressione goniometrica:

$$2\operatorname{cosec}^2\alpha - \frac{3+\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}.$$

Dalla definizione di cosecante e dalla prima relazione fondamentale della goniometria si ottiene:

$$\frac{2}{\sin^2\alpha} - \frac{3+1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - 2}{\sin^2\alpha}$$

2. Esprimere in funzione di $\tan\alpha$, e poi semplificare, la seguente espressione goniometrica:

$$\sin\alpha\left(\frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha\right).$$

Tenendo presenti le relazioni esaminate si ha:

$$\sin\alpha\,\frac{2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(1+\sin^2\alpha) = \tan\alpha\left(1+\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right) = \frac{\tan\alpha(1+2\tan^2\alpha)}{1+\tan^2\alpha}.$$

Formule di addizione e sottrazione

Osserviamo che il seno di una somma (differenza) di angoli non è uguale alla somma (differenza) dei seni degli angoli corrispondenti.

$$\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) \neq \sin\alpha - \sin\beta$$

Per rendersene conto è sufficiente un semplice esempio: $\alpha = \beta = 30°$ il cui seno vale $\frac{1}{2}$. È ovvio che $\sin 60° \neq \sin 30° + \sin 30°$, essendo $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin 30° + \sin 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Lo stesso discorso vale per il coseno, la tangente e la cotangente di somme o differenze di angoli. Per questo motivo sono necessarie le formule di addizione e sottrazione che verranno fornite senza dimostrazione.

FORMULE DI ADDIZIONE

Queste formule permettono di ottenere il seno, il coseno, la tangente e la cotangente di una somma algebrica di due angoli tramite il seno e il coseno dei singoli addendi.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$$

FORMULE DI SOTTRAZIONE

Queste formule permettono di ottenere il seno, il coseno, la tangente e la cotangente di una differenza di due angoli tramite il seno, il coseno, la tangente e la cotangente dei singoli angoli.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

Esempi

1. Calcola il valore di $\cos\frac{\pi}{12}$.

Osserviamo che $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$. Pertanto applicando la formula di sottrazione del coseno si ha:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

2. Calcola il valore di $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Osserviamo che $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$. Pertanto applicando la formula di sottrazione del coseno si ha:

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Formule di duplicazione

Sono formule strettamente derivate dalle formule precedenti, ponendo α = β.
Il motivo di queste formule deriva dal fatto che in generale: $\sin 2\alpha\neq 2\sin\alpha, \cos 2\alpha\neq 2\cos\alpha$, ecc..

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 1-2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \alpha \neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}, \left(\alpha \neq k\frac{\pi}{2}\right).$$

Esempio

Verificare la seguente identità:

$$\sin\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha\sin 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

Bisogna dimostrare che l'espressione al primo membro è uguale a quella al secondo membro. Applicando le formule di bisezione del coseno e del seno al primo membro e la formula di sottrazione del coseno al secondo membro, si ottiene:

$$\sin\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \cos\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha.$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha - 2\sin\alpha\cos^2\alpha = -\sin\alpha.$$

Formule di Bisezione

Le formule di *bisezione* consentono di ottenere il seno, coseno, tangente e cotangente della metà di un generico angolo α, avendo il coseno di α.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, (\alpha \neq \pi + 2k\pi) \\ \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, (\alpha \neq k\pi) \end{cases}, \cot\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}, (\alpha \neq k\pi) \\ \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, (\alpha \neq 2k\pi) \end{cases}$$

Esempio

Verificare la seguente identità:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{\sin\alpha}{2},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Applichiamo al primo membro la formula di addizione del seno:

$$\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{\sin\alpha}{2},$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{\sin\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sin\alpha}{2}$$

e applicando le formule di bisezione al primo membro:

$$\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sin\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{4}}-\frac{1}{2}=\frac{\sin\alpha}{2}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{\sin\alpha}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sin\alpha}{2}.$$

Formule parametriche
Le *formule parametriche* consentono di ricavare seno, coseno e cotangente mediante la tangente dell'angolo metà. Posto $t=\tan\frac{\alpha}{2}$, si ha:

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\text{con}\quad \alpha\neq\pi+2k\pi\ ;$$
$$\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2},\ \text{con}\,\alpha\neq\pi+2k\pi\ \text{ e }\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;$$
$$\cot\alpha=\frac{1-t^2}{2t},\ \text{con}\quad \alpha\neq k\pi.$$

Formule di Prostaferesi
Le formule di *Prostaferesi* permettono di trasformare una somma o sottrazione di seni, coseni, ecc... in un prodotto.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\alpha,\beta\neq\frac{(2k+1)\pi}{2}$$
$$\cot\alpha\pm\cot\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\alpha,\beta\neq k\pi$$

Formule di Werner
Queste formule sono un po' l'inverso delle formule di Prostaferesi, ovvero le *formule di Werner* consentono di trasformare il prodotto di due seni, coseni o un prodotto di seno per un coseno, nelle rispettive somme o differenze.

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

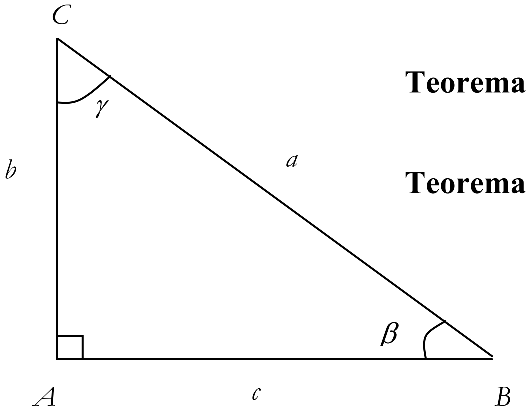
13.9 Teoremi sui triangoli rettangoli

Risolvere un triangolo rettangolo significa trovare tutti i suoi elementi (la misura dei tre lati e l'ampiezza dei tre angoli) elementi, conoscendone tre, di cui almeno uno sia un lato. Per risolvere un triangolo rettangolo si utilizzano i seguenti teoremi (i teoremi vengono forniti senza dimostrazioni).

Teorema 1 *In un triangolo rettangolo la misura di un cateto si ottiene moltiplicando la misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo adiacente al cateto che si vuole calcolare.*

Teorema 2 *In un triangolo rettangolo la misura di un cateto si ottiene moltiplicando la misura dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto o per la cotangente dell'angolo adiacente al cateto che si vuole calcolare.*

Indicando con a l'ipotenusa, b e c i cateti, β e γ gli angoli opposti a b e c rispettivamente (come in figura 13.23) si ottiene:



$$\textbf{Teorema 1}\begin{cases} b = a\,\mathbf{sin}\,\beta = a\,\mathbf{cos}\,\gamma \\ c = a\,\mathbf{sin}\,\gamma = a\,\mathbf{cos}\,\beta \end{cases}$$

$$\textbf{Teorema 2}\begin{cases} b = c\,\mathbf{tan}\,\beta = c\,\mathbf{cot}\,\gamma \\ c = b\,\mathbf{tan}\,\gamma = b\,\mathbf{cot}\,\beta \end{cases}$$

Fig. 13.23

Esempi

1) In un triangolo rettangolo le misure dei cateti sono: $b = 3\ cm$ e $c = \sqrt{3}\ cm$. Risolvere il triangolo.

Per l'ipotenusa a si ha:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}cm$$

Per l'angolo β, applicando il Teorema 2, si ha:

$$\mathbf{tan}\,\beta = \frac{b}{c} = \sqrt{3}\,.$$

Pertanto $\beta = \frac{\pi}{3}$**.** Ne consegue che $\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$**.**

2) In un triangolo rettangolo le misure dei cateti sono: $b = 18\ cm$ e $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Risolvere il triangolo.

Applicando il Teorema 1 si ha:

$$a = \frac{b}{\mathbf{sin}\,\beta} = \frac{18}{\mathbf{sin}\,\frac{\pi}{3}} = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}.$$

Applicando il Teorema 2 si ha

$$c = b\,\mathbf{cot}\,\beta = 18\frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3},$$

e

$$\mathbf{sin}\,\gamma = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

13.10 Funzioni goniometriche inverse.

In matematica, le **funzioni goniometriche inverse** sono un insieme di funzioni strettamente collegate alle funzioni goniometriche. La funzioni inverse principali sono elencate nella seguente tabella.

Nome	Notazione usuale	Definizione
arcoseno	$y = \mathbf{arcsin}\, x$	Si definisce arcoseno di x, l'angolo y il cui seno è x, cioè l'angolo x tale che $x = \mathbf{sin}\,(y)$
arcocoseno	$y = \mathbf{arccos}\; x$	Si definisce arcocoseno di x, l'angolo y il cui coseno è x, cioè l'angolo x tale che $x = \mathbf{cos}\; y$
arcotangente	$y = \mathbf{arctan}\,(x)$	Si definisce arcotangente di x, l'angolo y la cui tangente è x, cioè l'angolo x tale che $x = \mathbf{tan}\,(y)$
arcocosecante	$y = \mathbf{arccsc}\,(x)$	Si definisce arcocosecante di x, l'angolo y la cui cosecante è x, cioè l'angolo x tale che $x = \mathbf{cosec}(y)$
arcosecante	$\mathbf{y = arcsec(x)}$	Si definisce arcosecante di x, l'angolo y la cui secante è x, cioè l'angolo x tale che $x = \mathbf{sec}\,(y)$
arcocotangente	$y = \mathbf{arcco}t(x)$	Si definisce arcocotangente di x, l'angolo y la cui secante è x, cioè l'angolo x tale che $x = \mathbf{cot}\,(y)$

Talvolta vengono utilizzate le notazioni $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, etc in luogo di arcsin, arccos, etc, ma questa notazione ha lo svantaggio di creare confusione, per esempio, fra arcsin(x) e 1/sin(x), sebbene il contesto sia generalmente sufficiente a chiarire l'ambiguità.

ESERCIZI PROPOSTI

1) Esprimere in radianti le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi:

210°, 330°,135°,120°,240°,720°,500°,540°.

2) Esprimere in gradi le misure dei seguenti angoli, espresse in radianti:

$$\frac{\pi}{12},\frac{3}{4}\pi,\frac{\pi}{8},\frac{5}{6}\pi,\frac{7}{12}\pi,7\pi,4\pi,\frac{5}{9}\pi .$$

3) Sapendo che $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$, con $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, determinare $\sin\alpha.\tan\alpha,\cot\alpha.$

4) Sapendo che $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{4}$, con $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, determinare $\cos\alpha.\tan\alpha,\cot\alpha.$

5) Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P(2,-1)$ e formante con la direzione positiva dell'asse x l'angolo $\alpha=\frac{3}{4}\pi.$

6) Trasformare la seguente espressione in un'altra contenente solo $\tan\alpha$:

$$\frac{\cot\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha},\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi .$$

7) Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a) $\dfrac{\sin(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)+\tan(\pi+\alpha)}{\tan(\pi-\alpha)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos(-\alpha)}$ S.: 1

b) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}{\cos(\alpha-3\pi)+\sin(\alpha-\pi)}\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)+\sin(-\alpha)}$ S.: -1

8) Calcolare il valore di:

a) $\tan\left(-\frac{20}{3}\pi\right)$

b) $\cos\left(\frac{31}{6}\pi\right)$

c) $\sin\left(\frac{13}{4}\pi\right)$

d) $\sin\left(-\frac{21}{2}\pi\right)$

e) $\tan\left(\frac{5}{3}\pi\right)$

f) $\cot\left(\frac{45}{4}\pi\right)$

9) Verificare le seguenti identità:

a) $\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}+1+\tan^2\alpha-2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}$

b) $2\sin(\pi-\alpha+\beta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)+\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta$

c) $\dfrac{\sin3\alpha\cos\alpha}{\sin4\alpha}=\dfrac{1+2\cos2\alpha}{4\cos2\alpha}$

d) $2\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=1-\cos\alpha\cos\beta-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\beta\right)$

10) Risolvere i triangoli rettangoli di elementi:

a) $a=6,b=3\sqrt{2}$

b) $a = 24, \beta = \frac{5}{12}\pi$

c) $b = 6, c = 8$

Capitolo 14

Equazioni e disequazioni goniometriche

14.1 Introduzione

Un'**equazione (disequazione) trigonometrica** o **goniometrica** è un'equazione (disequazione) in cui l'incognita compare come argomento di una o più funzioni trigonometriche, quali seno, coseno e tangente.
Ad esempio, un'equazione trigonometrica è:

$$\sin^2 x - 3\cos x + 2 = \tan x + 6$$

o anche:

$$\sin x = x .$$

Invece, un'equazione del tipo:

$$x \sin\frac{\pi}{2} + 2x\cos\frac{\pi}{6} = 3$$

non è un'equazione trigonometrica, poiché l'incognita x non compare come argomento di alcuna funzione trigonometrica.
In generale, le equazioni trigonometriche, essendo equazioni trascendenti, non sono riconducibili ad equazioni polinomiali e, quindi, possono essere risolte tramite metodi numerici di approssimazione. Tuttavia, si possono studiare classi di equazioni piuttosto generali che sono risolvibili esattamente. In particolare, quando l'incognita compare solo all'interno di espressioni algebriche che sono argomento di funzioni trigonometriche, è sempre possibile, tramite opportune manipolazioni, ricondursi alla risoluzione di equazioni polinomiali o equazioni trigonometriche elementari. A tale scopo, risulta spesso indispensabile l'applicazione di opportune identità trigonometriche per ottenere, da un'equazione la cui forma è apparentemente ignota, una equazione equivalente la cui risoluzione è immediata.

14.2 Equazioni goniometriche elementari e riconducibili ad elementari

Equazioni goniometriche elementari

Le equazioni trigonometriche più semplici sono quelle riconducibili alle forme seguenti:

1) $\sin x = m$
2) $\cos x = m$
3) $\tan x = m$
4) $\cot x = m$

1) $\boxed{\sin x = m}$

Si noti che per quanto osservato nel Capitolo 13 (paragrafo 13.2) per ogni angolo x si ha $-1 \le \sin x \le 1$. Pertanto se $m < -1$ o $m > 1$ l'equazione $\sin x = m$ è impossibile.
Se $-1 \le m \le 1$, per risolvere l'equazione si determinano quei valori dell'angolo x il cui seno è m. Le soluzioni sono:

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \vee x_2 = (\pi - \alpha) + 2k\pi \text{ , con } k \in \mathbb{Z}$$

dove α è un angolo del I o del IV quadrante il cui seno è m, $\pi-\alpha$ il supplementare di α, $2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$, il periodo della funzione seno.

Esempi

1. $\sin x=-\frac{1}{2}$

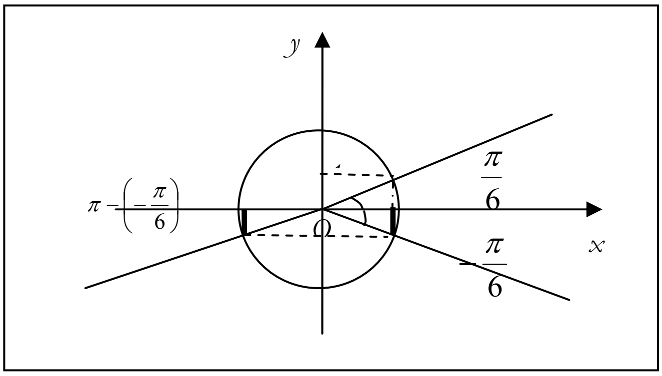


Fig. 14.1

Cominciamo con l'osservare che l'angolo il cui seno è $\frac{1}{2}$ è $\frac{\pi}{6}$. Pertanto gli angoli di seno $-\frac{1}{2}$ sono l'opposto di $\frac{\pi}{6}$, cioè $-\frac{\pi}{6}$, e il supplementare di quest'ultimo cioè $\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Quindi le soluzioni sono:

$$x_1=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x_2=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi=\frac{7}{6}\pi+2k\pi\text{, con } k\in\mathbb{Z}.$$

2. $\sin x=2$

In questo caso $m>1$. Pertanto l'equazione è impossibile.

2) $\boxed{\cos x=m}$

Si noti che per quanto osservato nel Capitolo 13 (paragrafo 13.3) per ogni angolo x si ha $-1\leq\cos x\leq 1$. Pertanto se $m<-1$ o $m>1$ l'equazione $\cos x=m$ è impossibile. Se $-1\leq m\leq 1$, per risolvere l'equazione si determinano quei valori dell'angolo x il cui coseno è m. Le soluzioni sono:

$$x_1=\alpha+2k\pi \vee x_2=(2\pi-\alpha)+2k\pi\text{, con } k\in\mathbb{Z}.$$

dove α è un angolo del I o del II quadrante il cui coseno è m, $2\pi-\alpha$ l'angolo esplementare di α (o opposto), $2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$, il periodo della funzione coseno.

Esempio

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

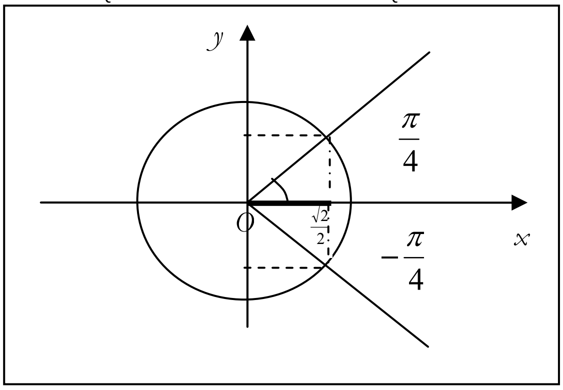


Fig. 14.2

Cominciamo con l'osservare che gli angoli il cui coseno è $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono $\frac{\pi}{4}$ e l'angolo esplementare (o opposto) di quest'ultimo cioè $-\frac{\pi}{4}$. Quindi le soluzioni sono:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ,con } k \in \mathbb{Z}.$$

3. $\boxed{\textbf{tan } x = m}$

Osserviamo che se $0 \le x \le \pi$ (cioè se il secondo lato dell'angolo si trova nel I o nel II quadrante) esiste un solo valore di x tale che $\textbf{tan } x = m$.
Inoltre poiché, come già osservato nel Capitolo 13 (paragrafo 13.3) quando l'angolo α cresce da 180° a 270° (cioè da π a $\frac{3}{2}\pi$ radianti) la tangente risulta positiva e riprende i valori assunti per α compreso tra 0° e 90°; analogamente, per α compreso tra 270° e 360° (cioè tra $\frac{3}{2}\pi$ e 2π radianti) la tangente riprende i valori assunti tra 90° e 180°; (cioè la tangente è una funzione periodica di periodo π radianti) per risolvere l'equazione sarà sufficiente determinare l'angolo α la cui tangente è *m*. Pertanto la soluzione è:

$$x = \alpha + k\pi \text{ , con } k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio

$\textbf{tan}\, x = -\sqrt{3}$

L'angolo la cui tangente è $\sqrt{3}$ è $\frac{\pi}{3}$. L'angolo la cui tangente è $-\sqrt{3}$ è l'esplementare (o opposto) di quest'ultimo cioè $2\pi - \frac{\pi}{3}$.

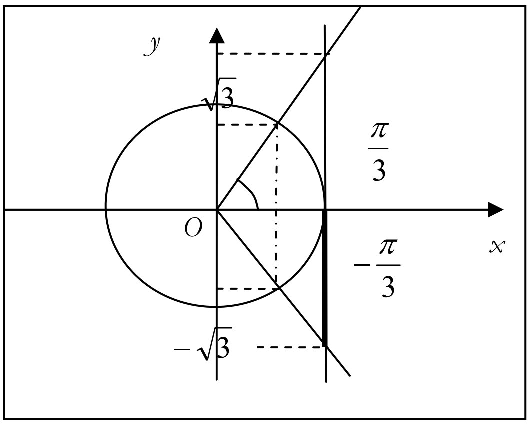


Fig. 14.3

Pertanto la soluzione è:

$$x = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + k\pi = \frac{5}{3}\pi + k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

3. $\boxed{\textbf{cot } x = m}$

Osserviamo che se $0 \le x \le \pi$ (cioè se il secondo lato dell'angolo si trova nel I o nel II quadrante) esiste un solo valore di x tale che **cot** $x = m$ **.**
Inoltre poiché, come già osservato nel Capitolo 13 (paragrafo 13.3) quando l'angolo α cresce da 180° a 270° (cioè da π a $\frac{3}{2}\pi$ radianti) la cotangente risulta positiva e riprende i valori assunti per α compreso tra 0° e 90°; analogamente, per α compreso tra 270° e 360° (cioè tra $\frac{3}{2}\pi$ e 2π radianti) la cotangente riprende i valori assunti tra 90° e 180°; (cioè la cotangente è una funzione periodica di periodo π radianti) per risolvere l'equazione sarà sufficiente determinare l'angolo α la cui cotangente è *m*. Pertanto la soluzione è:

$$x = \alpha + k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio

cot $x = -1$

L'angolo la cui cotangente è -1 è l'esplementare (o opposto) di $\frac{\pi}{4}$, cioè $2\pi - \frac{\pi}{4}$.

Pertanto la soluzione è:

$$x = \frac{7}{4}\pi + k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

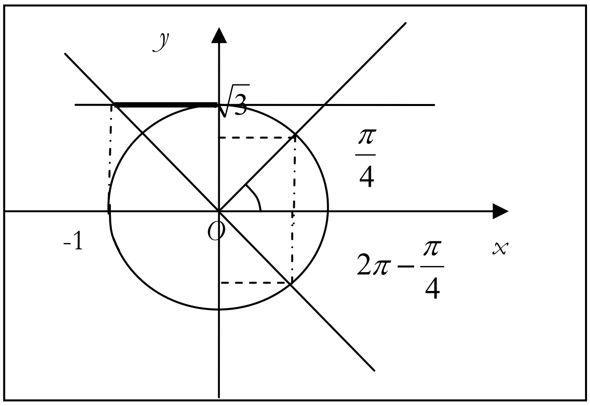


Fig. 14.4

Osservazione

Negli esempi contenuti in questo paragrafo, gli angoli ottenuti come soluzioni delle equazioni sono angoli notevoli, angoli cioè per i quali i valori delle funzioni goniometriche sono noti. In caso di angoli non notevoli per risolvere l'equazione si deve esprimere il risultato mediante opportuna funzione goniometrica inversa (tra quelle definite nel paragrafo 13.10). Ad esempio l'equazione

$$\textbf{sin}\, x = \frac{1}{3}$$

ha come soluzioni:

$$x_1 = \textbf{arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \vee x_2 = \pi - \textbf{arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

Utilizzando una calcolatrice scientifica si possono calcolare i valori delle funzioni goniometriche inverse; la soluzione potrà in questo caso essere espressa come segue:

$x_1 = 19°28'16''+k360°, x_2 = (180° - 19°28'16'') + k360° = 160°31'43''+k360°$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Equazioni goniometriche riconducibili a elementari
Alcuni tipi di equazioni goniometriche, mediante opportune trasformazioni si possono ricondurre alle equazioni elementari. Di seguito riportiamo alcuni esempi.
Esempi
1.

$$\sin^2 x - 3\sin x - \cos^2 x + 2 = 0$$

Tenendo conto della prima relazione fondamentale l'equazione può essere ricondotta a una contenente una sola funzione goniometrica, effettuando la sostituzione $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.
Si ha pertanto:

$$\sin^2 x - 3\sin x - 1 + \sin^2 x + 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 .$$

Consideriamo ora la funzione $\sin x$ come incognita ausiliaria. Posto $t = \sin x$ si ha:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

che ha come soluzioni

$$t_1 = \frac{1}{2} \text{ e } t_2 = 1.$$

È quindi sufficiente risolvere le equazioni elementari $\sin x = 1$ e $\sin x = 1/2$, le cui soluzioni sono date da

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x_3 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

2.
Se gli argomenti delle funzioni trigonometriche non sono tutti uguali, l'equazione si può spesso ricondurre ai casi già analizzati tramite l'uso di formule goniometriche. Ad esempio:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Si potrebbero utilizzare le formule di addizione e sottrazione del seno, ma in questo caso è conveniente l'applicazione delle **formule di Prostaferesi**:

$$2\sin\frac{\left(x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}\right)}{2}\cos\frac{\left(x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$2\sin x\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

la cui soluzione è

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

14.3 Equazioni goniometriche contenenti uguaglianze di funzioni goniometriche aventi argomenti diversi.

Si possono considerare di equazioni del tipo:
1) $\sin f(x) = \sin g(x)$,

2) $\cos f(x)=\cos g(x)$,

3) $\tan f(x)=\tan g(x)$,

4) $\cot f(x)=\cot g(x)$.

Per risolverle si tiene conto dei seguenti fatti:

1) Due angoli (compresi tra 0 e 2π) hanno lo stesso seno se e solo se essi sono coincidenti o supplementari. In altre parole:
$\sin f(x)=\sin g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+2k\pi \vee f(x)=\pi-g(x)+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

Esempio

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Si ha:

$$\frac{\pi}{4}-x=2x+\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee \frac{\pi}{4}-x=\pi-\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi \text{ , con } k\in\mathbb{Z};$$

da cui

$$x_1=\frac{2}{3}k\pi \vee x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ , con } k\in\mathbb{Z}.$$

.

2) Due angoli (compresi tra 0 e 2π) hanno lo stesso coseno se e solo se essi sono coincidenti o esplementari (opposti) . In altre parole:
$\cos f(x)=\cos g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+2k\pi \vee f(x)=-g(x)+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

.

3) Due angoli (compresi tra 0 e π)hanno la stessa tangente se e solo se essi sono coincidenti. In altre parole:
$\tan f(x)=\tan g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

4) Due angoli (compresi tra 0 e π) hanno la stessa cotangente se e solo se essi sono coincidenti . In altre parole:
$\cot f(x)=\cot f(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

Se l'equazione contiene più funzioni goniometriche, come nell'esempio che segue, ci si può ricondurre a uno dei quattro casi precedenti utilizzando le relazioni tra gli angoli associati.

Esempio

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cot\left(x-\frac{5}{6}\pi\right)$$

Si può scrivere:

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{5}{6}\pi\right)\right),$$

che è del tipo 4) e si risolve come segue:

$$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{5}{6}\pi\right)+k\pi \text{ , con } k\in\mathbb{Z}.$$

Pertanto la soluzione è:

$$x=\frac{3}{4}\pi+k\frac{\pi}{2}, \text{ con } k\in\mathbb{Z}.$$

14.4 Equazioni lineari in $\sin x$ e $\cos x$

Un'equazione lineare in seno e coseno è un'equazione della forma

$$a \sin x + b \cos x + c = 0$$

dove sono dati *a*, *b*, *c*, coefficienti reali.
Se uno dei coefficienti tra *a* e *b* è nullo, l'equazione rientra nei casi già esaminati.
Se *a* e *b* sono entrambi non nulli e $c = 0$ si ha l'equazione:

$$a \sin x + b \cos x = 0, a, b \neq 0..$$

Quest'ultima è detta equazione lineare *omogenea* in $\sin x$ e $\cos x$, poiché priva del termine noto.

Risoluzione di equazioni lineari omogenee in $\sin x$ e $\cos x$

Data l'equazione lineare omogenea:

$$a \sin x + b \cos x = 0, a, b \neq 0 ,$$

osserviamo che se fosse $\cos x = 0$, allora dovrebbe essere $\sin x = 1$ o $\sin x = -1$. Ciò implicherebbe $a = 0$, contro l'ipotesi. Supposto quindi $\cos x \neq 0$, dividendo per $\cos x$ si ottiene:

$$\tan x = -\frac{b}{a},$$

che è un'equazione elementare.

Esempio

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

Si ha:

$$\tan x = \sqrt{3} ,$$

che è un'equazione goniometrica elementare la cui soluzione è:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ , con } k \in \mathbb{Z}.$$

Risoluzione di equazioni lineari non omogenee in $\sin x$ e $\cos x$

Rimane da analizzare il caso in cui i coefficienti siano tutti e tre diversi da zero. Per questa equazione esistono diversi metodi risolutivi (naturalmente equivalenti tra loro).
Consideriamo l'equazione

$$a \sin x + b \cos x + c = 0$$

con $a, b, c \neq 0$.

Primo metodo: uso delle formule parametriche

Applichiamo le formule parametriche,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{con } \; x \neq \pi + 2k\pi \text{ , } t = \tan\frac{x}{2};$$

con questa posizione, stiamo naturalmente escludendo i valori dati da $x = \pi + 2k\pi$, per cui sarà necessaria una discussione.
L'equazione diventa:

$$a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} + c = 0$$

che è, in generale, un'equazione di secondo grado in *t,* che può avere al massimo due soluzioni t_1 e t_2. Le soluzioni si ottengono pertanto risolvendo le equazioni goniometriche elementari:

$$\tan\frac{x}{2} = t_1 \vee \tan\frac{x}{2} = t_2 .$$

Si deve infine verificare se $x = \pi + 2k\pi$ è soluzione dell'equazione, sostituendo tale valore al posto dell'incognita, nell'equazione di partenza. Se $x = \pi + 2k\pi$ soddisfa l'equazione di partenza tale valore va aggiunto all'insieme di soluzioni precedentemente ottenuto.

Esempio

$$\mathbf{sin}\, x - \mathbf{cos}\, x - 1 = 0$$

Si ha:

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0, \text{ con } x \neq \pi + 2k\pi, \; t = \mathbf{tan}\frac{x}{2};$$

che ha soluzione $t = 1$. Pertanto occorre risolvere l'equazione elementare

$$\mathbf{tan}\frac{x}{2} = 1.$$

Si ha

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

da cui

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Verifichiamo infine se $x = \pi + 2k\pi$ soddisfa l'equazione. Si ha:

$$\mathbf{sin}(\pi + 2k\pi) - \mathbf{cos}(\pi + 2k\pi) - 1 = 0$$

che è un'identità. Pertanto le soluzioni sono:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Secondo metodo: il metodo grafico

Osserviamo che ogni punto P sulla circonferenza goniometrica ha coordinate $(\mathbf{cos}\, x, \mathbf{sin}\, x)$ dove x è l'angolo individuato da P. Posto $X = \mathbf{cos}\, x$ e $Y = \mathbf{sin}\, x$ vale ovviamente la relazione $X^2 + Y^2 = 1$ (relazione fondamentale della goniometria). Si ottiene il sistema non lineare:

$$\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema (che equivale geometricamente a trovare le intersezioni della retta di equazione $aY + bX + c = 0$ con la circonferenza goniometrica), si ottengono le soluzioni dell'equazione iniziale.

Esempio

$$\left(\sqrt{3} + 2\right)\mathbf{cos}\, x + \mathbf{sin}\, x + 1 = 0$$

Posto $X = \mathbf{cos}\, x$ e $Y = \mathbf{sin}\, x$, il sistema:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3} + 2\right)X + Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

ha come soluzioni le coppie di valori

$$(0,-1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(che sono i punti di intersezione della retta di equazione $\left(\sqrt{3} + 2\right)X + Y + 1 = 0$ con la circonferenza goniometrica).

Si ha pertanto

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} X = -\dfrac{1}{2} \\ Y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{cos}\, x = 0 \\ \mathbf{sin}\, x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} \mathbf{cos}\, x = -\dfrac{1}{2} \\ \mathbf{sin}\, x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

Terzo metodo: il metodo dell'angolo ausiliario

Dividendo l'equazione $a\,\mathbf{sin}\, x + b\,\mathbf{cos}\, x + c = 0$ per $\sqrt{a^2 + b^2}$, si ottiene: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{sin}\, x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{cos}\, x + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$

Poiché $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$, allora esiste un angolo, che chiamiamo φ, tale che $\mathbf{cos}\,\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \mathbf{sin}\,\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. L'equazione si può allora scrivere come segue:

$$\mathbf{cos}\,\varphi\,\mathbf{sin}\, x + \mathbf{sin}\,\varphi\,\mathbf{cos}\, x + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

ossia:

$$\mathbf{sin}(x + \varphi) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

per le formule di addizione del seno. Da questa equazione elementare si ottengono facilmente le soluzioni dell'equazione di partenza.

14.5 Equazioni omogenee di secondo grado

L'equazione omogenea di secondo grado ha la forma seguente:

$$a\,\mathbf{sin}^2 x + b\,\mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x + c\,\mathbf{cos}^2 x = 0$$

con *a*, *b*, *c* numeri reali fissati.

Se $a = 0$ oppure $c = 0$, l'equazione si può scomporre in fattori. Ad esempio, per $a = 0$

$$b\,\mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x + c\,\mathbf{cos}^2 x = \mathbf{cos}\, x(b\,\mathbf{sin}\, x + c\,\mathbf{cos}\, x) = 0$$

Da cui, per la legge di annullamento del prodotto, $\mathbf{cos}\, x = 0$ oppure $b\,\mathbf{sin}\, x + \mathbf{cos}\, x = 0$.

Si ragiona analogamente se $c = 0$.

Se invece *a* e *c* sono diversi da 0, si osserva che, se $\mathbf{cos}\, x = 0$, non vi sono soluzioni (infatti $\mathbf{sin}\, x = 1$ o $\mathbf{sin}\, x = -1$, che implicherebbe $a = 0$); quindi, supposto $\mathbf{cos}\, x \neq 0$, dividendo l'equazione per $\mathbf{cos}^2 x$ si ottiene:

$$a\,\mathbf{tan}^2 x + b\,\mathbf{tan}\, x + c = 0 .$$

Risolvendo questa equazione si trova facilmente il valore di $\mathbf{tan}\, x$, per cui il problema si riduce ad equazioni elementari.

Esempio

$$\mathbf{sin}^2 x + (1 + \sqrt{3})\,\mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x + \sqrt{3}\,\mathbf{cos}^2 x = 0$$

dividendo tutto per $\mathbf{cos}^2 x \neq 0$ si ottiene

$$\mathbf{tan}^2 x + (1 + \sqrt{3})\,\mathbf{tan}\, x + \sqrt{3} = 0 .$$

Posto $t = \mathbf{tan}\ x$ si risolve l'equazione di secondo grado $t^2 + (1+\sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0$, che ha come soluzioni $t_1 = 1$ e $t_2 = \sqrt{3}$. Pertanto risolvendo le equazioni elementari $\mathbf{tan}\, x = 1$ e $\mathbf{tan}\, x = \sqrt{3}$ si ottengono le soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

14.6 Equazioni non omogenee di secondo grado

Un equazione non omogenea di secondo grado che ha la forma seguente:

$$a\,\mathbf{sin}^2\, x + b\,\mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x + c\,\mathbf{cos}^2\, x = d$$

con a, b, c,d numeri reali fissati, si può ridurre a un'equazione omogenea di secondo grado. Basta osservare che, per la prima relazione fondamentale della goniometria si ha:

$$d = d \cdot 1 = d(\mathbf{cos}^2\, x + \mathbf{sin}^2\, x).$$

Effettuando la sostituzione $d = d\,\mathbf{cos}^2\, x + d\,\mathbf{sin}^2\, x$ si ottiene:

$$a\,\mathbf{sin}^2\, x + b\,\mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x + c\,\mathbf{cos}^2\, x - d\,\mathbf{sin}^2\, x - d\,\mathbf{cos}^2\, x = 0$$

E sommando i termini simili si ha:

$$(a-d)\mathbf{sin}^2\, x + b\,\mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x + (c-d)\mathbf{cos}^2\, x = 0$$

che è un'equazione omogenea di secondo grado.

Esempio

$$\mathbf{sin}^2\, x + 2\,\mathbf{cos}^2\, x - \mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x = 1$$

Si sostituisce 1 con $\mathbf{sin}^2\, x + \mathbf{cos}^2\, x$

$$\mathbf{sin}^2\, x + 2\,\mathbf{cos}^2\, x - \mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x = \mathbf{sin}^2\, x + \mathbf{cos}^2\, x$$

si ottiene quindi

$$\mathbf{cos}^2\, x - \mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x = 0$$

che si risolve mediante scomposizione in fattori

$$\mathbf{cos}\, x(\mathbf{cos}\, x - \mathbf{sin}\, x) = 0.$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto si ha:

$$\mathbf{cos}\, x = 0 \vee \mathbf{cos}\, x - \mathbf{sin}\, x = 0.$$

Pertanto le soluzioni sono:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

14.7 Equazioni simmetriche rispetto a *sin x* e *cos x*

Le equazioni simmetriche rispetto a $\mathbf{sin}\, x$ e $\mathbf{cos}\, x$ sono quelle tali che, posto $X = \mathbf{sin}\, x$ $Y = \mathbf{cos}\, x$, sono riconducibili alla forma $P(X,Y) = 0$, dove P è un polinomio simmetrico, ossia tale che $P(X,Y) = P(X,Y)$ per ogni X,Y. In altre parole, se si scambiano $\sin x$ e $\cos x$, l'equazione rimane invariata. Nell'esempio che segue è illustrato un metodo per la risoluzione di equazioni simmetriche.

Esempio

$$\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 1$$

L'equazione è evidentemente simmetrica rispetto a seno e coseno. Impostiamo il sistema risolutore:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x - \sin x \cos x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Operando le sostituzioni $Y = \sin x, X = \cos x$ si ottiene un sistema simmetrico in X e Y :

$$\begin{cases} X + Y - XY = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X + Y - XY = 1 \\ (X+Y)^2 - 2XY = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X + Y = 1 + XY \\ (1+XY)^2 - 2XY - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} X + Y = 1 + XY \\ 1 + X^2Y^2 + 2XY - 2XY - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X + Y = 1 + XY \\ X^2Y^2 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha come soluzioni le coppie (0,1) e (1,0). Pertanto

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

e le soluzioni dell'equazione di partenza sono

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

14.8 Disequazioni goniometriche elementari

Le disequazioni trigonometriche più semplici sono quelle riconducibili alle forme seguenti:

1) $\sin x \geq m$ ($\sin x < m, \sin x > m, \sin x \leq m$)
2) $\cos x \geq m$ ($\cos x < m, \cos x > m, \cos x \leq m$)
3) $\tan x \geq m$ ($\tan x < m, \tan x > m, \tan x \leq m$)
4) $\cot x \geq m$ ($\cot x < \cot x > m, \cot x \leq m$)

dove m è un numero reale.
Per risolverle si sfrutta l'interpretazione delle funzioni goniometriche sulla circonferenza goniometrica.

1) **Disequazione del tipo** $\sin x > m$
   - Se $m \geq 1$, ad esempio $\sin x > 4$, la disequazione è impossibile, poiché $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x$.
   - Se $m \leq -1$, ad esempio $\sin x > -4$, la disequazione è verificata per ogni angolo x.

- Se $-1 < m < 1$ illustriamo il procedimento per la risoluzione nell'esempio seguente:

Esempio

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

Essendo la funzione seno periodica di periodo 2π è sufficiente studiare la disequazione considerando un giro sulla circonferenza goniometrica (cioè per $0 \le x \le 2\pi$), e aggiungere il periodo ($2k\pi$) alla soluzione così determinata.

Determiniamo i valori di x il cui seno è $\frac{1}{2}$(cioè le soluzioni dell'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$). Si ha: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Rappresentiamo graficamente tali valori.

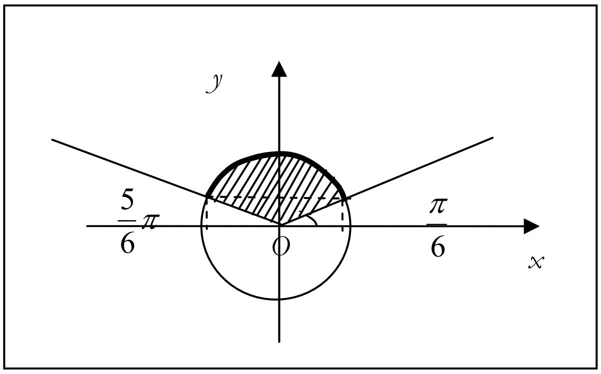


Fig. 14.5

Risolvere la disequazione $\sin x > \frac{1}{2}$ significa determinare i valori degli angoli x il cui seno è maggiore di $\frac{1}{2}$. Tali angoli sono quelli il cui secondo lato interseca la porzione di circonferenza evidenziata in figura 14.5. Pertanto la soluzione è

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{ , con } k \in \mathbb{Z}.$$

Disequazione del tipo $\sin x \ge m$

- Se $m > 1$, ad esempio $\sin x \ge 4$, la disequazione è impossibile, poiché $-1 \le \sin x \le 1, \forall x$.
- Se $m = 1$ la soluzione è: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (la disequazione è soddisfatta solo per il valore che soddisfa l'equazione).
- Se $m \le -1$, ad esempio $\sin x \ge -4$ la disequazione è soddisfatta per ogni x
- Se $-1 < m < 1$ illustriamo il procedimento per la risoluzione nell'esempio seguente:

Esempio

$$\sin x \ge \frac{1}{2}$$

Si procede come nell'esempio precedente, ma in questo caso la presenza del segno ≥ impone di considerare tra le soluzioni anche i valori che soddisfano l'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$. In altre parole le soluzioni sono:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{ , con } k \in \mathbb{Z}.$$

Disequazione del tipo $\sin x < m$

- Se $m \le -1$, ad esempio $\sin x < -4$, la disequazione è impossibile, poiché $-1 \le \sin x \le 1, \forall x$.
- $m \ge 1$ la disequazione è soddisfatta da tutti gli angoli x.
- Se $-1 < m < 1$ illustriamo il procedimento per la risoluzione nell'esempio seguente:

Esempio

$\sin x < \frac{1}{2}$

Determiniamo i valori di x il cui seno è $\frac{1}{2}$(cioè le soluzioni dell'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$). Si ha: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Rappresentiamo graficamente tali valori.

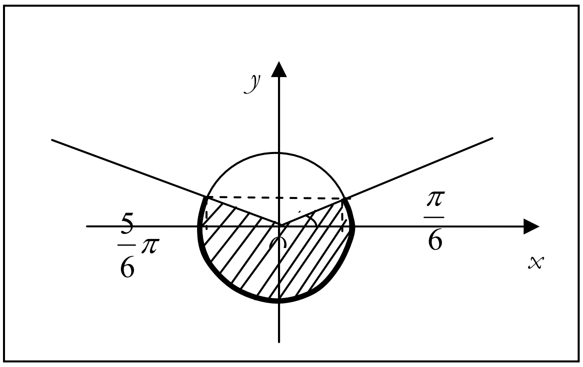


Fig. 14.6

Risolvere la disequazione $\sin x < \frac{1}{2}$ significa determinare i valori degli angoli x il cui seno è minore di $\frac{1}{2}$. Tali angoli sono quelli il cui secondo lato interseca la porzione di circonferenza evidenziata in figura 14.6. Pertanto la soluzione è

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

Disequazione del tipo $\sin x \le m$

- Se $m < -1$, ad esempio $\sin x < -4$, la disequazione è impossibile, poiché $-1 \le \sin x \le 1, \forall x$.
- Se $m = -1$ la soluzione è: $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ (la disequazione è soddisfatta solo per il valore che soddisfa l'equazione).
- $m \ge 1$ la disequazione è soddisfatta da tutti gli angoli x.
- Se $-1 < m < 1$ illustriamo il procedimento per la risoluzione nell'esempio seguente:

Esempio

$\sin x \le \frac{1}{2}$

Si procede come nell'esempio precedente, ma in questo caso la presenza del segno $\geq$ impone di considerare tra le soluzioni anche i valori che soddisfano l'equazione $\mathbf{sin}\, x = \frac{1}{2}$. In altre parole le soluzioni sono:

$$2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

2) **Disequazione del tipo $\mathbf{cos}\, x > m$**

- Se $m \geq 1$, ad esempio $\mathbf{cos}\, x > 3$, la disequazione è impossibile, poiché $-1 \leq \mathbf{cos}\, x \leq 1, \forall x$.
- Se $m \leq -1$, ad esempio $\mathbf{cos}\, x > -3$, la disequazione è verificata per ogni angolo x.
- Se $-1 < m < 1$ illustriamo il procedimento per la risoluzione nell'esempio seguente:

Esempio

$$\mathbf{cos}\, x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

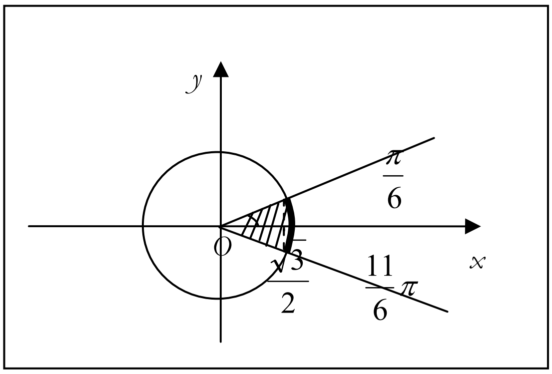


Fig. 14.7

Determiniamo i valori di x il cui coseno è $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (cioè le soluzioni dell'equazione $\mathbf{cos}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$). Si ha: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Rappresentiamo graficamente tali valori (figura 14.7).

Risolvere la disequazione $\mathbf{cos}\, x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ significa determinare i valori degli angoli x il cui coseno è maggiore di $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tali angoli sono quelli il cui secondo lato interseca la porzione di circonferenza evidenziata in figura 14.7. Pertanto la soluzione è

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

Disequazione del tipo $\mathbf{cos}\, x \geq m$

- Se $m > 1$, ad esempio $\mathbf{cos}\, x \geq 4$, la disequazione è impossibile, poiché $-1 \leq \mathbf{cos}\, x \leq 1, \forall x$.
- Se $m = 1$ la soluzione è: $x = k\pi$ (la disequazione è soddisfatta solo per il valore che soddisfa l'equazione).
- Se $m \leq -1$, ad esempio $\mathbf{cos}\, x \geq -4$ la disequazione è soddisfatta per ogni x
- Se $-1 < m < 1$ illustriamo il procedimento per la risoluzione nell'esempio seguente:

Esempio

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si procede come nell'esempio precedente, ma in questo caso la presenza del segno ≥ impone di considerare tra le soluzioni anche i valori che soddisfano l'equazione $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. In altre parole le soluzioni sono:

$$2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

Disequazione del tipo $\cos x < m$

- Se $m \leq -1$, ad esempio $\cos x < -4$, la disequazione è impossibile, poiché $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x$.
- $m \geq 1$ la disequazione è soddisfatta da tutti gli angoli x.
- Se $-1 < m < 1$ illustriamo il procedimento per la risoluzione nell'esempio seguente:

Esempio

$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

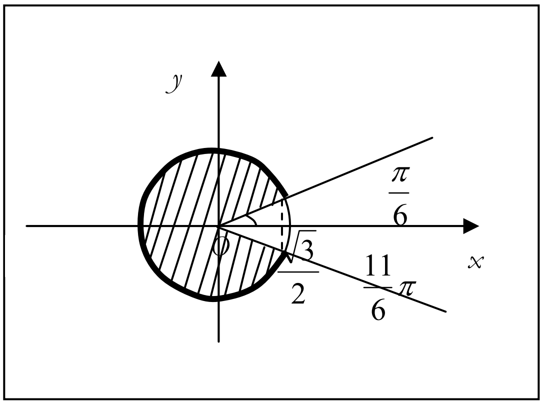


Fig. 14.8

Risolvere la disequazione $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ significa determinare i valori degli angoli x il cui coseno è minore di $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tali angoli sono quelli il cui secondo lato interseca la porzione di circonferenza evidenziata in figura 14.8. Pertanto la soluzione è

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

Disequazione del tipo $\cos x \leq m$

- Se $m < -1$, ad esempio $\cos x < -4$, la disequazione è impossibile, poiché $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x$.
- Se $m = -1$ la soluzione è: $x = \pi + 2k\pi$ (la disequazione è soddisfatta solo per il valore che soddisfa l'equazione).
- $m \geq 1$ la disequazione è soddisfatta da tutti gli angoli x.
- Se $-1 < m < 1$ illustriamo il procedimento per la risoluzione nell'esempio seguente:

Esempio

$$\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si procede come nell'esempio precedente, ma in questo caso la presenza del segno $\leq$ impone di considerare tra le soluzioni anche i valori che soddisfano l'equazione $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. In altre parole le soluzioni sono:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

3)**Disequazioni del tipo** $\tan x \geq m$ **(** $\tan x < m, \tan x > m, \tan x \leq m$ **)**

4) **Disequazioni del tipo** $\cot x \geq m$ **(** $\cot x < \cot x > m, \cot x \leq m$ **)**

In questi casi si procede ragionando in modo analogo ai casi precedenti, ma non ci sono limitazioni sul valore di *m* poiché le funzioni tangente e cotangente possono assumere valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$. Inoltre poiché le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo π, sarà sufficiente determinare le soluzioni nell'intervallo dei valori compresi tra 0 e π (I e II quadrante). Illustriamo di seguito alcuni esempi.

Esempi

1.

$$\tan x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

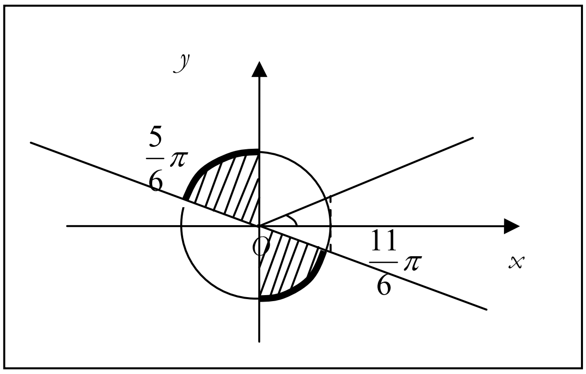


Fig. 14.9

Gli angoli la cui tangente è $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ sono $\frac{5}{6}\pi$ e $\frac{11}{6}\pi$. Volendo rappresentare la soluzione della nell'intervallo da 0 a π, osserviamo che nel I e II quadrante gli angoli la cui tangente è minore di $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ sono quelli il cui secondo lato interseca la porzione di circonferenza evidenziata in figura 14.9. Si ha pertanto

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

2.

$$\textbf{cotanx} \leq \textbf{-}1$$

Ragionando come nell'esempio precedente si ha (figura 14.10), si ha

$$\frac{3}{4}\pi + k\pi \leq x \leq \pi + k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$

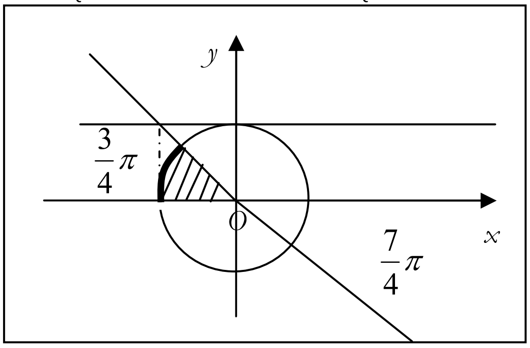


Fig. 14.10

14.9 Disequazioni riconducibili a disequazioni elementari

Mostreremo mediante esempi come alcuni tipi di equazioni possono essere facilmente ricondotti a disequazioni elementari.

Esempi

1.

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$$

E' una disequazione di secondo grado. Poniamo $\cos x = t$.

$$2t^2 + t - 1 > 0.$$

L'equazione associata ha soluzioni $t_1 = -1 \vee t_2 = \frac{1}{2}$, perciò la disequazione è soddisfatta per $t < -1 \vee t > \frac{1}{2}$, ossia per $\cos x < -1 \vee \cos x > \frac{1}{2}$. La disequazione $\cos x < -1$ non ha soluzioni, la disequazione $\cos x > \frac{1}{2}$ ha soluzioni:

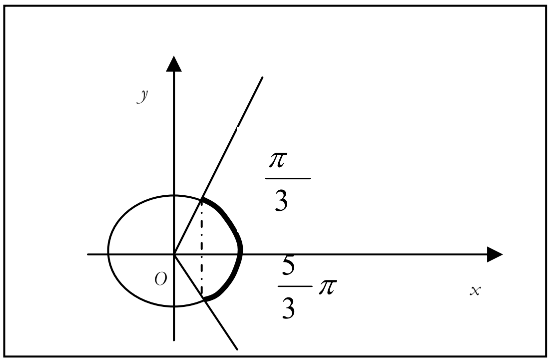


Fig. 14.11

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{5}{3}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi .$$

2.

$$\cos x(\cot x + \sqrt{3}) < 0$$

Studiamo separatamente i segni dei fattori $\cos x$ e $\cot x + \sqrt{3}$, indicando sulla circonferenza goniometrica con linea continua gli archi per i quali i fattori sono positivi, con linea tratteggiata quelli per i quali i fattori sono negativi. Riportiamo i poi i segni dei fattori in una stessa rappresentazione grafica su due circonferenze concentriche. Si ha:

$$\cos x > 0 \text{ per } 0 < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

$$\cot x \geq -\sqrt{3} \text{ per } k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi$$

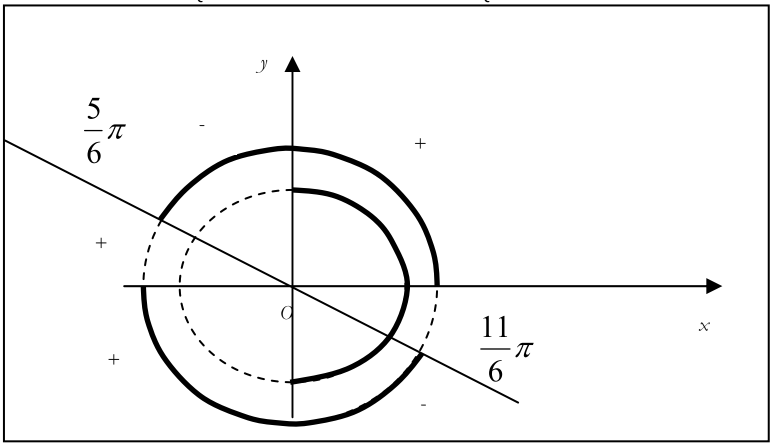


Fig. 14.12

Applicando la regola dei segni per il prodotto si ricava che le soluzioni sono le seguenti:

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi+2k\pi \vee \pi+2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi+2k\pi \vee$$
$$\frac{11}{6}\pi+2k\pi < x < 2\pi+2k\pi$$

14.10 Disequazioni lineari di primo grado in $\sin x$ e $\cos x$

Una disequazione lineare di primo grado in $\sin x$ e $\cos x$ è una disequazione del tipo:

$$a\sin x + b\cos x + c > 0$$

(o $a\sin x + b\cos x + c \geq 0$, $a\sin x + b\cos x + c < 0$, $a\sin x + b\cos x + c \leq 0$). Se uno dei coefficienti a,b è uguale a 0 si ottiene una disequazione goniometrica elementare in $\sin x$ o in $\cos x$. Pertanto in quanto segue possiamo supporre $a \neq 0, b \neq 0$.

Se $c = 0$ si ottiene una disequazione lineare omogenea di primo grado.

Disequazioni lineari omogenee di primo grado

Si tratta di disequazioni del tipo

$$a\sin x + b\cos x > 0$$

(o $a\sin x + b\cos x \geq 0$, $a\sin x + b\cos x < 0$, $a\sin x + b\cos x \leq 0$).

<u>Metodo Algebrico</u>

Per determinare le soluzioni utilizzando un metodo analogo a quello considerato per equazioni goniometriche elementari di primo grado, si divide tutto per $\cos x$, supponendo $\cos x \neq 0$. Tale limitazione impone di studiare separatamente il caso $\cos x = 0$. Inoltre occorre distinguere i due casi: $\cos x > 0, \cos x < 0$. In altre parole il procedimento per la risoluzione di disequazioni di questo tipo può essere schematizzato come nell'esempio seguente.

Esempio

$$\sin x + \cos x > 0$$

1. Si verifica se $\cos x = 0$ è soluzione della disequazione. In particolare, si verifica se $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ e $\frac{3}{2}\pi+2k\pi$ sono soluzioni della disequazione.

Si ha:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) > 0 \Rightarrow 1 > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi \textbf{ è soluzione}$$

$\mathbf{sin}\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)+\mathbf{cos}\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)>0 \Rightarrow -1>0$ **(falso)** $\Rightarrow \frac{3}{2}\pi+2k\pi$ **non è soluzione**

2. La soluzione è data da:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee \begin{cases}\mathbf{cos}\, x>0\\ \frac{\mathbf{sin}\, x}{\mathbf{cos}\, x}+1>0\end{cases} \vee \begin{cases}\mathbf{cos}\, x<0\\ \frac{\mathbf{sin}\, x}{\mathbf{cos}\, x}+1<0\end{cases}, \text{ con } k\in\mathbb{Z}.$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee \begin{cases}\mathbf{cos}\, x>0\\ \mathbf{tan}\, x+1>0\end{cases} \vee \begin{cases}\mathbf{cos}\, x<0\\ \mathbf{tan}\, x+1<0\end{cases}, \text{ con } k\in\mathbb{Z}.$$

Risolviamo il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases}\mathbf{cos}\, x>0\\ \mathbf{tan}\, x+1>0\end{cases}$$

La disequazione $\mathbf{cos}\, x>0$ è soddisfatta per

$$2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee \frac{3}{2}\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi, \text{ con } k\in\mathbb{Z}.$$

La disequazione $\mathbf{tan}\, x+1>0$ è soddisfatta per $2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee \frac{7}{4}\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

Per ottenere le soluzioni comuni rappresentiamo graficamente le soluzioni su due circonferenze (una per ciascuna delle disequazioni che compongono il sistema).

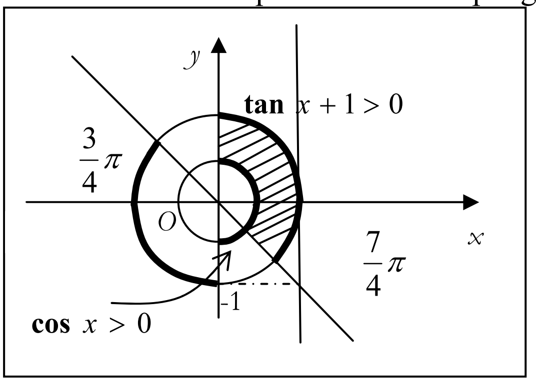


Fig. 14.13

La soluzione del sistema è: $2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee \frac{7}{4}\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

Risolviamo il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases}\mathbf{cos}\, x>0\\ \mathbf{tan}\, x+1>0\end{cases}$$

La disequazione $\mathbf{cos}\, x<0$ è soddisfatta per

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3}{2}\pi+2k\pi, \text{ con } k\in\mathbb{Z}.$$

La disequazione $\mathbf{tan}\, x+1<0$ è soddisfatta per $\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{3}{4}\pi+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

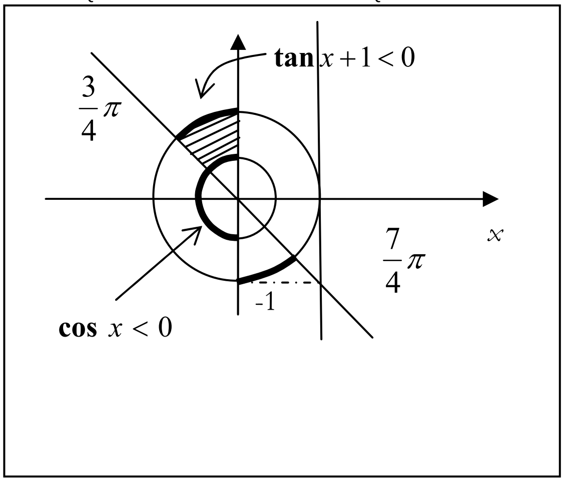
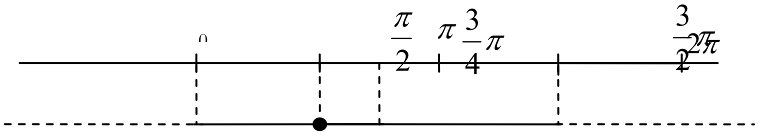


Fig. 14.14

La soluzione del sistema è (figura 14.14): $2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Quindi per ottenere la soluzione della disequazione di partenza occorre scrivere l'unione delle soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \vee 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \text{, con } k \in \mathbb{Z}.$$



Si ha pertanto $0 + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Disequazioni lineari non omogenee di primo grado

$$a \sin x + b \cos x + c > 0 \ \left(a \sin x + b \cos x + c < 0\right)$$

Metodo grafico

Come per le equazioni lineari si pone $X = \cos x$ e $Y = \sin x$; vale ovviamente la relazione $X^2 + Y^2 = 1$ (relazione fondamentale della goniometria). Si ottiene il sistema :

$$\begin{cases} aY + bX + c > 0 (aY + bX + c < 0) \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema, che equivale geometricamente a determinare i punti della circonferenza goniometrica appartenenti al semipiano $aY + bX + c > 0$ ($aY + bX + c < 0$), si ottengono le soluzioni dell'equazione iniziale.

Esempio

$$\sin x + \cos x + 1 \le 0$$

Si ha:

$$\begin{cases} X + Y + 1 \le 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

La retta $X + Y + 1 = 0$ interseca la circonferenza goniometrica nei punti A(-1,0), B(0,-1) estremi degli archi di misura rispettivamente: $\pi + 2k\pi$ e $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$.

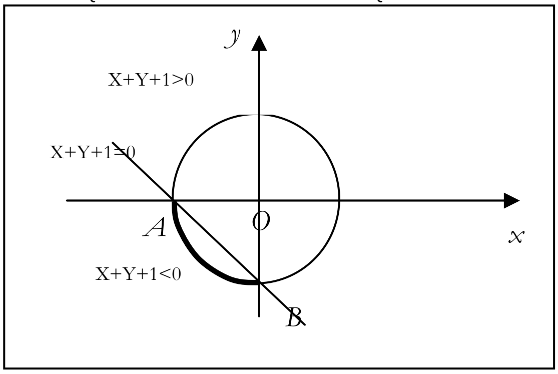


Fig. 14.15

Osservando la figura 14.15 si deduce che le soluzioni sono:

$$\pi + 2k\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \text{ , con } k \in \mathbb{Z}.$$

Metodo algebrico

Applichiamo le formule parametriche,

$$\mathbf{sin}\, x = \frac{2t}{1+t^2}, \mathbf{cos}\, x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{con } \ x \ne \pi + 2k\pi \text{ , } t = \mathbf{tan}\frac{x}{2};$$

con questa posizione, stiamo naturalmente escludendo i valori dati da $x = \pi + 2k\pi$, per cui sarà necessaria una discussione.
La disequazione diventa:

$$a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} + c > 0 \left(a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} + c > 0 \right)$$

che è riconducibile ad una disequazione goniometrica elementare.

Esercizio Risolvere la disequazione $\mathbf{cos}\, x - \mathbf{sin}\, x + 1 \ge 0$ utilizzando il metodo algebrico. (Sol.: $-\pi + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$).

14.11 Disequazioni di secondo grado in $\mathbf{sin}\, x$ e $\mathbf{cos}\, x$

Disequazioni omogenee di secondo grado in $\mathbf{sin}\, x$ e $\mathbf{cos}\, x$

Sono del tipo

$$a\,\mathbf{sin}^2 x + b\,\mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x + c\,\mathbf{cos}^2 x > 0 \;(a\,\mathbf{sin}^2 x + b\,\mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x + c\,\mathbf{cos}^2 x < 0),$$

con a,b,c, numeri reali.
Per risolverle si divide tutto per $\mathbf{cos}^2 x$, supponendolo diverso da zero. Si studia separatamente il caso $\mathbf{cos}^2 x = 0$.

Esempio

$$\mathbf{sin}^2 x - (\sqrt{3} - 1)\,\mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x - \sqrt{3}\,\mathbf{cos}^2 x > 0$$

Si può facilmente verificare che i valori che annullano il coseno $\left(x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ sono soluzioni di questa disequazione. Dividendo tutto per $\mathbf{cos}^2 x$ si ottiene

$$\mathbf{tan}^2 x - (\sqrt{3} - 1)\,\mathbf{tan}\, x - \sqrt{3} > 0$$

che è riconducibile a elementare ed ha come soluzioni

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + k\pi \text{ , con } k \in \mathbb{Z}.$$

Disequazioni non omogenee di secondo grado in $\mathbf{sin}\, x$ e $\mathbf{cos}\, x$

Sono del tipo

$$a\,\mathbf{sin}^2 x + b\,\mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x + c\,\mathbf{cos}^2 x + d > 0 \;(a\,\mathbf{sin}^2 x + b\,\mathbf{sin}\, x\,\mathbf{cos}\, x + c\,\mathbf{cos}^2 x + d < 0),$$

con a,b,c,d numeri reali.
Si risolvono effettuando la sostituzione $d = d \cdot (\mathbf{cos}^2 x + \mathbf{sin}^2 x)$ e procedendo come nel caso precedente.

Esercizio Risolvere la disequazione $2\sqrt{3}\,\mathbf{cos}^2 x - 2\,\mathbf{sin}\,x\,\mathbf{cos}\,x < \sqrt{3}$ (Sol.: $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$).

ESERCIZI PROPOSTI

Equazioni goniometriche

1) $\mathbf{cos}\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Sol.: $x = \frac{19}{12}\pi + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\mathbf{cos}\left(2x + \frac{\pi}{10}\right) = \mathbf{cos}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ Sol.: $x = -\frac{3}{10}\pi + 2k\pi, x = \frac{\pi}{30} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) $\mathbf{tan}^3 x - \mathbf{tan}^2 x - 3\,\mathbf{tan}\,x + 3 = 0$ Sol.: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) $\mathbf{tan}^4 x - 4\,\mathbf{tan}^2 x + 3 = 0$ Sol.: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5) $\mathbf{sin}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \mathbf{cos}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$ Sol.: $x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6) $\frac{\mathbf{sin}\,x}{1 + \mathbf{cos}\,x} = \sqrt{3}$ Sol.: $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7) $\mathbf{sin}\,x - \sqrt{3}\,\mathbf{cos}\,x = 0$ Sol.: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

8) $4\,\mathbf{sin}\,x\,\mathbf{cos}\,x + \sqrt{2}(\mathbf{sin}\,x + \mathbf{cos}\,x) = 0$

Sol.: $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, x = \frac{7}{12}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

9) $2\sqrt{3}\,\mathbf{sin}^2 x - 3\,\mathbf{sin}\,x\,\mathbf{cos}\,x + 3\,\mathbf{cos}^2 x - \sqrt{3} = 0$

Sol.: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \mathbf{arctan}(\sqrt{3} - 1) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

10) $2\,\mathbf{sin}^2 \frac{x}{2} + \mathbf{cos}\,x = 3\,\mathbf{tan}^2 x$ Sol.: $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Disequazioni goniometriche

1) $\mathbf{sin}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ Sol.: $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\mathbf{tan}\,2x - 1 < 0$ Sol.: $-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) $2\,\mathbf{cos}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} < 0$ Sol.: $\frac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) $\mathbf{cot}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$ Sol.: $-\frac{\pi}{3} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5) $\mathbf{sin}^2 x - \mathbf{sin}\,x \le 0$ Sol.: $2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6) $2\,\mathbf{sin}^2 x - \mathbf{sin}\,x - 1 < 0$ Sol.: $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, x \ne \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7) $\sqrt{3}\,\mathbf{sin}\,2x - \mathbf{cos}\,2x \ge 0$ Sol.: $\frac{\pi}{12} + k\pi \le x \le \frac{7}{12}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

8) $\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} > 0$ Sol.: $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

9) $\sin^4 x - 2\cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos^2 x > 0$ Sol.: $\forall x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

10) $\cot\frac{x}{2}\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right) > 0$

Sol.: $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$,
$k \in \mathbb{Z}$

Capitolo 15

FUNZIONI AD UNA VARIABILE

15.1 Introduzione

Il concetto di funzione è, si può dire, il concetto più importante per la matematica. Questo capitolo oltre a riprendere e approfondire certe funzioni già utilizzate nei capitoli precedenti (ad esempio quelle goniometriche) è dedicato ad una panoramica generale sul concetto di funzione.

15.2 Il concetto di funzione: definizione ed esempi

Definizione 15.1. *Dati due insiemi A e B che chiamiamo rispettivamente "insieme di partenza" e "insieme di arrivo", si dice funzione o applicazione f di A in B una legge che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B. In simboli:*

$$f : A \to B \text{ oppure } A \xrightarrow{f} B .$$

L'insieme A viene detto **dominio della funzione** f e viene indicato con D_f . Per ogni $x \in A$ esiste uno ed un solo elemento $y \in B$ che *in modo unic*o viene associato ad x tramite la f. Si scrive $f(x) = y$, dove x e y si dicono variabili: la prima è la **variabile indipendente**, la seconda è la **variabile dipendente** (perché i suoi valori sono stabiliti dalla legge di associazione). L'elemento $y = f(x)$ si chiama **immagine di x** mediante f. L'insieme

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

si chiama **codominio della funzione *f*** e viene indicato anche con C_f **.** Il sottoinsieme di $A \times B$ costituito dalle coppie (a,b) , con $x \in A$, $y = f(x) \in B$ si dice **grafico** G **della funzione**.

Se A e B sono due sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, allora la funzione $f : A \to B$ si dice **funzione reale di variabile reale**. In questo caso il grafico G è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè un insieme di punti del piano cartesiano.

Esempi

1. Siano dati i seguenti insiemi:

A = insieme delle persone

B = insieme dei cognomi

La legge che associa ad ogni persona un determinato cognome è una funzione $f : A \to B$**.**

2. Dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8,10,21,27\}$, la legge che associa ad ogni elemento di A il suo doppio è una funzione $f : A \to B$ (vedi figura 15.1).

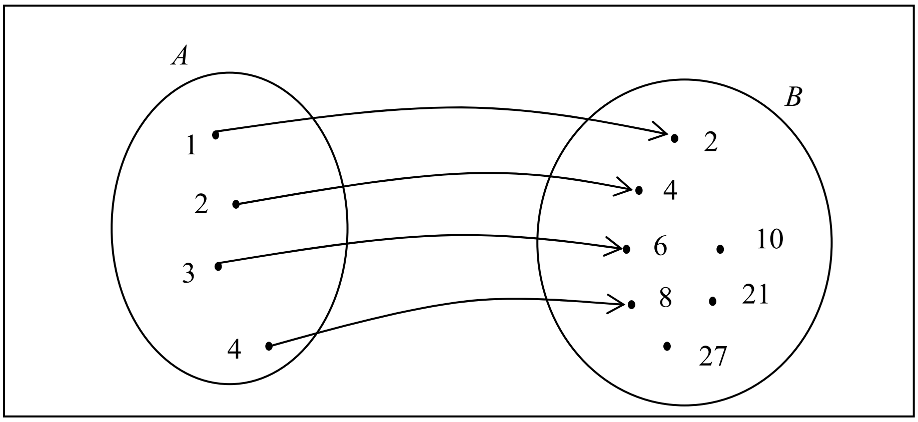


Fig. 15.1

Il suo grafico G è costituito dalle coppie $(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)$ e il codominio di f è l'insieme $C_f = \{2,4,6,8\}$.

3. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definita da $y = 2x$. In questo caso, f è una funzione numerica reale. Il suo grafico è l'insieme dei punti del piano di coordinate (x, y) tali che $y = 2x$ (una retta passante per l'origine), rappresentato in figura 15.2.

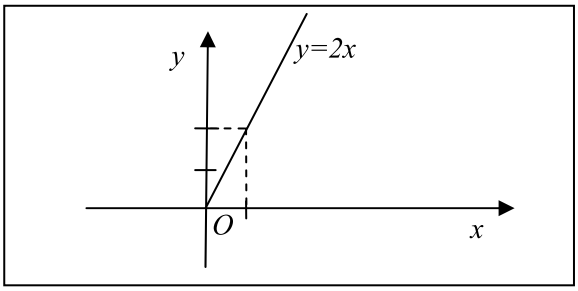


Fig. 15.2

4. Altri esempi di funzione provengono dalla geometria analitica. Di seguito ne citiamo alcuni.

   - $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definita da $y = ax^2 + bx + c$, con a,b,c numeri reali, $a \neq 0$, il cui grafico è una parabola.

   - $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definita da $y = \frac{1}{x}$, il cui grafico è un'iperbole equilatera.

15.3 Classificazione delle funzioni reali di variabile reale

Le funzioni possono essere classificate in:

- funzioni algebriche
- funzioni trascendenti

Definizione 15.2 *Una* ***funzione*** *si dice* ***algebrica*** *se il legame che esprime y in funzione di x si può ridurre a un'equazione algebrica di grado qualsiasi nelle due incognite x e y.*

Esempi di funzioni algebriche sono: le funzioni razionali intere, le funzioni razionali fratte, le funzioni irrazionali.

Definizione 15.3 *Le funzioni che non sono algebriche si dicono* ***trascendenti***.

Esempi di funzioni trascendenti sono: le funzioni goniometriche, le funzioni logaritmiche, le funzioni esponenziali.

Nella tabella che segue sono indicati i domini delle più comuni funzioni algebriche e trascendenti.

Tipo di funzione		**Dominio**	**Esempio**
Funzioni algebriche	Funzioni razionali intere	$\mathbb{R}$	$y = x^3 + 2x + 1$ $D_f = \mathbb{R}$
	Funzioni razionali fratte	$\mathbb{R} \backslash A$ dove A è l'insieme dei valori che annullano il denominatore	$y = \dfrac{1}{x+1}$ $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$
	Funzioni irrazionali	$\mathbb{R} \backslash A$ dove A è l'insieme dei valori che rendono i radicandi relativi a radici con indice pari minori di 0	$y = \sqrt{x^2 - 1}$ $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
Funzioni trascendenti	Funzioni goniometriche	$\mathbb{R} \backslash A$ dove A è l'insieme dei valori che rendono gli argomenti della tangente diversi da $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e quelli della cotangente diversi da $k\pi$	$y = \tan 2x$ $D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \right\}$
	Funzioni logaritmiche	$\mathbb{R} \backslash A$ dove A è l'insieme dei valori che rendono gli argomenti del logaritmo minori o uguali a 0	$y = \log(-x^2 - 3x - 2)$ $D_f = (-2, -1)$
	Funzioni esponenziali	$\mathbb{R}$	$y = e^{x^2+3x+2}$ $D_f = \mathbb{R}$

15.4 Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche.

Definizione 15.4 *Si dice che* $f: A \to B$ *è iniettiva se a "oggetti" diversi di A corrispondono "oggetti diversi" di B, cioè in simboli,*

$$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

In altre parole, le funzioni iniettive sono funzioni che non assumono mai due volte lo stesso valore.

Esempi

1. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $y = 2x + 1$.

Supponiamo che f non sia iniettiva. Esisteranno due valori $x_1, x_2,$ con $x_1 \neq x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Si avrebbe pertanto $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ (assurdo). Pertanto f è iniettiva. D'altro canto, si osservi il grafico di f, rappresentato in figura 15.3.

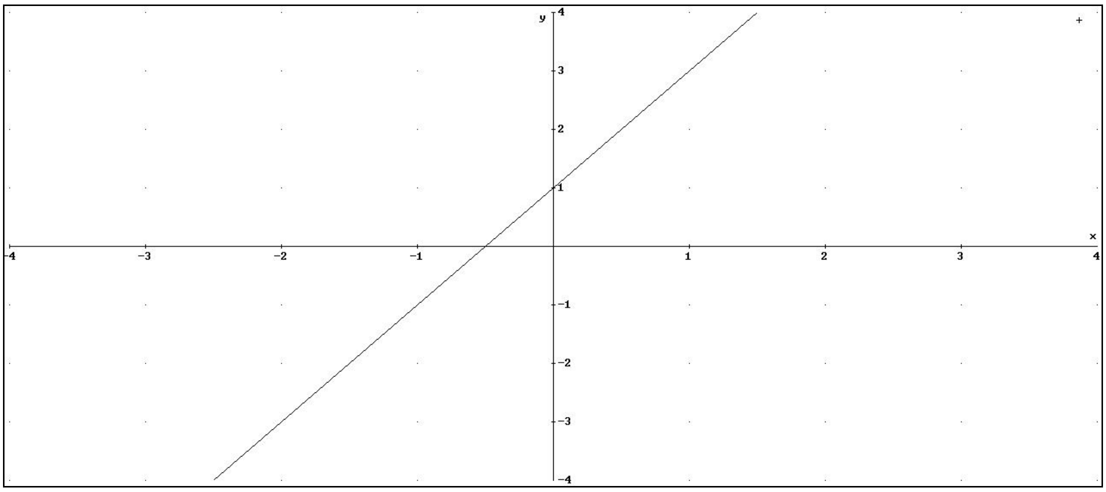


Fig. 15.3

A coppie di valori distinti sull'asse delle ascisse corrispondono coppie di valori distinti sull'asse delle ascisse.

2. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $y = 2$. Tale funzione è chiaramente non iniettiva in quanto tutti i valori $x \in \mathbb{R}$ vengono mandati dalla f in 2. Si noti infatti che, osservando il grafico della funzione (figura 15.4), è possibile determinare una coppia di valori distinti $x_1, x_2,$ con $x_1 \neq x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2) = 2.$ Ad esempio $f(1) = f(2) = 2.$

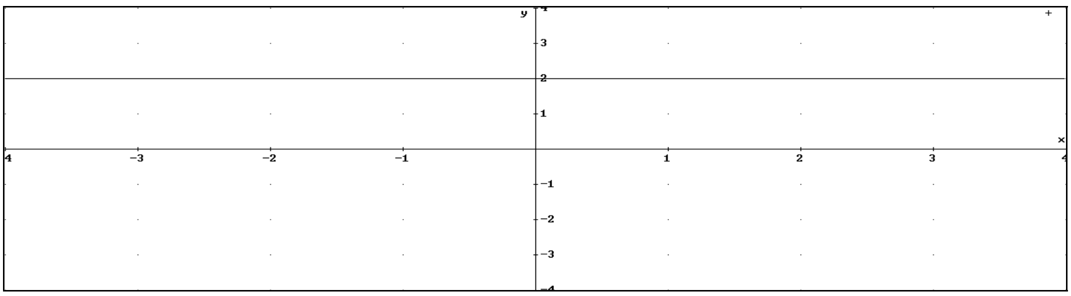


Fig. 15.4

Definizione 15.4 *Si dice che* $f: A \to B$ *è* ***suriettiva*** *se ogni elemento del codominio proviene da qualche elemento del dominio:*

$$\forall y \in B \exists x \in A / f(x) = y$$

In altre parole le funzioni suriettive esauriscono lo spazio di arrivo, cioè $f(D_f) = C_f$.

Esempi

1. Dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8,10,21,27\}$, la funzione $f: A \to B$ che associa ad ogni elemento di A il suo doppio (vedi figura 15.1) non è suriettiva.

2. Le funzioni $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da *y=2x+1* (fig. 15.2) e $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da *y=2* (fig. 15.3) sono suriettive. Dimostriamo, ad esempio che f_1 è suriettiva. Per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha: *y=f(x),* dove $x = \frac{y-1}{2}$.

Definizione 15.5 *Si dice che* $f: A \to B$ *è* ***biettiva*** *o* ***biunivoca*** *se è iniettiva e suriettiva.*

15.5 Funzione inversa

Una funzione è una legge che associa ad ogni elemento x di A al più un elemento $y = f(x) \in B$. L'elemento x da cui proviene y è detto **controimmagine** e si indica con $f^{-1}(x)$. Ci chiediamo dunque: è possibile invertire tale processo? Cioè, è possibile determinare una funzione che rimanda ogni elemento $y \in B$ all'elemento $x \in A$ da cui proveniva? La risposta è: non sempre. Il processo si può invertire solo se la funzione è biettiva. La proprietà della funzione di essere iniettiva garantisce la non esistenza di più controimmagini per uno stesso elemento, la proprietà di essere suriettiva garantisce che gli elementi del codominio possano "tornare indietro". Formalmente:

Definizione 15.6 *Sia* $f: A \to B$, *definita da* $y = f(x)$. *Si definisce* ***inversa*** *di f, se esiste, la funzione* $f^{-1}: B \to A$, *che associa ad ogni elemento* $y \in B$, *la relativa controimmagine* $x \in A$, *cioè tale che* $x = f^{-1}(y)$.

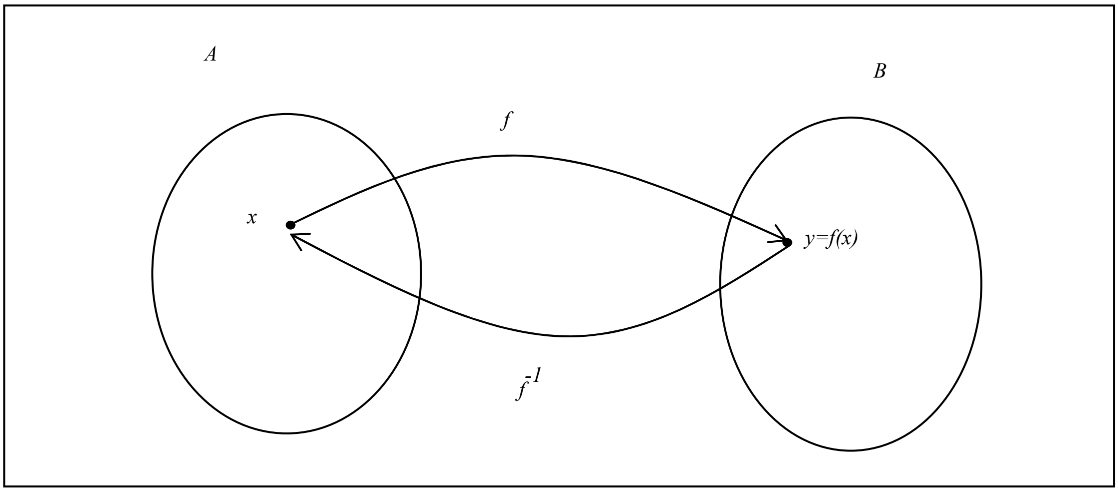


Fig. 15.5

L'esistenza della funzione inversa è garantita dalla condizione: *f* è biettiva.

Osserviamo che se f non è biettiva la notazione f^{-1}, è usata per indicare semplicemente la controimmagine di un elemento. Se f è biettiva f^{-1} indica la funzione inversa (in queste ipotesi per ogni $y \in B$ l'immagine della funzione inversa coincide con la controimmagine di y mediante f).

Esempio

Trovare se esistono le funzioni inverse di $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definita da* $y = 4x^2$ *e di* $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definita da* $y = 3x + 1$. Osserviamo che f_1 non è iniettiva (esistono infatti elementi distinti aventi la stessa immagine, ad esempio $f(-1) = f(1) = 4$), quindi non è invertibile. Consideriamo ora f_2. Essa è iniettiva e suriettiva. Per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $f_2^{-1}(y) = x = \dfrac{y-1}{3}$. Pertanto la funzione inversa di f_2, $f_2^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f_2^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

15.6 Funzione composta

Osserviamo la figura 15.6.

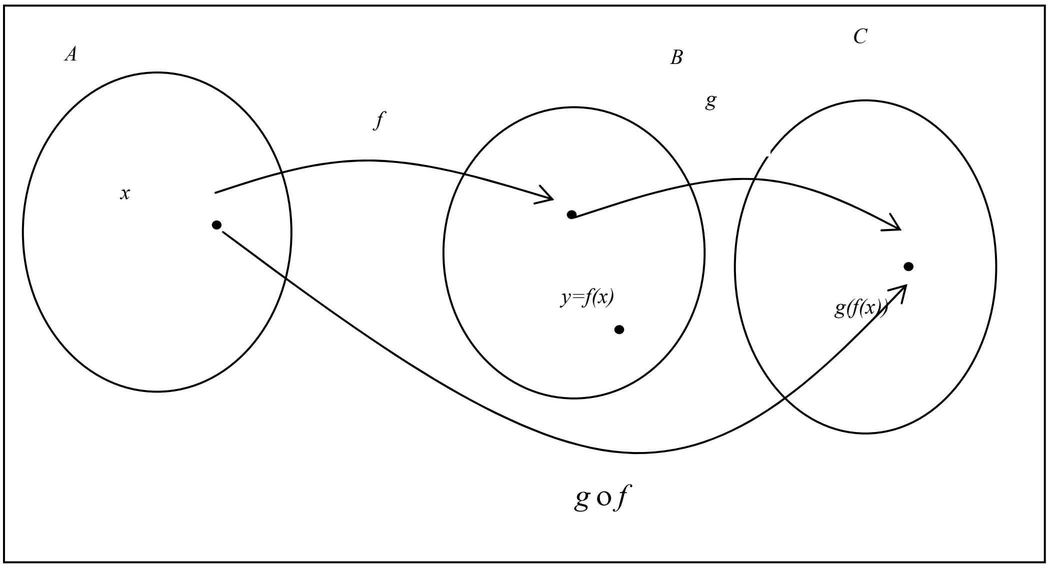


Fig. 15.6

Sono date due funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$. A partire da f e g vogliamo costruire una funzione che manda gli elementi di A direttamente in C. E' possibile costruire una siffatta funzione solo se $D_g \cap \mathbf{Im}\, f \neq \emptyset$. Tenendo conto di ciò si ha:

Definizione 15.7 *Date due funzioni* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$, *la funzione* $h : A \to C$ *che fa corrispondere ad ogni elemento* $x \in A$ *l'elemento* $g(f(x)) \in C$ *è detta funzione composta di g e f e si indica con* $g \circ f$ *(si legge* $g \circ f$*).*

Esempio *Studiare la composizione* $g \circ f$ *delle seguenti funzioni:*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definita da* $y = 2x - 1$,

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definita da* $y = x^2$.

Osserviamo che l'ipotesi $D_g \cap \mathbf{Im}\, f \neq \emptyset$ è soddisfatta. Si ha pertanto:

$g(f(x)) = g(2x-1) = (2x-1)^2$.

Esiste dunque la funzione $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h = g \circ f$ ed è definita da $y = h(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

15.7 Grafici delle principali funzioni elementari.

Funzione lineare

La funzione lineare è una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avente come legge di associazione $y = mx$, dove m è un numero reale, $m \neq 0$. Il grafico è una retta passante per l'origine. Si ha: $C_f = D_f = \mathbb{R}$..

Esempio

Se $m = 4$, si ha $y = 4x$ e il grafico è rappresentato in figura 15.7.

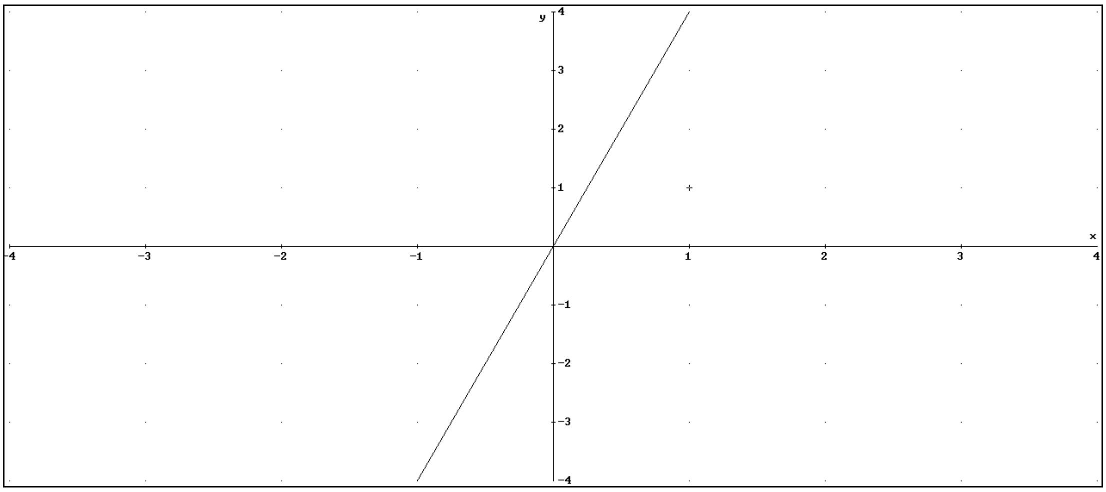


Fig. 15.7

Tale funzione è utilizzata per esprimere un legame di proporzionalità diretta tra due grandezze. Ad esempio, in Fisica, la funzione che esprime il legame tra la forza F di richiamo di una molla e l'allungamento di quest'ultima è: **F = - kx.**

Si può considerare anche la **funzione lineare affine** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cui legge di associazione è $y = mx + q$, con $m \neq 0$. Il grafico è una retta che interseca l'asse y nel suo punto di ordinata q. Anche in questo caso si ha: $C_f = D_f = \mathbb{R}$..

Esempio

Se $m = 3$, $q = 1$ si ha $y = 3x + 1$ e il grafico è quello rappresentato in figura 15.8.

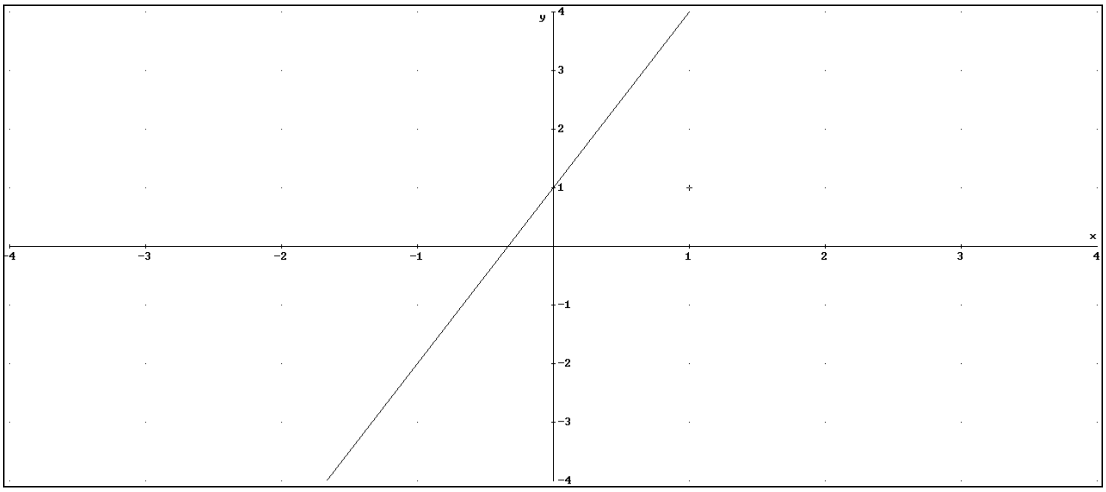


Fig. 15.8

Funzione $\frac{1}{x}$

La funzione che ha come legge di associazione $y = \frac{1}{x}$ esprime una il legame tra due grandezze inversamente proporzionali. Si ha: $C_f = D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il grafico è un'iperbole equilatera traslata (figura 15.9).

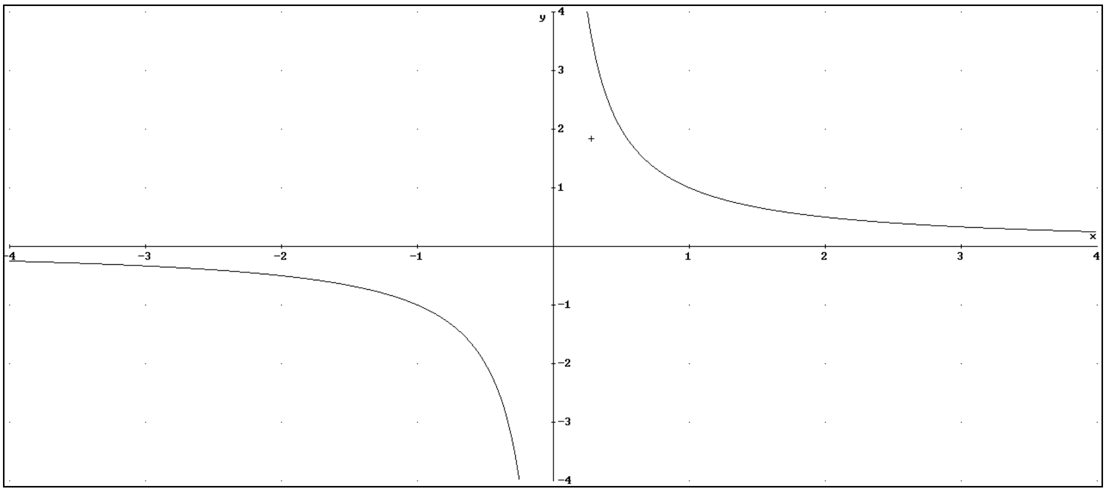


Fig. 15.9

Funzione potenza

La funzione potenza ha come legge di associazione $y = x^n$, dove n è un numero intero.

Consideriamo la funzione potenza con $n > 0$. Si ha:

<u>Primo caso: *n* pari</u>. Si ha: $D_f = \mathbb{R}$, $C_f = \mathbb{R}^+$(insieme dei numeri reali non negativi). Il grafico di tutte le funzioni $y = x^n$ è simile a quello della parabola $y = x^2$, con la concavità che si restringe all'aumentare di n (figura 15.10).

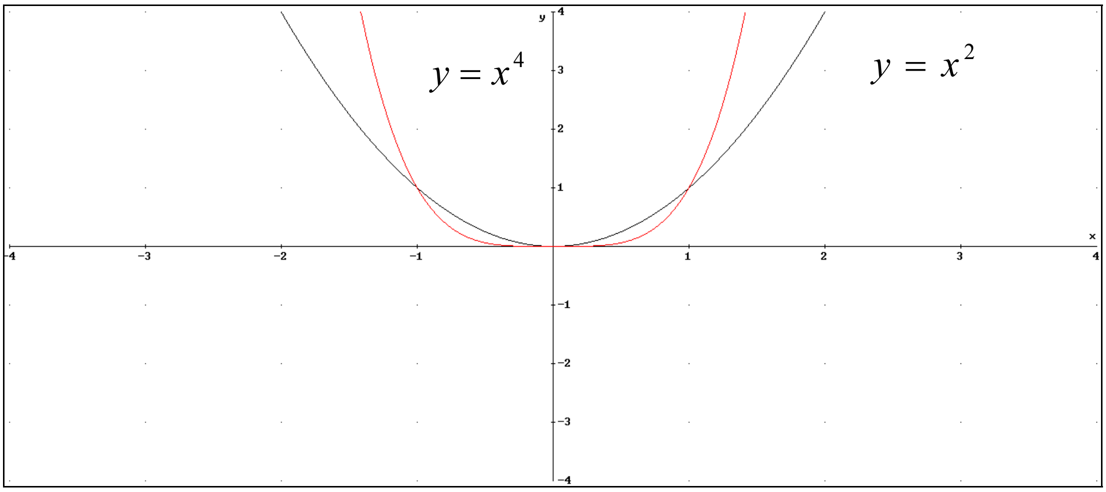


Fig. 15.10

<u>Secondo caso: *n* dispari</u>. Si ha: $C_f = D_f = \mathbb{R}$.

Il grafico è come in figura 15.11.

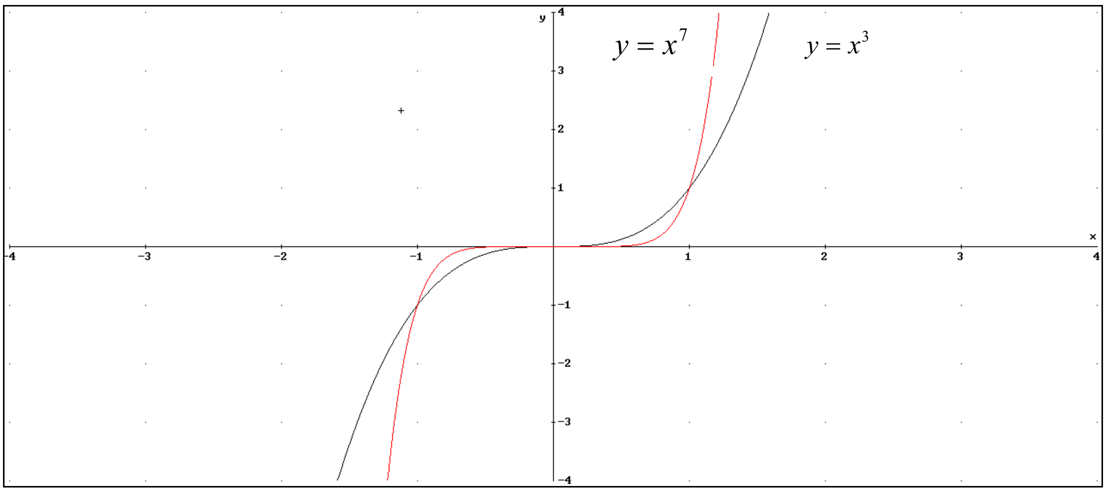


Fig. 15.11

Funzione radice

La funzione radice è l'inversa della funzione potenza ed ha come legge di associazione $y = \sqrt[n]{x}$. Ricordando che in $\mathbb{R}$ la radice di indice pari ha significato solo se il radicando è non negativo, si ha:

<u>Primo caso: n pari</u>

$D_f = C_f = \mathbb{R}^+$

Il grafico è come in figura 15.12

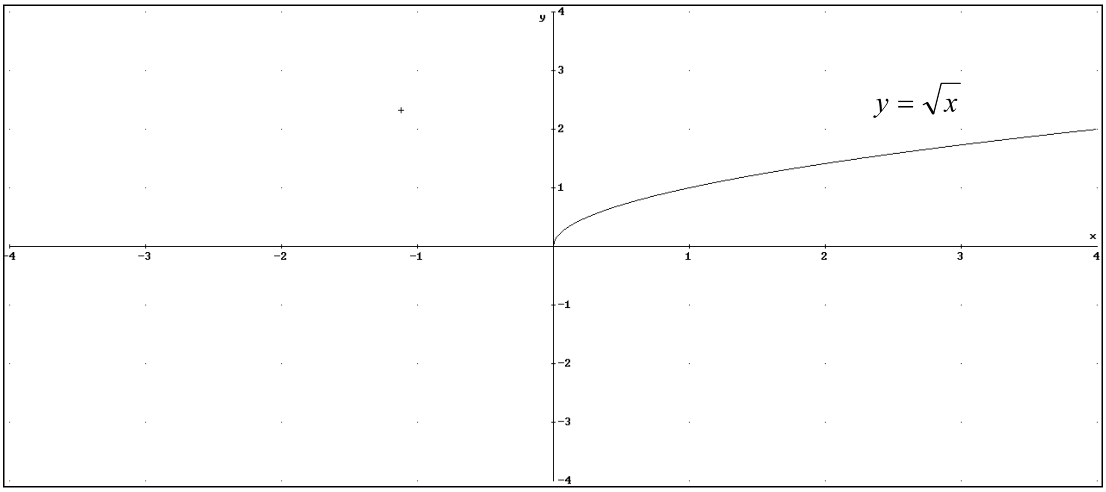


Fig. 15.12

<u>Secondo caso: n dispari</u>

Si ha: $C_f = D_f = \mathbb{R}$.

Il grafico è come in figura 15.13.

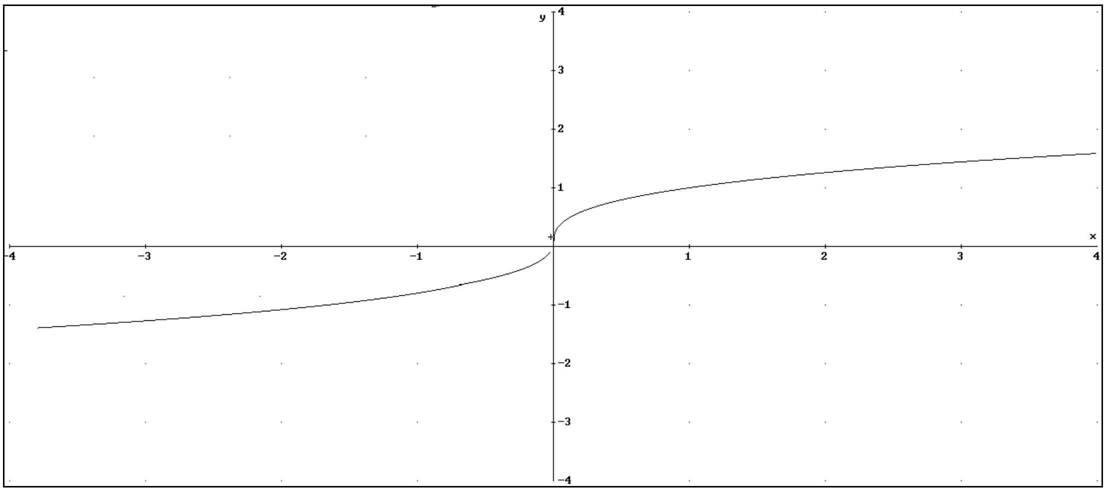


Fig. 15.13

Funzione esponenziale

La funzione esponenziale ha come legge di associazione

$$y = a^x .$$

Si ha: $D_f = \mathbb{R}$, $C_f = \mathbb{R}^+$. Per il grafico occorre distinguere due casi.

<u>Primo caso:</u> $\boxed{a > 1}$. Il grafico è come in figura 15.14.

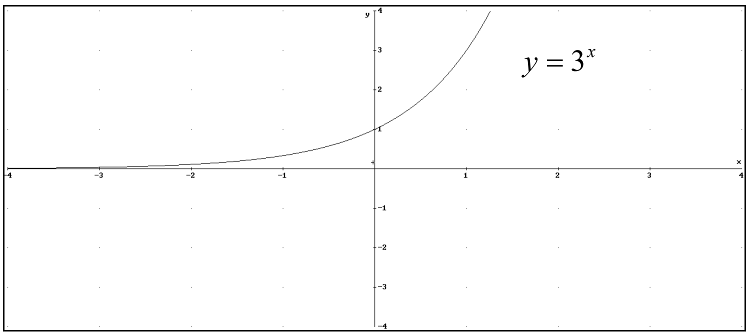


Fig. 15.14

Osserviamo che all'aumentare dei valori di x anche i valori di y aumentano. Si dice in questo caso che la funzione è crescente.

Secondo caso: $\boxed{0 < a < 1}$. Il grafico è come in figura 15.15.

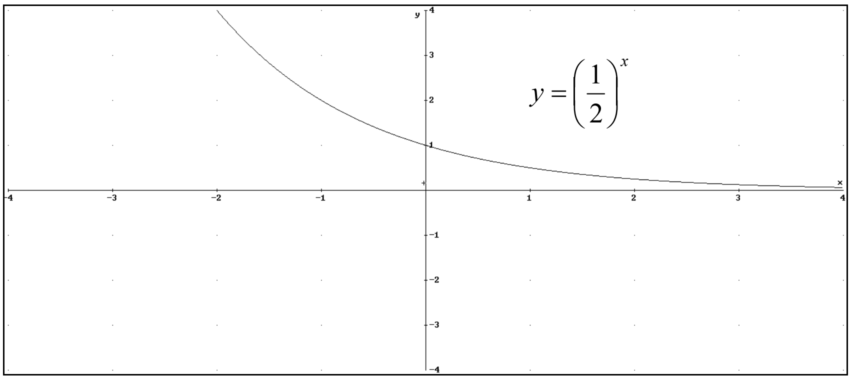


Fig. 15.15

Osserviamo che all'aumentare dei valori di x i valori di y diminuiscono. Si dice in questo caso che la funzione è decrescente (i concetti di funzione crescente e decrescente verranno approfonditi nei corsi di Analisi).

Una base tipica della funzione esponenziale è rappresentata dal numero irrazionale $e \approx 2{,}718$. Essendo $e > 1$, il grafico della funzione esponenziale definita da $y = e^x$ è simile a quello della figura 15.14.

Funzione logaritmica

L'inversa della funzione esponenziale è la funzione logaritmica definita da $y = \mathbf{log}_a\, x$. Si ha: $D_f = \mathbb{R}^+, C_f = \mathbb{R}$.

Primo caso: $\boxed{a > 1}$. Il grafico è come in figura 15.16.

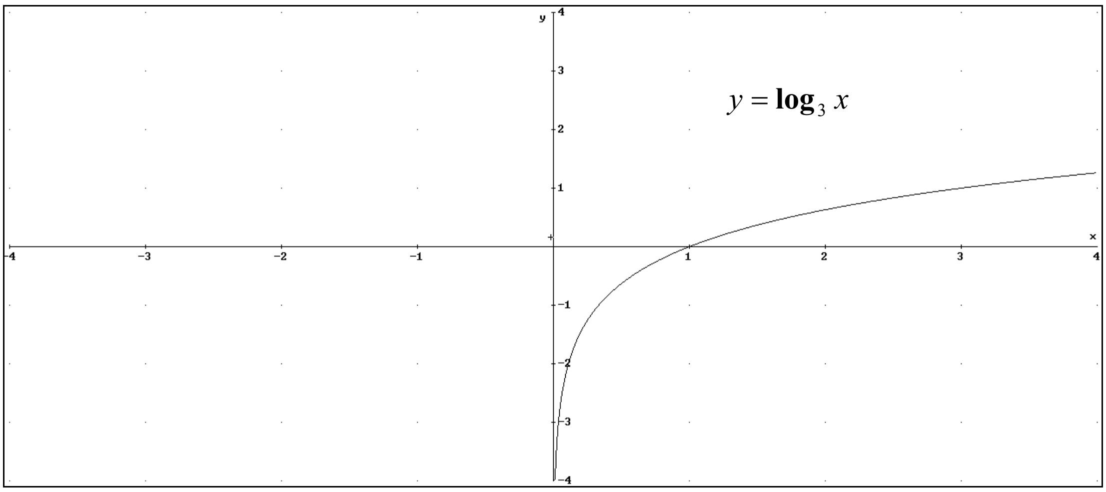


Fig. 15.16

Secondo caso: $\boxed{0 < a < 1}$. Il grafico è come in figura 15.17.

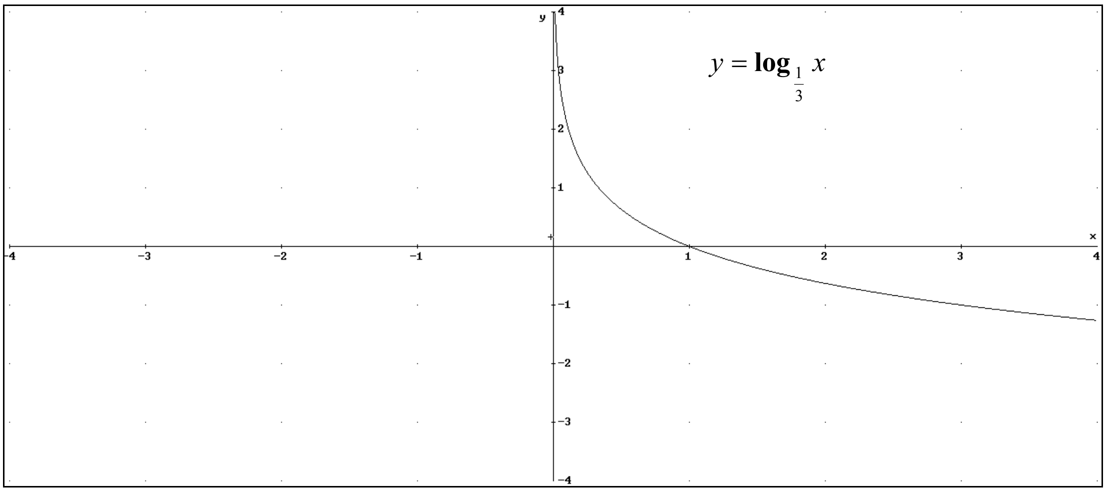


Fig. 15.17

Funzione valore assoluto

La funzione valore assoluto ha come legge di associazione $y = |x|$. Ricordando la definizione di valore assoluto, si può scrivere in maniera più esplicita:

$$y = \begin{cases} x & \textbf{se } x > 0 \\ -x & \textbf{se } x < 0 \end{cases},$$

si ha pertanto $D_f = \mathbb{R},\ C_f = \mathbb{R}^+$. Il grafico è quello di figura 15.18.

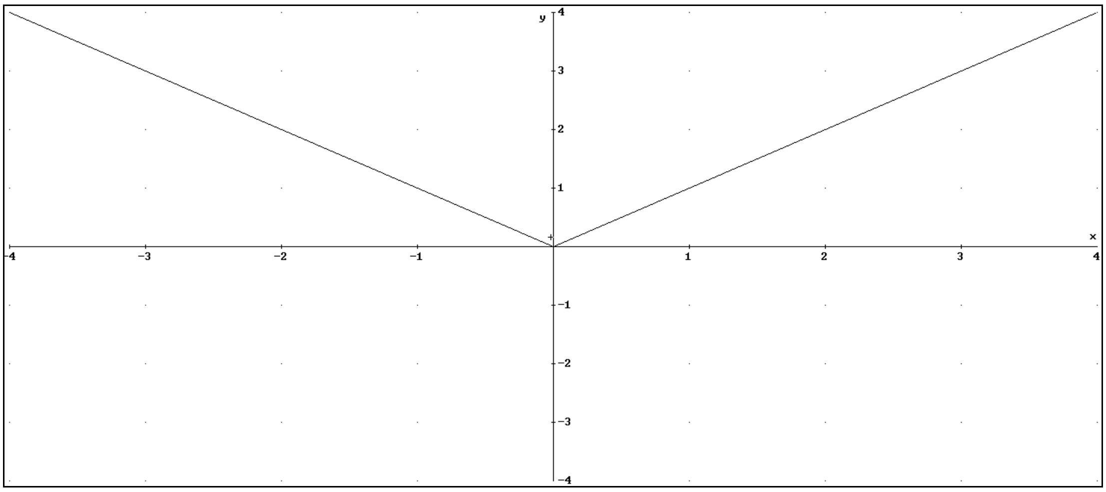


Fig. 15.18

Funzioni goniometriche

<u>Funzione seno</u>

La funzione seno ha come legge di associazione $y = \sin x$. Ricordando le considerazioni fatte nel capitolo 13, il seno di un angolo assume valori da -1 a $+1$ e può essere calcolata per ogni angolo x. Pertanto: $D_f = \mathbb{R},\ C_f = [-1,1]$. Essendo il seno una funzione periodica di periodo 2π, è sufficiente rappresentarla graficamente nell'intervallo $[0,2\pi]$. Il grafico è la curva rappresentata in figura 15.19, detta **sinusoide.**

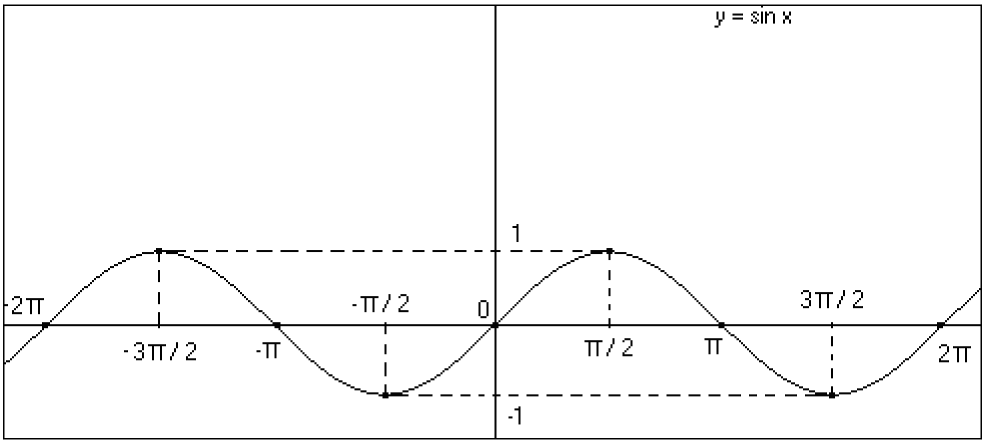


Fig. 15.19

Funzione coseno

La funzione seno ha come legge di associazione $y = \mathbf{cos}\ x$. Ricordando le considerazioni fatte nel capitolo 13, il coseno di un angolo assume valori da -1 a $+1$ e può essere calcolato per ogni angolo x. Pertanto: $D_f = \mathbb{R}$, $C_f = [-1{,}1]$. Essendo il seno una funzione periodica di periodo 2π, è sufficiente rappresentarla graficamente nell'intervallo $[0{,}2\pi]$. Il grafico è la curva rappresentata in figura 15.20, detta **cosinusoide**.

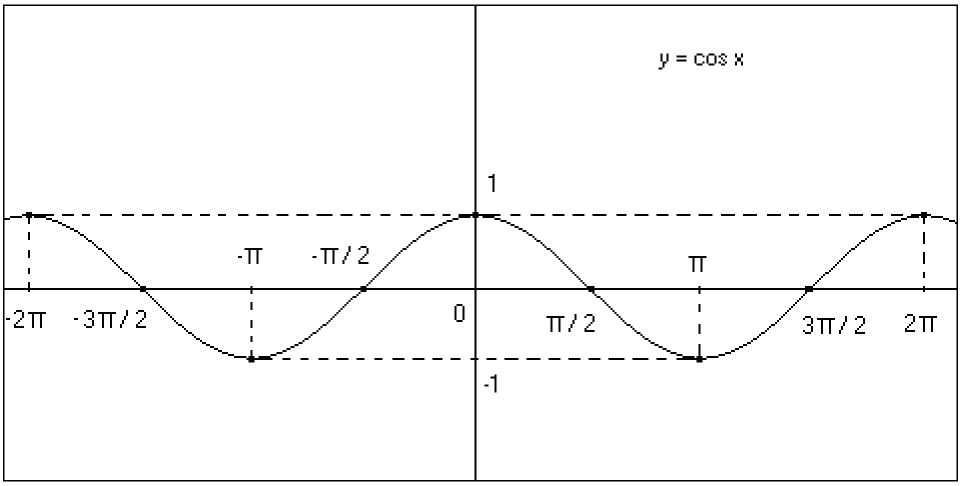


Fig. 15.20

Funzione tangente

La funzione seno ha come legge di associazione $y = \mathbf{tan}\ x$. Ricordando le considerazioni fatte nel capitolo 13, la tangente di un angolo assume valori da $-\infty$ a $+\infty$ e può essere calcolato per ogni angolo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Pertanto: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, $C_f = \mathbb{R}$. Essendo la tangente una funzione periodica di periodo π, è sufficiente rappresentarla graficamente nell'intervallo $[0,\pi]$. Il grafico è la curva rappresentata in figura 15.21, detta **tangentoide.**

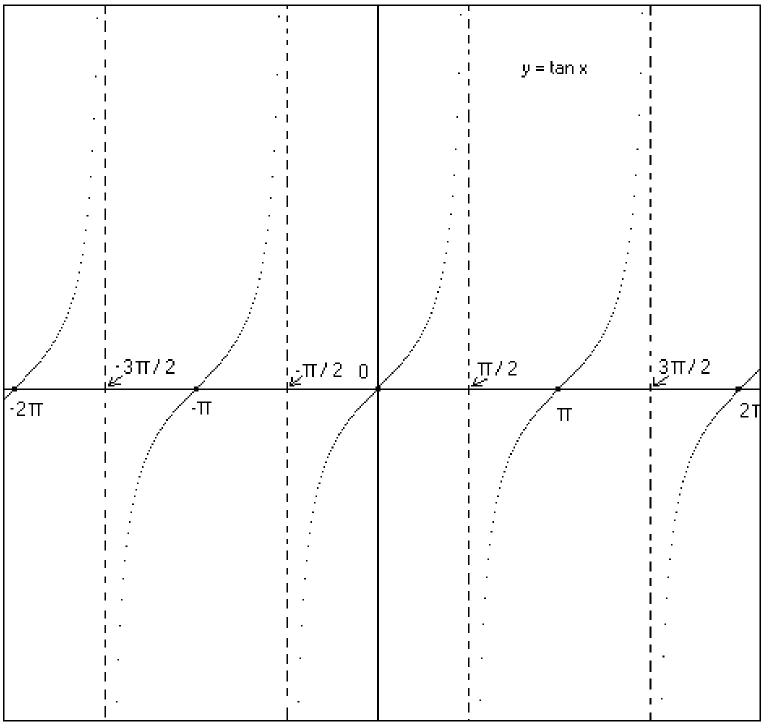


Fig. 15.21

ESERCIZI PROPOSTI

1) Calcolare il dominio delle funzioni definite da:

- $y = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 4}$ Sol.: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- $y = \dfrac{x + 2}{x^2 + x + 1}$ Sol.: $D_f = \mathbb{R}$
- $y = \sqrt{-4x^2 + 20x + 25}$ Sol.: $D_f = \left[\dfrac{5 - 5\sqrt{2}}{2}; \dfrac{5 + 5\sqrt{2}}{2}\right]$
- $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x^2 - 9}$ Sol.: $D_f = (-\infty, -3]$
- $y = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x - 7}}$ Sol.: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{7\}$
- $y = \log_{\frac{1}{3}}(\tan x - 1)$ Sol: $D_f = \left\{\ \forall x \in \mathbb{R}\ \dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ \right\}$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- $y = e^{\frac{x}{x+1}}$ Sol.: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ Sol.: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- $y = \dfrac{\log_2(x + 1)}{x}$ Sol.: $D_f = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

2) La funzione definita da: $y = \dfrac{x + 7}{3}$ è iniettiva? È suriettiva? È invertibile? In caso di risposta affermativa, determinare la funzione inversa.

Sol.: $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = 3x - 7$.

3) Date le funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $y = 3x + 2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$, definita da $y = x^2$, determinare la funzione composta $g \circ f$.

Sol.: $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$, definita da $y = 9x^2 + 12x + 4$

Capitolo 16

ELEMENTI DI CALCOLO COMBINATORIO

16.1 Introduzione

Oggetto del calcolo combinatorio è quello di determinare il numero dei modi mediante i quali possono essere associati, secondo prefissate regole, gli elementi di uno stesso insieme o di più insiemi. In molte applicazioni sorge il problema di sapere in quanti modi possibili si può presentare un certo fenomeno. Il problema, all'apparenza, sembra banale: ciò è vero se il numero degli elementi presi in considerazione è piccolo, ma quando questo numero è elevato si presentano delle difficoltà nel formare tutti i raggruppamenti possibili e senza considerare ripetizioni.
Nelle applicazioni ci si può, per esempio, chiedere:

- In quanti modi diversi si possono scegliere tre libri da una libreria che ne contiene 12?
- In quanti modi si possono scegliere tre numeri diversi, compresi tra 1 e 50, in modo che la loro somma sia divisibile per 4?
- Nel menù di un ristorante si può scegliere tra cinque primi piatti, sei secondi e sette dessert: quanti tipi di pasti, con almeno una portata diversa, può somministrare il ristoratore?

e così via. Il calcolo combinatorio oltre che a rispondere a domande del tipo precedente costituisce anche uno strumento aritmetico che è di supporto indispensabile nel Calcolo delle Probabilità poiché consente di determinare il numero di eventi possibili (ma anche quelli favorevoli e contrari) che si possono verificare in una prova. In definitiva possiamo dire che il Calcolo combinatorio fornisce quegli strumenti di calcolo per determinare il numero di raggruppamenti che si possono formare con un numero k di oggetti presi da un insieme contenente n oggetti ($n \geq k$) secondo le modalità seguenti:
a) i k oggetti possono formare gruppi ordinati (che chiameremo ***disposizioni***);
b) i k oggetti possono formare gruppi non ordinati (che chiameremo ***combinazioni***);
c) se $k = n$ otterremo dei gruppo ordinati che chiameremo ***permutazioni***.

Esaminiamo in dettaglio questi raggruppamenti.

16.2 Disposizioni semplici

Consideriamo un insieme A formato da n elementi distinti ed un numero $k \leq n$. Si chiamano ***disposizioni semplici*** degli n elementi presi a k a k (o *disposizioni della classe k*) un gruppo ordinato formato da k degli n elementi dell'insieme dato A in modo che valgano le seguenti proprietà:
1. in ciascun raggruppamento figurano k oggetti senza ripetizione;

2. due di tali disposizioni si ritengono diverse quando differiscono per almeno un elemento oppure per l'ordine con cui gli stessi elementi si presentano.
Il numero delle disposizioni semplici di *n* elementi distinti, della classe *k*, si indica con il simbolo $D_{n,k}$ il cui valore è dato dal teorema (che non dimostreremo) seguente:
Il numero delle disposizioni semplici di n elementi distinti della classe k, è uguale al prodotto di k numeri interi consecutivi decrescenti dei quali il primo è n.
Si ha cioè:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \Lambda \ (n-k+1)$$

e si dimostra che:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Il simbolo $n!$ si legge *n fattoriale* e non è altro che il prodotto di *n* numeri interi decrescenti a partire da *n* e per definizione si pone $0! = 1$.
Così, ad esempio, se vogliamo calcolare $D_{7,3}$ nei due modi descritti, si ha:

$$D_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

$$D_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210.$$

16.3 Disposizioni con ripetizione

Consideriamo un insieme costituito *n* elementi distinti ed un numero naturale *k* senza alcuna limitazione superiore. Il problema che ci poniamo è quello di costruire tutti i possibili raggruppamenti distinti prendendo *k* oggetti in modo che:
a) in ciascun raggruppamento figurano *k* oggetti ed uno stesso oggetto può figurare, ripetuto, fino ad un massimo di *k* volte;
b) due qualsiasi raggruppamenti sono distinti se uno di essi contiene almeno un oggetto che non figura nell'altro, oppure gli oggetti sono diversamente ordinati, oppure gli oggetti che figurano in uno figurano anche nell'altro ma sono ripetuti un numero diverso di volte.
Il numero delle disposizioni con ripetizione si indica con il simbolo $D'_{n,k}$ e si dimostra che tale numero è dato da:

$$D'_{n,k} = n^k.$$

Esempi

1. *Usando le cifre significative 1,2,3,4,5,6,7,8,9 del sistema decimale, quanti numeri di 3 cifre differenti si possono formare con esse? E quanti se ne possono formare se non tutte le cifre sono differenti?* Per rispondere alla prima domanda occorre considerare le disposizioni (conta l'ordine) semplici (le cifre non si ripetono) di 9 elementi di classe 3, cioè: $\frac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. Per rispondere alla seconda domanda occorre considerare le disposizioni (conta l'ordine) con ripetizione (le cifre si ripetono) di 9 elementi di classe 3, cioè: $9^3 = 729$.
2. *Quanti numeri naturali con 3 cifre distinte si possono formare?* Le cifre significative sono: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Occorre considerare le disposizioni (conta l'ordine) semplici (le cifre devono essere distinte) di 10 elementi di classe 3: $D_{10,3} = 720$. Occorre poi tenere presenti che calcolando $D_{10,3}$ si considerano anche le disposizioni del tipo 0345786912, che non è un numero naturale con 10 cifre. Pertanto, tenendo conto che esistono $\frac{720}{10} = 72$ disposizioni aventi come cifra iniziale lo 0, il numero richiesto sarà: $D_{10,3} - \frac{D_{10,3}}{10} = 720 - 72 = 648.$

16.4 Permutazioni semplici

Le *permutazioni semplici* altro non sono che le disposizioni di *n* oggetti presi ad *n* ad *n*, ossia, dato un insieme di *n* oggetti, si dicono ***permutazioni*** di tali *n* oggetti tutti i gruppi che si possono formare con gli *n* oggetti dati prendendoli tutti. Se ne deduce allora che le permutazioni semplici differiscono soltanto per l'*ordine* con cui sono disposti gli *n* oggetti distinti contenuti nei vari raggruppamenti. Dalla definizione segue quindi che le permutazioni coincidono con le disposizioni semplici di classe *n*. Il numero delle permutazioni si indica con P_n e il calcolo delle permutazioni è uguale al calcolo del numero delle disposizioni semplici di *n* elementi di classe *n*; in pratica è:

$$P_n = D_{n,n} \Rightarrow P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1$$

cioè: *il numero delle permutazioni di n elementi distinti è uguale al prodotto dei primi n numeri naturali (escluso lo zero).*

Ricorrendo alla definizione di fattoriale, possiamo anche dire che:

il numero delle permutazioni semplici di n elementi distinti è dato dal fattoriale del numero n, ossia:

$$P_n = n!$$

Gli anagrammi altro non sono che le permutazioni che si ottengono da una parola variando solo il posto delle lettere. Ad esempio, con la parola ROMA (composta da 4 lettere) si ottengono $P_4 = 4! = 24$ anagrammi.

16.5 Permutazioni di *n* elementi non tutti diversi

Nel paragrafo precedente abbiamo supposto che gli *n* elementi dell'insieme fossero tutti distinti. Supponiamo ora che di questi *n* elementi ve ne siano α uguali tra loro ($\alpha < n$). Ci proponiamo allora di trovare il numero delle loro permutazioni che indicheremo con $P_{\alpha}^{(n)}$.

Iniziamo con un esempio. Consideriamo la parola ORO che contiene due lettere uguali. Abbiamo visto che il numero di anagrammi di una parola (con lettere tutte diverse) di tre lettere è dato da:

$$P_3 = 3! = 6$$

Nel caso della parola ORO i possibili anagrammi distinti sono soltanto: ORO ROO OOR cioè sono tre e non sei come ci si sarebbe aspettato, cioè sono in numero minore di P_n. In generale, volendo calcolare le permutazioni di *n* oggetti in cui ve ne siano α identici fra loro, si ottiene un numero di permutazioni dato da:

$$P_n^{(\alpha)} = \frac{P_n}{\alpha!} = \frac{n!}{\alpha!}.$$

Nel nostro caso quindi è:

$$P_6^{(2)} = \frac{6!}{2!} = 3.$$

Se poi, data una parola di *n* lettere nella quale una lettera è ripetuta α volte, un'altra β volte, ecc. o, più in generale, dato un insieme di *n* elementi dei quali α sono uguali fra loro, β uguali fra loro, ecc., il numero delle permutazioni distinte con elementi ripetuti che si possono ottenere è dato da:

$$P_n^{(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)} = \frac{P_n}{\alpha!\beta!\ldots\gamma!} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\gamma!}.$$

Ad esempio, se prendiamo in considerazione la parola MATEMATICA, osserviamo che nelle 10 lettere in essa contenute, la lettera M si ripete 2 volte (α = 2), la lettera A si ripete 3 volte (β = 3) e la lettera T si ripete 2 volte (γ = 2). Il numero di anagrammi distinti che si possono costruire con essa è dato da:

$$P_{10}^{(2,3,2)} = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200 .$$

16.6 Combinazioni semplici

Dato un insieme di n elementi, si dicono ***combinazioni semplici*** degli n elementi presi a k a k (o di ***classe k***) $k \leq n$ tutti i gruppi di k elementi, scelti fra gli n dell'insieme dato, in modo che ciascun gruppo differisca dai restanti almeno per uno degli elementi in esso contenuti (senza considerare, quindi, l'ordine degli elementi). Da notare la differenza fra *disposizioni* e *combinazioni* (semplici): mentre nelle disposizioni si tiene conto dell'ordine, nelle combinazioni semplici, invece, si considerano distinti solo quando due i raggruppamenti differiscono almeno per un elemento. Per determinare il numero delle combinazioni semplici di n elementi di classe k, e che indichiamo con il simbolo $C_{n,k}$, ci serviamo della formula:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k}$$

ossia:

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \ldots 2 \cdot 1}$$

Da questa formula si ricava che *il numero delle combinazioni di n oggetti di classe k è dato dal quoziente di k fattori interi, consecutivi, decrescenti a partire da n ed il prodotto di k fattori interi, consecutivi, decrescenti, a partire da k.*

Questa formula può essere scritta anche sotto un'altra forma; infatti, moltiplicando numeratore e denominatore per il fattore $(n-k)!$ si ottiene:

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k \cdot (k-1) \ldots 2 \cdot 1 \cdot (n-k)!}$$

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1}{k \cdot (k-1) \ldots 2 \cdot 1 \cdot (n-k)!}$$

Essendo il numeratore di questa frazione uguale ad $n!$, possiamo scrivere:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Esempio

Quanti ambi si possono formare con i 90 numeri del lotto? Occorre considerare tutte le possibili combinazioni di 90 numeri di classe 2, tenendo presente che l'ordine non ha importanza (ad esempio le coppie (12,2),(2,12) rappresentano lo stesso ambo) e che in un ambo i numeri non si possono ripetere (combinazioni semplici). Quindi si ha: $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{90!}{4!86!} = 4005$.

16.7 Combinazioni con ripetizione

Si possono prendere in considerazione anche le *combinazioni con ripetizione.* Consideriamo un insieme formato da n elementi e fissiamo un numero k (senza alcuna limitazione superiore): ci proponiamo di costruire i possibili raggruppamenti distinti prendendo k elementi dell'insieme dato in modo che:

a) in ciascun raggruppamento figurino k elementi dell'insieme dato potendovi uno stesso elemento figurare più volte fino ad un massimo di k volte;

b) due raggruppamenti sono distinti se uno di essi contiene almeno un elemento che non figura nell'altro, oppure gli elementi che figurano in uno figurano anche nell'altro ma sono ripetuti un numero diverso di volte. Consideriamo, ad esempio, l'insieme:

$$A = \{a, b, c\}.$$

Le combinazioni di classe 2, con ripetizione, sono:

$$(a, a)\ (a, b)\ (a, c)\ (b, b)\ (b, c)\ (c, c)$$

(sono sei). Le combinazioni di classe 3, con ripetizione, sono:

(a, a, a) (a, a, b) (a, a, c) (a, b, b) (a, b, c)
(a, c, c) (b, b, b) (b, b, c) (b, c, c) (a, c, c)

(sono 10). La formula che dà il numero delle combinazioni con ripetizione di n elemento di classe k è:

$$C'_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Nell'esempio precedente si ha:

$$C'_{3,2} = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{3!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

$$C'_{3,3} = \frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

Esempio

Gli unici concorrenti di 4 gare podistiche sono: Mario, Luigi, Franco, Giorgio, Sergio. Ciascuna gara ha come premio una medaglia (le medaglie sono tutte uguali). Considerato che ogni concorrente può vincere più di una medaglia, in quanti modi può avvenire la suddivisione delle medaglie?

Sulle 5 persone, occorre scegliere le 4 con una medaglia a testa, considerato che una persona può essere "ripetuta" un numero di volte uguale al numero di medaglie che prende; non conta l'ordine in quanto le medaglie sono tutte uguali. Si tratta pertanto delle combinazioni con ripetizione di 5 oggetti di classe 4, il cui numero è dato da:

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{8!}{4!4!} = 70.$$

16.8 Coefficienti binomiali e potenza di un binomio

Il numero delle combinazioni semplici, $C_{n,k}$ è spesso indicato con il simbolo seguente:

$$\binom{n}{k}$$

che si legge "n su k" e viene detto ***coefficiente binomiale*** perché se ne fa uso nello sviluppo della potenza di un binomio.

Per definizione è quindi:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Per la convenzione 0! = 1, ha significato anche la scrittura

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

In base a questa nuova definizione possiamo dire che il numero delle combinazioni con ripetizione è dato dalla:

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Consideriamo due numeri reali qualunque a e b. Sono note le formule:

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

e così via. Analizzando il calcolo della generica potenza di un binomio notiamo che tutti gli sviluppi sono dei polinomi omogenei e completi, di grado uguale all'esponente della potenza. Ordinando gli sviluppi secondo le potenze decrescenti di uno dei due monomi, notiamo che i loro coefficienti sono numeri del seguente prospetto che noi chiamiamo *Triangolo di Tartaglia* e che i francesi chiamano *Triangolo di Pascal*:

$$
\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
\mathrm{K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K}\\
\mathrm{K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K}
\end{array}
$$

per la cui costruzione è sufficiente osservare che ogni riga inizia e termina con 1 e gli altri valori si ottengono come somma dei due elementi sovrastanti. Questo triangolo può essere scritto nel modo seguente con lo sviluppo della potenza secondo Newton, il quale, nella sua dimostrazione, fa uso delle combinazioni:

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0}\\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}\\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}\\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}\\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}\\
\mathrm{K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K}\\
\mathrm{K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K\,K}
\end{array}
$$

Sussiste il teorema: *qualunque siano i due numeri a e b e l'intero positivo n, si ha:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \mathrm{K} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

cioè lo sviluppo di $(a + b)_n$ è un polinomio omogeneo di grado n nel complesso delle due variabili a e b che, ordinato secondo le potenze decrescenti di a (e crescenti di b e viceversa) ha per coefficienti i numeri:

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \mathrm{K}\ , \binom{n}{n} = 1\,.$$

Lo sviluppo della potenza del binomio con il metodo di Newton può essere scritto in maniera più compatta nel modo seguente:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\ .$$

Esempio

Si sviluppi la potenza seguente: $(x-2y)^4$.

Si ha:

$$\binom{4}{0}x^4+\binom{4}{1}x^3(-2y)+\binom{4}{2}x^2(-2y)^2+\binom{4}{3}x(-2y)^3+\binom{4}{4}(-2y)^4.$$

Tenendo presente che i coefficienti binomiali che appaiono in questo sviluppo si possono leggere nella quinta riga del triangolo di Tartaglia, si ha:

$$x^4+\mathbf{4}x^3(-2y)+\mathbf{6}x^2(-2y)^2+\mathbf{4}x(-2y)^3+(-2y)^4=$$
$$x^4-8x^3y+24x^2y^2-32xy^3+16y^4.$$

ESERCIZI PROPOSTI

1) Il commissario Basettoni sta finendo il blocchetto delle multe; gli restano solo 4 moduli, ma vede 7 macchine in divieto di sosta (tutte nelle stesse condizioni). In quanti modi può scegliere 4 macchine da multare?
   a) 4!
   b) 28
   c) 210
   d) 35
2) 8 amministratori pubblici vengono condotti a S. Vittore, ove sono disponibili solo 6 celle singole (tutte uguali); in quanti modi si possono scegliere i 6 che avranno la singola?
   a) 56
   b) 28
   c) 6!
   d) 48
3) Quanti sono gli anagrammi, anche privi di senso, della parola "cavalla"?
   a) 5040
   b) 420
   c) 840
   d) 2520
4) Per fare una gita a mare, 5 persone hanno a disposizione 3 canoe singole (uguali fra loro) e due pedalò singoli (uguali fra loro), in quanti modi possono spartirsi le imbarcazioni?
   a) 60
   b) 120
   c) 10
   d) Nessuna delle precedenti è corretta

5) In quanti modi, su 6 studenti, 3 possono occupare gli ultimi 3 posti liberi in un aula d'esame (uno, in prima fila, sotto gli occhi del docente, l'altro in fondo all'aula, e l'ultimo vicino al primo della classe)?
   a) 20
   b) 120
   c) 6^3
   d) 3^6
6) 7 persone si contendono 4 cioccolatini (tutti uguali); ogni persona, se ci riesce, può prenderne più di uno. In quanti modi può avvenire la spartizione?
   a) 35
   b) 840
   c) 210
   d) 2401

7) In una gara ciclistica con 12 atleti, oltre al traguardo finale, c'è un traguardo intermedio (gran premio della montagna); quanti sono i casi possibili dei vincitori dei due traguardi?
   a) 132
   b) 66
   c) 78
   d) 144
8) Sviluppare le seguenti potenze: $(x^2 - 1)^6, (1 + 3x)^4$.

Soluzioni

1) d
2) b
3) b
4) c
5) b
6) c
7) d
8) $x^{12} - 6x + 15x - 20x + 15x - 6x + 1, 81x^4 + 108x^3 + 54x + 12x + 1$

BIBLIOGRAFIA

1. Carcano G., *MATEMATICA, Questionari, Esercizi, Esempi, Richiami teorici,* Spiegel (2001).
2. Cateni L., Bernandi C., Maracchia S., *Geometria Analitica e complementi di Algebra per il liceo scientifico*, Le Monnier, (1987).
3. http://www.isitgofreeschool.it/didattica/upload/doc701/Geometria%20analitica.pdf)
4. http://www.saveriocantone.net/profcantone/matematica/corsorecupero_3sc/Appunti_Traslazione_di_assi_cartesiani.pdf
5. Lamberti L., Mereu L., Nanni A., *Corso di Matematica Uno*, Etas Libri, (1996).
6. Lamberti L., Mereu L., Nanni A., *Nuovo Matematica DUE*, Etas Libri, (1992).
7. Lamberti L., Mereu L., Nanni A., *Nuovo Matematica TRE*, Etas Libri, (1992).
8. Lamberti L., Mereu L., Nanni A., *Nuovo Matematica UNO*, Etas Libri, (1992).
9. Malafarina G., *Matematica per i precorsi*, McGraw-Hill, (2007).
10. N. Fusco, C. Sbordone, M. Tassalini, *Dimensione matematica, Corso di algebra, geometria e informatica*, Loffredo editore.
11. Poggi Bianchini C., Cecchini M.C., *Algebra I*, Etas Libri, (1988).
12. Poggi Bianchini C., Cecchini M.C., *Algebra II*, Etas Libri, (1988).
13. Scaglianti L., Varagnolo L., *Lezioni di Matematica: Geometria*, (1993).
14. Zwirner G., Scaglianti L., Brusamolin Mantovani A., *Il mondo della Matematica 1,* CEDAM, (1995).

ITALIANO E COMPRENSIONE VERBALE

A cura di
prof. Stefano Morabito

Si dichiara che il presente elaborato è originale e che è stato predisposto in funzione dell'attività formativa relativa ai Percorsi di potenziamento delle competenze di base anno 2009

La finalità di ogni lingua, già ad un'analisi di tipo intuitivo, è quella di comunicare qualcosa, di trasmettere informazioni e messaggi. Potremmo dire che la sua stessa esistenza consiste nel realizzarsi, nel vivere, attraverso la produzione di messaggi verbali o, per maggiore precisione, di **atti linguistici** e **testi.** Tuttavia, trasmettere ad altri attraverso la lingua verbale scritta o parlata (o trasmessa: radio , televisione, etc.) ciò che pensiamo o desideriamo comunicare diventa un messaggio verbale quando si concretizza in un atto linguistico o in un testo di una lingua che è il risultato di una serie di operazioni che obbediscono ad un **codice**, quello che governa il funzionamento della lingua in cui tale atto linguistico viene realizzato.

Queste operazioni, che chi parla compie simultaneamente e per lo più senza rendersene conto, sono:

a) la scelta di parole, cioè l'unione di fonemi consentita dal codice della lingua, dotate di un significato;

b) l'uso di tali parole in base al loro significato;

c) l'organizzazione logica di tali elementi secondo le norme del codice della lingua.

Solo rispettando tali condizioni è possibile che si determini la comunicazione. Infatti, è proprio il rispetto di tali norme che permette anche all'ascoltatore, o al lettore, di comprendere e decifrare il messaggio.

Se infatti mettessimo alla rinfusa, attraverso un puro atto meccanico e casuale, una serie di fonemi più o meno articolata, es. *olos, tila, libiessop, ndotteapsir, zoidinocni, è, hec, is al zianomucconie, etedrmin* non avremmo alcuna parola dotata di significato. (vedi a)

Neppure rispettando la sola regola indicata al punto a) , se non si osservano le altre, otteniamo un messaggio. Così si può vedere dall'accostamento casuale di parole che seguono: *condizioni si comunicazione tali è che solo la rispettando possibile determini.*

È necessario, dunque, che si soddisfino almeno i tre requisiti indicati sopra perché si possa parlare di un atto linguistico che sia un messaggio comprensibile come, ad esempio, la frase: "Solo rispettando tali condizioni è possibile che si determini la comunicazione".

Le norme che reggono il codice di una lingua si arriva a possederle, almeno quelle fondamentali, per acquisizione, come fa, ad esempio, il bambino fin dai primissimi anni di vita semplicemente ascoltando e vivendo in un contesto in cui si usa la lingua, o per apprendimento: ascoltando chi parla, utilizzando la lingua, leggendo e studiandone le strutture, le funzioni e le norme che le regolano. Delle norme che regolano il funzionamento di una lingua si occupa la **grammatica**.

Si tratta di una disciplina nata nel III secolo a. C in Grecia come strumento di conoscenza dei testi letterari e guida per capire i meccanismi espressivi della pagina scritta ed infine imitarli seguendo il modello degli autori di maggiore prestigio.

Tradizionalmente, la grammatica ha avuto tra i suoi obbiettivi la descrizione di una lingua (delle sue caratteristiche e dei suoi elementi costitutivi) in un momento specifico (grammatica descrittiva) e anche l'individuazione e la selezione delle norme d'uso della stessa con lo scopo di creare un *corpus* di regole cui è necessario attenersi per il corretto uso della lingua (grammatica normativa).

Una lingua non è però un blocco granitico e immutabile; essa è il risultato di una evoluzione storica e di determinati usi. Ciascuna lingua vive in un proprio spazio sociale, culturale, storico.

Anche analizzando una lingua attraverso la lente del semplice buon senso, scopriamo che non è la stessa la lingua che si parla in una determinata epoca che quella utilizzata in un'altra. Né parlano alla stessa maniera un medico, un notaio, un professore universitario, che un manovale, un marinaio o un presentatore radiofonico. Né tantomeno, anche analizzando categorie sociali omogenee, sarà identica la lingua parlata da un notaio di una determinata regione e quella di uno proveniente da una regione diversa.

Se, da un lato, dunque, possiamo parlare di "una lingua" ed "una **norma**", cioè analizzarla come un tutto "chiuso", dall'altro dobbiamo introdurre il concetto di **variazione.**

Una lingua non esiste se non nell'uso che ciascun parlante ne fa e ogni parlante, lo constatiamo quotidianamente, usa il linguaggio in maniera diversa da un altro. Tutti noi abbiamo sperimentato come conosciamo un determinato numero di parole e di espressioni che abbiamo acquisito all'interno del nostro nucleo familiare e che vengono utilizzate in esso come sapere condiviso, ma che in molti casi non ci avventuriamo a trasmettere al di fuori di esso; e così anche un determinato repertorio di usi che condividiamo con gruppi più o meno ristretti: appassionati di uno sport, colleghi di lavoro, etc. Sappiamo anche che alcuni di questi usi specifici difficilmente potranno essere compresi da persone che non ne condividono l'impiego; in alcuni casi, addirittura possono impedire la comunicazione e risultare del tutto inintelligibili. Un avvocato, ad esempio, potrà parlare tranquillamente di *rogatorie*, *soccombenza*, *negozio giuridico* con altri avvocati, ma questi saranno termini incomprensibili per un matematico o un pilota automobilistico che, a loro volta, disporranno di un linguaggio specifico nel quale il gruppo cui appartengono si riconoscerà immediatamente. Lo stesso discorso vale per le varietà regionali e per quegli usi della lingua che connotano socialmente chi parla. Alcune di queste variazioni rendono difficile la comunicazione e in alcuni casi la impediscono; altre, fortunatamente non la intralciano.

In modo alquanto sintetico, dobbiamo, quindi, distinguere diversi tipi di variazione e, nel farlo, ci riferiremo alla lingua che tutti condividiamo, l'italiano.

Variazione *diatopica*

Ogni lingua, e così l'italiano, presenta maggiori o minori differenze a seconda della zona o della regione in cui essa viene parlata. L'italiano parlato oggi nel nostro paese non è uniforme, ma varia da regione a regione (*diá tópos*; in greco: "attraverso" e "luogo"). Non stiamo parlando dei dialetti, ma del modo in cui l'italiano viene parlato quotidianamente, per cui possiamo parlare di "varietà regionali" di italiano o di "italiani regionali". Le differenze si ritrovano specialmente sul piano fonetico. La nostra lingua dispone di sette vocali, cui corrispondono 5 segni grafici *(a, e, i, o, u*). Ebbene, sarà molto difficile per un settentrionale o per un meridionale distinguere tra la *e* aperta e la chiusa, e così per la *o*; operazione che riesce certamente più naturale ad un toscano o comunque ad un cittadino del centro d'Italia.

Altre differenze di questo tipo riguardano il piano sintattico e quello lessicale, cioè, rispettivamente, la disposizione e l'uso delle parole. Forme come *tengo famiglia* o la costruzione del complemento oggetto animato con la preposizione *a - Ascolta a tuo padre*- sono di provenienza tipicamente meridionale; allo stesso modo, farsi del tipo *La Maria è una brava ragazza*, o *Decidi te dove andare stasera*, consentono di individuare l'appartenenza del parlante ad una regione settentrionale. Queste realizzazioni regionali si collocano in una posizione intermedia tra i due estremi rappresentati dalla **lingua comune** o italiano standard ed i dialetti, ma non possiamo dimenticare che la maggior parte degli atti linguistici che si producono nel nostro paese vengono realizzati in una di queste varietà regionali della lingua, tanto da indurre molti studiosi a sostenere che, in rigore, gli italiani regionali siano la vera lingua parlata in Italia.

È, infatti, un dato che ognuno di noi può trarre dalla propria esperienza quotidiana il fatto che, sentendo parlare una persona "in italiano", riusciamo, con una certa facilità, a stabilire la provenienza geografica della stessa. Il fenomeno interessante da osservare è che le varietà diatopiche possono dividere una stessa regione, per effetto dell'influenza della diversa situazione dialettale. Generalmente, i tratti più evidenti sono quelli fonetici, mentre meno nette sono le differenze a livello lessicale e sintattico. Dobbiamo però notare, anche, che vi è un continuo passaggio di forme, a livello lessicale, dall'italiano regionale a quello standard. A tali fenomeni hanno contribuito le migrazioni interne e la diffusione dei mezzi di comunicazione di massa, che hanno fatto sì che forme prima appartenenti a varianti regionali siano entrate a pieno titolo nel lessico comune. A modo di esempio, potremmo ricordare che dal **piemontese** sono entrate nel lessico comune parole come *grissino*,

arrangiarsi,

gianduiotto,

cicchetto (nel significato di “ramanzina”),

rimprovero,

riga (nel significato di “scriminatura”);

dal **Lombardo**

balera,

barbone,

bollito,

fiacca,

panettone,

paparino,

risotto,

sberla;

dal **genovese**

abbaino,

acciuga;

dal **veneto**

calle,

gondola,

ciao;

dal **toscano**

pizzicagnolo,

scazzottare,

dal **napoletano**

pizza,

mozzarella,

camorra,

scugnizzo,

omertà,

scocciatore,

spocchia,

sciantosa,

pastiera;

dal **siciliano**

cassata,

cannolo,

mafia,

intrallazzo;

dal **romano**

bullo,

bustarella,

dritto (nell'accezione di "furbo")*,*

iella,

lagna,

locandina,

macello (nel significato di "strage", "disastro"),

menare (con il significato di "picchiare")

pappagallo (corteggiatore invadente)

pataccaro (imbroglione, truffatore)

rimediare (con il significato di "ottenere")

scippo

tardona (scherzoso: donna attempata che ostenta abbigliamento e modi giovanili)

Vediamo dunque come, attraverso i secoli le parole di origine dialettale hanno contribuito ad arricchire il nostro lessico. Questo fenomeno si è intensificato soprattutto nel novecento, sia perché ci si è progressivamente allontanati dal conservatorismo delle grammatiche normative, e quindi molti elementi sono stati ammessi oppure hanno smesso di essere considerati come errori da cui depurare l'italiano "corretto" sia per la diffusione dei mezzi di comunicazione e degli scambi e contatti interni alla popolazione, il turismo, le comuni esperienze di lavoro, la generalizzazione delle abitudini alimentari etc.

È da segnalare, tuttavia, come la capacità di parole provenienti dai dialetti di penetrare nel lessico comune dipende anche dal loro "prestigio". Si tratta di una questione importante, perché il prestigio di un determinato uso linguistico è un elemento fondamentale per spiegare anche l'adozione della "norma" linguistica, come vedremo più avanti.

Per l'italiano regionale, si adotta una divisione "diatopica" che coincide, nell'essenziale, con la distribuzione delle aree dialettali. Possiamo, dunque, riconoscere cinque aree fondamentali o meglio, cinque varietà diatopiche fondamentali di italiano:

- un italiano regionale **settentrionale**
- un italiano regionale **toscano**
- un italiano regionale **centrale**
- un italiano regionale **meridionale**
- un italiano regionale **meridionale estremo**[1]

Il linguista Tullio De Mauro distingue il diverso grado di prestigio, assegnando il primato alla varietà settentrionale e il minimo prestigio a quella meridionale. Il toscano, poi, essendo la parlata che più si avvicina alla lingua letteraria, che deriva proprio dal toscano del trecento, ha avuto sempre una posizione di privilegio. Ancora oggi si ritiene che Firenze sia la città dove si può imparare a conversare nella lingua migliore. Il romano, dal canto suo, si è affermato per una serie di ragioni di indubbia rilevanza. Roma è non solo una grande città e la sede politica della nazione, ma è anche la capitale dello spettacolo. Essendo uno dei centri di maggiore contatto tra persone provenienti da ogni angolo del Paese, si è mostrata assai ricettiva e permeabile nei confronti degli apporti linguistici provenienti da altre regioni, accogliendoli all'interno della propria parlata, ma è riuscita anche ad influenzare in maniera notevole le altre varietà diatopiche, attraverso il cinema, la radio, la televisione.

---

[1] Un riferimento a parte meriterebbe la variante **sarda**, dotata di caratteristiche particolari e distintive rispetto alle altre. Uno degli aspetti più conosciuti è la posizione del complemento o dell'attributo che precedono il verbo. Si vedano, ad esempio, frasi del tipo *Sardo sono;* oppure *Antipasti vogliamo*. Si tratta di un fenomeno che rientra nella correttezza grammaticale dell'italiano standard e che viene definito *dislocazione a sinistra*. Tuttavia, mentre tale uso in italiano serve a dare enfasi, a sottolineare cioè l'importanza comunicativa dell'elemento che viene dislocato a sinistra, nella variante sarda ha un valore del tutto neutro.

Molte parole, alcune già elencate sopra tra le diverse varietà regionali, sono state accolte nel vocabolario comune dopo essere passate attraverso la varietà romana dell'italiano pur avendo un'origine, in molti casi, meridionale. Valgano, come esempio, le seguenti:
abbioccarsi, borgata, caciara, cazzata, fanatico, fasullo, frocio, inghippo, intrallazzo (che avevamo già catalogato tra le parole di origine siciliana), *lagna, lenza, locandina, menare, pallonaro, pappagallo, pappagallismo, pataccaro, puzzone, scapicollarsi, scippo, scorfano, scostumato, sorci verdi, spopolare, spupazzare, strazio, stronzo, tardona, tombarolo*, etc.

La variabilità diastratica

I diversi gruppi sociali usano la lingua in modo differente. La pronunzia, la sintassi, il lessico utilizzato risente fortemente della collocazione sociale di chi parla. Secondo questa distinzione, la lingua delle classi alte sarebbe caratterizzata da una buona forma, dalla propensione ad utilizzare toni e vocaboli moderati, rispettosi delle formule di cortesia. È indubbio che l'alta collocazione all'interno degli strati sociali, si associa, con maggiore frequenza, a più elevati livelli di istruzione, e perciò la lingua adoperata presso simili collettivi sociali riesce a sollevarsi più facilmente dalle determinazioni regionali e si avvicina alla più depurata norma standard quando non agli usi colti e letterari della lingua.

All'estremo opposto troviamo la lingua popolare, meno ligia alle regole grammaticali, o incapace di osservarle; fortemente influenzata dai dialetti locali, caratterizzata dal frequente ricorso ai proverbi, alle frasi fatte etc.

Si tratta dell'italiano parlato e scritto da quanti normalmente utilizzano il dialetto e conoscono l'italiano comune in modo approssimativo. È a questa varietà che possono essere ricondotti i più comuni errori di morfologia, sintassi, punteggiatura e proprietà lessicale che commette chi ha una scarsa padronanza dell'italiano e lo utilizza essenzialmente in situazioni formali, tentando di adeguarvisi. Caratteri tipici di tale varietà sociale dell'italiano sono:

- l'uso errato dei pronomi personali e dei possessivi: "A *me mi* piace"; *"Ci* ho detto alla signora di aspettare"; "I nostri amici ci hanno presentato i *suoi* parenti"
- l'uso errato dei pronomi relativi: "Questo è il ragazzo *che* ti ho parlato".
- l'uso errato delle forme sintetiche comparative: "Vorrei qualcosa di *più migliore* di questo".
- L'uso errato delle forme e dei modi verbali: "*Vadi* pure avanti lei"; "L'anno venturo *andiamo* anche noi al mare"; "*Se mi avviseresti,* verrei in tempo" ; "*Io speriamo che me la cavo*" etc.

- La povertà lessicale estrema, che induce il parlante a ripetere le stesse parole, o gruppi di parole: “Mi *alzo* alle sette. *Poi*, dopo essermi *alzato*, mi lavo la faccia. *Poi mangio* e dopo *mangiato* sveglio il mio fratellino. *Poi ci* preparo la colazione anche a lui e *poi* mentre il mio fratellino *mangia*, io metto via *tutto*. Poi, fatto *tutto*, usciamo” .
- L’uso della punteggiatura che oscilla tra l’eccesso e la totale assenza.

Valga, come esempio straordinario di italiano popolare, il seguente frammento tratto da *Terra Matta*, di Vincenzo Rabito, autore semianalfabeta, autentico fenomeno editoriale degli ultimi anni:

“ I tempe erino miserabile, li nostri parente erino miserabile come noie. E quinte, non zi poteva antare avante in nessun modo.

Quinte, io fui nato per fare una mala vita molto sacraficata e molto desprezata. Quinte, mia madre era con la stessa mentalità di mio padre, che non voleva antare arrobbare per campare i suoi figlie, e neanche mia madre voleva fare la butana, come tante famiglie che fanno tutte le porcarieie per potere sfamare i suoi figlie, mentre mia madtre voleva antarere avante onesta amente.

Io era picolo ma era pieno di coraggio, con pure che invece di antare alla scuola sono antato allavorare da 7 anne, che restaie completamente inalfabeto…”

Se è più complicato dare una descrizione delle caratteristiche dell’italiano in uso presso le classi colte, dato che tende a coincidere con l’italiano standard, è necessario, però, segnalare che la variazione diastratica può fare riferimento non solo ai diversi livelli sociali, ma anche a diverse fasce della società nelle quali vi sono differenze di generazioni (il linguaggio giovanile) di professioni (i manager, i venditori, i medici, gli avvocati) di orientamento politico (il *sinistrese*, il *sindacalese*) e i gerghi.

Le varietà diafasiche

Ognuno di noi utilizza la lingua in modo diverso a seconda della circostanza che si trova a fronteggiare. Non parliamo allo stesso modo con un gruppo di amici o a tavola in famiglia, che con sconosciuti o durante un esame scolastico o universitario. Nei primi casi il controllo che eserciteremo sulla nostra lingua, su quello che diciamo o scriviamo, sarà minore, più lasso che nelle altre due situazioni. Si pensi alla differenza tra una lettera o una cartolina scritta ad un amico ed una lettera di tipo commerciale. Alcune di queste varietà dipendono dal tipo di interazione che si instaura tra produttore e recettore e dal ruolo reciproco che entrambi vi svolgono, altre dipendono invece in maniera preponderante dall’argomento del discorso o dall’ambito cui si riferisce lo stesso.

Utilizzeremo per le prime il termine “registro”, mentre per le seconde il termine “sottocodici” o “lingue speciali”.

Il *Dizionario pratico di grammatica e linguistica* edito da De Agostini suggerisce, per esemplificare i registri linguistici, la tabella che riproduciamo più sotto:

registro	**livello**	**situazione**	**interlocutore**	**Applicazione**
AULICO O SOLENNE	alto e formale	ufficialità, rapporti pubblici	Uffici, superiori, pubblico di cerimonie	Discorsi, omelie, celebrazioni, arringhe, prolusioni, motivazioni
COLTO	alto	Rapporti di studio o professonali	Colleghi, studenti, lettori specialisti, ascoltatori esperti, insegnanti	Lezioni, articoli, saggi, libri, relazioni, congressi, rapporti su ricerche
BUROCRATICO	formale	Pratiche di uffici pubblici	Impiegati, funzionari, agenti, vigili, utenti	Modulistica, domande, certificati, circolari, bandi, avvisi, codici, regolamenti
MEDIO	Comune, standard	Relazioni sociali, comunità di scuola o di lavoro, sanitari, politici	Colleghi , amici, conoscenti, superiori, allievi, assemblee	Discorsi quotidiani, giornali, trasmissioni televisive, lettere, resoconti
COLLOQUIALE	Medio, inferiore	Colloqui, conversazioni, riunioni del tempo libero, feste, vacanze	Amici, compagni, conoscenti, compagni di viaggio	Brevi lettere, biglietti, dialoghi, copioni televisivi, canzonette
INFORMALE, FAMILIARE	Medio, inferiore	Discorsi improvvisati, conversazioni in famiglia, al bar	Persone con cui si è in confidenza, persone di servizio, parenti	Comunicazioni rapide, discussioni in casa, litigi, manifestazioni, telefonate
CONFIDENZIALE, INTIMO	medio	Colloqui, confessioni, dichiarazioni d’amore, sfoghi di stati d’animo, rievocazioni, pronostici, previsioni, complotti	Amici del cuore, fidanzati, confidenti, consiglieri, psicanalisti, compagni d’arme o di partito	Lettere private, diari, rapporti intimi, messaggi segreti, confessioni
POPOLARE	Medio	Mercati, bar,	Familiari,	Modi di dire,

		feste e fiere, cortili, lavori manuali, cortei, trattorie	compagni di lavoro, avventori, venditori di piazza, comitive, club tifosi	slogan, mercanteggiamenti, litigi, giochi, teatro dialettale, farse

Non vi è accordo riguardo alla terminologia da utilizzare per designare le diverse sfumature nella scala dei registri. Possiamo infatti trovare altre catalogazioni in cui, oltre a quelle riportate nella tabella appena esposta possiamo trovare termini quali "poetico", "pomposo", "ricercato", "disimpegnato" e via degradando fino a "trasandato" e volgare" . Quale che sia la terminologia che si utilizzi troveremo al primo estremo un maggiore controllo formale della lingua e delle sue strutture; periodi di grande complessità, particolare ricchezza e persino ricercatezza lessicale, con alta frequenza di termini dai significati astratti. Dall'altro, minore controllo, orazioni centrate sul pronome di prima persona "io", ripetizione di parole, minore articolazione sintattica.

I due poli di riferimento, per le variazioni di registro sono rappresentati dalla formalità e dall'informalità, con cui si intersecano altri elementi che concorrono a determinare il registro. Ad esempio, "solenne" opposto a "volgare" ed "eufemistico" opposto a "disfemistico". Dato che la scelta del lessico ha una valenza fondamentale nelle variazioni di registro proveremo a descrivere, in relazione a queste coppie di opposti, una serie di espressioni che designano il "morire", inteso come termine mediano, neutro, a metà strada, dunque tra il formale e l'informale, il volgare e il solenne, privo di connotazioni eufemistiche (o, naturalmente, disfemistiche). Con "morire" il parlante vorrà trasmettere, potremmo dire un'informazione "oggettiva", depurata da altre considerazioni o finalità che possono intervenire nella comunicazione.

Troveremo dunque espressioni tali come *rendere l'anima a Dio*, *essere tolto ai propri cari, esalare l'ultimo respiro, salire al cielo,* che potremmo definire, molto solenni, formali ed eufemistiche; *andare all'altro mondo* sarebbe invece informale, lievemente eufemistico, però intermedio tra solennità e volgarità; *lasciarci, spegnersi, estinguersi* sono invece molto formali e dotati di un grado decrescente di solennità ed eufemismo; *spirare* è un po' più solenne e formale di *morire; crepare*, infine, si troverebbe all'estremo caratterizzato da maggiore informalità, volgarità e disfemismo.

Ne risulta, approssimativamente, uno schema di questo tipo:

	formale	informale	Solenne	volgare	eufemistico	disfemistico
Rendere l'anima a Dio	+ + +	- - -	+ + +	- - -	+ + +	- - -

Chiudere i propri giorni	+ +	- -	+ + +	- - -	+ + +	- - -
Essere tolto ai propri cari	+ +	- -	+ +	- - -	+ + +	- - -
Esalare l'ultimo respiro	+ +	- -	+ +	- - -	+ +	- -
Salire in cielo	+ +	- -	+ +	- - -	+ +	- -
Passare a miglior vita	+ +	- -	+ +	- - -	+ +	- -
Lasciare questo mondo	+ +	- -	+ +	- - -	+ +	- -
Cadere	+ +	- -	+ +	- - -	+ +	- -
Trapassare	+	-	+	- -	+ +	- -
Lasciarci	+ +	-	+	- -	+ +	- -
Spegnersi	+	-	+	- -	+ +	- -
Defungere, perire, spirare	+	-	+	- -	+ +	- -
Perdere la vita	+	-	+	- -	+	-
Scomparire	+	-	+	-	+	-
Estinguersi	+	-	+	-	+	-
Decedere	+	-	+	-	+	-
Mancare	+	-	+	-	+	-
Morire						
andarsene	-	+	-	+	-	+
Andare all'altro mondo	-	++	-	+		+
Rimanerc i	- - -	+ + +	-	+	-	+
Lasciarci la pelle	- - -	+ + +	- - -	+ + +	- -	+ +
Lasciarci le penne	- - -	+ + +	- - -	+ + +	- -	+ +
Tirare le cuoia	- - -	+ + +	- - -	+ + +	- -	+ +
Crepare	- - -	+ + +	- - -	+ + +	- - -	+ + +

Bisogna, infine, notare come alcuni dei termini riportati in tabella sono poi utilizzati in special modo in determinati campi d'uso: *cadere* è tipico del "morire in guerra " o per la difesa dello stato; *perdere la vita* appartiene alla cronaca giornalistica, mentre *salire in cielo* a contesti ecclesiastici*;* *decedere* è proprio anche del linguaggio burocratico.

Variazione diamesica

Anche nell'uso della stessa lingua da parte di un medesimo parlante, registriamo variazioni notevoli a seconda del mezzo usato nel comunicare il messaggio. La variazione diamesica fondamentale è quella tra **parlato** e **scritto.**

Ad una prima, superficiale considerazione potremmo sostenere che nel parlato si può incontrare minore rigidità nell'osservanza delle cosiddette regole, la preferenza per la coordinazione piuttosto che per la subordinazione, il richiamo di forme dialettali e un livello generalmente colloquiale e tendenzialmente privo di costruzioni difficili. Un testo scritto non avrà le ripetizioni e la ridondanza che sono tipiche dell'orale, mentre nel parlato saranno frequenti le interruzioni, le riprese, le correzioni e i cambiamenti di costruzione.

Caratteristica del discorso orale è , infatti, l'assenza di premeditazione, di organizzazione previa del discorso, oltre alla presenza fisica, faccia a faccia, dell'interlocutore. In ogni caso, non è possibile stabilire una distinzione troppo netta tra i due estremi, ma si dovrebbe , piuttosto, parlare di un *continuum* con variazioni progressive. Possiamo però individuare due polarità estreme che fungano da modelli di riferimento: il **parlato prototipico** e lo **scritto prototipico**, definiti anche parlato-parlato e scritto-scritto.

Le caratteristiche generali del parlato prototipico sono le seguenti:

- elaborazione in tempo reale
- compresenza di parlante ed interlocutore
- legame con il contesto di produzione e di ricezione
- evanescenza dell'enunciato
- irreversibilità della formulazione
- impossibilità dell'ascoltatore di tornare indietro
- ordine e tempo di ascolto obbligati
- impossibilità di verifica

Esempio di parlato:

[Nel tuo tempo libero, cosa fai?]

Eh, io sto in un gruppo-…che-e…siamo studenti nelle…più che altro studenti del liceo ma anche…universitari…che- facciamo assistenza…assistenza sociale, insomma…nei quartieri popolari più che altro, nelle bborgate di Roma o anche a Trastevere, così… con degli anziani, con persone anziane che hanno problemi…degli anziani poveri, insomma…e con… cerchiamo di fare…

delle scuole popolari anche con… con dei bambini che hanno più problemi scolastici così, anche problemi familiari… genitori analfabeti e cose di… così, di questo genere.

Berruto, varietà diamesiche, diastratiche, diafasiche, in Sobrero, Introduzione all'italiano contemporaneo. La variazione e gli usi, Laterza 1993:41-2)

Al contrario, lo scritto prototipico possiede le seguenti caratteristiche:

- pianificazione del testo
- distanza tra lo scrivente e il lettore
- autonomia dal contesto di produzione e di ricezione
- permanenza del testo
- possibilità di correzione
- possibilità del lettore di muoversi avanti e indietro sul testo
- tempi liberi di fruizione
- possibilità di controllo delle affermazioni

Modalità intermedie tra scritto e parlato

Al sistema fonico-auditivo proprio del parlato si riconducono, però, altre forme particolari dell'oralità, prive degli attributi di spontaneità e di immediatezza indicati sopra e che rispondono a particolari tipi codificati di conversazione. Pensiamo al parlato-scritto proprio dei comunicati radiotelevisivi o di una lezione universitaria, di una conferenza di un discorso pubblico precedentemente preparato, scritto o schematizzato.

Tra le diverse tipologie di parlato possiamo rinvenire il dialogico (si pensi al comportamento di un professore e di un alunno in occasione di un esame); il parlato letto : si pensi al caso di letture di testi scritti, per lo più, da altri, come canti, preghiere, letture ad alta voce, recitazioni teatrali, o di poesie. In questi casi è necessario notare che, se mancano i caratteri della spontaneità e della mancanza di previsione, vi è certamente, però, l'apporto originale dell'interpretazione personale, della gestualità, dell'intonazione della voce.

La lingua trasmessa

A scritto e parlato recentemente la linguistica (Sabatini) ha aggiunto il **trasmesso**: è un linguaggio specifico sorto dalla diffusione dei nuovi mezzi di comunicazione a distanza (radio, televisione, ma anche il telefono –fisso e, ora, cellulare-). Quindi, una modalità comunicativa propria di mezzi che comunicano a distanza con la voce, che ha alcune caratteristiche in comune con il parlato (l'uso della voce, combinazione con codici non verbali come espressioni, gesti) e altre in comune con lo scritto (grande distanza spaziale e temporale, possibilità di far pervenire il messaggio a grandi quantità di persone, comunicazione ‘a senso unico’, monodirezionale e non bidirezionale come nel parlato).

Ora si parla anche di scritto trasmesso, proprio di mezzi che comunicano a distanza con modalità particolari come quelle della scrittura elettronica: internet, posta elettronica, sms, chat-line.

trasmesso parlato:

radio, tv, telefono

Tenendo presente l’ inventario di tratti scritto/parlato, si nota che i mezzi di trasmissione a distanza realizzano combinazioni del tutto inedite tra polarità che normalmente si escludono e danno luogo a modalità di comunicazione diverse e composite rispetto a scritto e parlato. Il parlato trasmesso mostra alcune coincidenze con il parlato faccia a faccia:

- si utilizza la voce, con tutti i suoi effetti
- si può trasmettere l’immagine di chi parla e si può utilizzare il linguaggio gestuale e mimico
- il messaggio scorre per l’udito e la vista del ricevente e poi svanisce

ma anche coincidenze con lo scritto:

- il messaggio, se registrato, può essere utilizzato altre volte
- nella maggior parte dei casi la comunicazione è unidirezionale
- emittente e ricevente sono in luoghi diversi
- si comunica contemporaneamente a un alto numero di persone.

La comunicazione parlata trasmessa si attua secondo modalità diverse rispetto a quelle delle due forme storiche, in quanto partecipa contemporaneamente di alcuni aspetti dell’una e dell’altra, ma non presenta né la condizione della compresenza degli interlocutori in una situazione spazio-temporale reale, propria solo del parlato faccia a faccia, né quella della stabilità visiva del messaggio linguistico, propria della comunicazione scritta.

Tramite i mezzi di trasmissione a distanza sono resi possibili eventi comunicativi molto complessi e sofisticati in cui si incrociano lontananza spaziale ed estraneità dei parlanti con dialogicità e privatezza, o estraneità ed extrasituazionalità con libertà tematica e spontaneità nell’enunciazione, o addirittura si annullano alcune opposizioni, come quella fra sfera privata e sfera pubblica. Con l’intervento del telefono, inoltre, la comunicazione non è più unidirezionale: il ricevente può comunicare contemporaneamente con l'emittente e quindi modificare lo svolgimento della trasmissione delle informazioni.

trasmesso scritto

I nuovi media, rendendo disponibili molti strumenti di interazione telematica (accesso al Web, chat on line, videoconferenza, e-mail, newsgroup) e telefonica (Short Message Service o SMS), offrono possibilità ancora diverse di commistione fra scritto e parlato e innovative prospettive di analisi del trasmesso nella sua modalità scritta.

siti web

informazione giornalistica

e-mail /newsgroup

chat

forum

sms

Scrittura elettronica, varietà di generi ma elementi comuni: mobilità, scarsa correzione, brevità, ridotta subordinazione, sigle, riduzione punteggiatura, simulazione del parlato.

Internet: ipertesto; densità lessicale; importanza aspetto grafico; influsso inglese; frasi brevi; stile nominale.

Posta elettronica: scrittura più vicina alla telefonata che alla lettera; scarsa pianificazione, non rilettura, impaginazione poco curata; errori grafici; riduzione maiuscolo; riduzione segni interpuntori; frasi brevi, coordinazione

Chat/SMS: emoticon, sigle e abbreviazioni; uso di numeri e segni al posto di lettere; linguaggio cifrato

L'Italiano standard

L'italiano comune è la lingua italiana così come si è venuta conformando attraverso l'uso quotidiano. Si tratta di uno strumento espressivo che, superando le varietà regionali (diatopiche) e anche le varietà funzionali (diafasiche) e sociali (diastratiche) della lingua parlata in Italia, risulta comune a tutti gli italiani e rende pertanto possibile la comunicazione tra tutti gli abitanti del nostro paese, adeguandosi alle diverse esigenze della vita sociale.

Questa lingua *standard* non coincide con nessuna delle varietà parlate in alcun luogo del nostro territorio ma è la lingua in cui tutti si riconoscono e nella quale tutti aspirano ad esprimersi per essere compresi. È la lingua, per intenderci, nella quale si esprimono i giornali e le riviste, quella che si insegna a scuola ed in base alla quale si tentano di correggere le deviazioni più gravi ed immotivate ed è la lingua dei grandi mezzi di comunicazione di massa.

Alcuni elementi di grammatica italiana

Nella trattazione di questo modulo trascureremo la fonologia per concentrarci soltanto su alcuni elementi grammaticali , specialmente sintattici e lessicali nei quali il parlante medio è solito riscontrare le maggiori incertezze riguardo all'uso. Ci occuperemo, pertanto, di punteggiatura ed ortografia, della sintassi delle frasi complesse – in particolar modo della vigenza e attualità del congiuntivo- e della rete di relazioni che si stabiliscono tra le parole, e tra parola e significato.

La punteggiatura

In molti casi, la punteggiatura, segnalando la scansione logica del discorso, è addirittura un elemento fondamentale per capire il senso di una frase.

Il punto

- Segna una pausa o uno stacco netto: isola una frase dall'altra, indicando il passaggio da un momento del discorso a un altro.
- Se tra due frasi o gruppi di frasi lo stacco è molto marcato, dopo il punto si va a capo.
- Il punto fermo si usa anche per indicare l'avvenuto accorciamento di una parola e, quindi, nelle abbreviazioni: *ecc.* (= eccetera), *seg.* o *s.* (= seguente), *pag.* o *pagg.* (= pagina o pagine), *cap.* o *capp.* (= capitolo o capitoli), *prof.* o *proff.* (professore o professori).
- Nelle **sigle:** E.N.I. (= Ente Nazionale Idrocarburi); D.L. (= Decreto Legge); G.U. (= Gazzetta Ufficiale).

Eccetto che:

- Nelle sigle molto diffuse (CONI; CONSOB; FIOM), che possono essere lette senza difficoltà, come vere e proprie parole.
- In quelle che sono diventate vere e proprie parole, come Rai e Fiat.

La virgola

In particolare, viene usata:

- Nelle enumerazioni e nelle descrizioni per separarne gli elementi: “Ho bisogno di pane, burro, olio e frutta”; “Era un uomo alto, magro, piuttosto curvo di spalle e leggermente strabico”.
- Per separare frasi coordinate per asindeto: “Il nonno è originario di Roma, la nonna invece è nata a Napoli”. Se le frasi collegate per asindeto sono più di due l’ultima, generalmente, è preceduta dalla congiunzione **e**: “Si alzò, si lavò in fretta, si truccò il viso, fece una rapida colazione e uscì”.
- Dopo un vocativo e, se questo è inserito nel corpo di una frase, anche davanti ad esso: “Paolo, ricordati di andare a trovare la zia”; “Ricordati, Paolo, di andare a trovare la zia”.
- Prima e dopo un inciso o un’apposizione: “Antonio, lo zio di Laura, è un ingegnere”; “L’uomo, preoccupato e teso per l’incertezza di una situazione, non riusciva a spiccicare parola”; “Quel locale, dicono, è piuttosto malfamato”.
- Dopo le congiunzioni *infatti, di fatto, in effetti:* “Antonio si è procurato uno strappo muscolare. Infatti, domenica non giocherà” (*Domenica, infatti, non giocherà*).
- Per separare una proposizione da una coordinata introdotta dalle congiunzioni *ma, però, tuttavia, anzi*, nelle proposizioni coordinate: “Non sto bene, ma devo partire lo stesso”
- Per separare dalla principale una frase subordinata introdotta da *benché, sebbene, anche se, per quanto, poiché, giacché, quando, mentre, se* (con valore ipotetico): “Ti ho preparato un bel regalo, anche se non te lo meriti”.

Modifica il significato di alcune subordinate relative: “I ragazzi che non lo conoscevano sono stati conquistati dalla sua simpatia”; “I ragazzi, che non lo conoscevano, sono stati conquistati dalla sua simpatia”.

È necessaria:

- Dopo un avverbio, una locuzione avverbiale, una interiezione, un complemento circostanziale: “Veramente, quella persona è piuttosto antipatica”; “Sì, sono pronto”; “Accidenti, come è tardi”; “D’altra parte, non me la sento di accettare il suo invito”; “Per quanto a malincuore, devo rinunciare alle vacanze”.

Non si mette davanti a **né**, **o, oppure**, quando sono usate in un'elencazione: "Non vuole né mangiare né dormire"; "Dammi quello che c'è: o una pera o una mela o un'arancia".

Non si usa:

- Nelle interrogative indirette: "Mi ha chiesto quando sarei tornato"

Non deve mai essere messa tra il soggetto e il verbo né tra verbo e predicato, neppure per dare rilievo all'oggetto. Una frase come "Mia figlia da quattro anni studia, inglese e matematica" è da considerasi sempre errata.

- Normalmente la virgola non si mette neppure davanti alla seconda congiunzione di una correlazione: "Sia il francese sia lo spagnolo derivano dal latino". Non si mette davanti all'avverbio **eccetera:** "Alla festa c'erano le solite facce: parenti, amici, colleghi ecc.". Il motivo è che tale avverbio significa già "e le altre cose" per cui contiene in sé la congiunzione *e*. Tuttavia, molti autori di prestigio, come ad esempio Umberto Eco, antepongono all' *eccetera* la virgola, considerandolo ormai come un elemento completamente lessicalizzato, che non conserva, quindi pienamente il valore indicato sopra.

Possiamo vedere chiaramente, dalle frasi che seguono, come la posizione della virgola trasforma completamente il senso di un enunciato anche semplice:

- Mentre la mamma dorme in camera sua, il bambino gioca.
- Mentre la mamma dorme, in camera sua il bambino gioca.

Il punto e virgola

Segna una pausa di media durata, meno netta del punto fermo e più lunga della virgola. Per riprendere una citazione riportata dal giornalista Beppe Severgnini, il punto e virgola è, "secondo il filosofo T. W. Adorno è «il simbolo stesso della dialettica»: supera e riprende quel che è antecedente e lo trasforma in qualcosa di diverso".

Si usa:

- In alternativa al punto fermo, per dividere, all'interno di un periodo, due o più proposizioni collegate tra loro che potrebbero stare ciascuna a sé, ma che non è il caso di separare nettamente:

“Come il cane che scorta una mandra di porci, corre or qua or là a quei che si sbandano; ne addenta uno per un orecchio, e lo tira in ischiera; ne spinge un altro col muso; abbaia a un altro che esce di fila in quel momento; così il pellegrino...”

- In alternativa alla virgola, nelle **enumerazioni e negli elenchi**, specialmente quando i singoli elementi sono accompagnati da un’apposizione o da un’espansione più o meno lunga:

“Nel buio, l’uomo scorse un bambino, alto e robusto per la sua età; una donna vestita malamente di stracci; una ragazzina che poteva avere sì e no quindici anni; e, infine, un vecchio, che pareva il diavolo in persona”.

I due punti

Rappresentano una pausa breve, ma diversamente dal punto e virgola hanno una funzione ben precisa: indicano che le parole che seguono sono una conseguenza o spiegazione di quanto detto prima.

Si usano:

- per introdurre un elenco: “Paolo legge di tutto: novelle, racconti, romanzi, saggi e anche fumetti”.
- Per introdurre un esempio o una citazione**.**
- Per introdurre un discorso diretto: “la donna allora ribatté: “Noi non sappiamo nulla!”
- Per introdurre una precisazione o una spiegazione: “Sognava una sola cosa: viaggiare per il mondo”; “Finalmente tutti si trovarono d’accordo: saremmo partiti in treno”.
- Per sostituire una congiunzione coordinante o subordinante: “Sono stanco morto: vado a letto” (= e perciò vado a letto); “Non vengo al cinema: sono troppo stanco” (= perché sono troppo stanco).
- Non si possono usare tra il verbo e l’oggetto, anche se questo è costituito da un elenco. Quindi: “Paolo legge novelle, racconti, romanzi, saggi e anche fumetti”; “Per la strada si potevano vedere uomini, donne, bambini e vecchi”.

I puntini di sospensione

Si usano, nel numero fisso di tre (3!) , per indicare:

- L’interruzione di un discorso che viene lasciato in sospeso, per imbarazzo, reticenza o convenienza: “Non vorrei offenderti, ma i tuoi amici…”; “Una soluzione ci sarebbe, se tu fossi d’accordo…”.
- L’interruzione di un discorso che chi legge può integrare da solo: “Chi fa da sé...”; “Mal comune…”
- L’interruzione di un’enumerazione o di un elenco che potrebbe continuare, ma che il parlante non desidera o non ritiene necessario completare: “Alla cena c’era di tutto: antipasti, salumi, varietà di primi piatti, arrosti di carne e di pesce, vini…”
- Nelle citazioni per indicare l’omissione di un passo. Per evitare equivoci, vengono per lo più messi tra parentesi tonde (…) oppure quadre […]. Ad esempio, nel passo che segue: *Alessandro Manzoni, nel Capitolo secondo del romanzo, delinea un rapido ritratto dell’aspetto fisico e dell’abbigliamento di Lucia. Scrive, infatti, Manzoni: “[...] I neri e giovanili capelli, spartiti sopra la fronte, con una bianca e sottile drizzatura si rivolgean, dietro il capo, in cerchi molteplici di trecce [...] Intorno al collo aveva un vezzo di granati alternati con bottoni d’oro e filigrana [...]”.*

Le subordinate circostanziali

La proposizione finale

Es. : Faremo di tutto perché tu sia felice

Le finali:

Possono avere forma esplicita o implicita

- Nella forma esplicita sono introdotte dalle congiunzioni subordinanti *perché, affinché, che, onde, acciocché* o da locuzioni congiuntive come *in modo che*

Reggono il verbo al congiuntivo imperfetto o presente:

“Ritirerò gli oggetti più pregiati affinché i bambini non li rompano”

“La donna ritirò gli oggetti più pregiati affinché i bambini non li rompessero”

Uso dei tempi

- Il tempo è sempre in rapporto di contemporaneità con quello della reggente.
- Se nella reggente vi è un presente o un futuro, nella finale si usa in congiuntivo presente: “Paolo farà di tutto *perché tu vada con lui a Roma”.*

- Se si trova al passato remoto, imperfetto, trapassato prossimo, nella finale si usa il congiuntivo imperfetto: “Paolo fece di tutto *perché tu andassi con lui a Roma*”
- La reggente al passato prossimo ammette la finale al congiuntivo imperfetto o presente:
  - “Ho preparato dei panini *perché li mangino durante la gita*”
  - “Ho preparato dei panini *perché li mangiassero durante la gita*”

Finali implicite

- Prevalgono nel parlato
- Sono introdotte dalle preposizioni *per, a, di,* dalla congiunzione *onde,* dalle locuzioni congiuntive *con lo scopo di, al fine di, in modo che, in modo di, nell’intento di* e hanno sempre il verbo all’infinito:
  “Sono venuto qui per vederti”
  “Bisogna impegnarsi molto per farcela”
  “Anna segue una dieta *allo scopo di dimagrire”*
  “Pensateci bene, *onde non pentirvi in futuro”*
- Valore finale ha anche *pur di:*
  *“*Farei qualsiasi cosa *pur di avere* quel posto*”*

La costruzione in forma implicita della finale è possibile quando il soggetto della subordinata è lo stesso della reggente o è indeterminato. È anche possibile usare la forma implicita tutte le volte che il soggetto della finale, pur essendo diverso da quello della reggente, è deducibile da un complemento oggetto o da un complemento di termine contenuto nella principale: “Il professore esortò gli alunni *a terminare il compito in tempo*”; “Vi prego *di uscire*”; “Maria ha dato a Mario dei vestiti usati *da regalare*”. Un’ulteriore possibilità è offerta dall’impiego, nella finale, del verbo *fare*: “Telefona ai tuoi compagni per *farti restituire* gli appunti delle lezioni”.

Le proposizioni causali

Le causali esplicite sono introdotte da:

Perché, poiché, giacché, che, siccome, per il fatto che, dato che, dal momento che…

- Nb. La congiunzione *che* si usa per lo più in dipendenza da verbi o espressioni indicanti sentimenti : “Mi dispiace *che tu non sia venuto*”; “Sono contento *che tu stia bene*”, ma è frequente anche in espressioni familiari come “Vai a dormire, *che è tardi*”

Hanno il verbo:

- all’**indicativo,** quando indicano causa reale: “Torno a casa *perché è tardi”; “Siccome pioveva*, non sono uscito”.

- al **congiuntivo**, quando indicano causa fittizia: “Antonio batteva i denti *non perché avesse freddo*, ma *perché era terrorizzato dalla situazione”*.

- NB: Quando l’elemento anticipatore della reggente è un avverbio come *troppo , troppo poco, abbastanza, sufficientemente,* la subordinata è introdotta da *perché* più congiuntivo: “Il testo era troppo difficile perché lo traducessimo bene”.

- al **condizionale** quando la causa addotta ha un valore soggettivo, eventuale o potenziale:
“Non parlare *perché potresti pentirtene*”
“Taci, *che vorrei studiare*”

La forma implicita della causale può costruirsi:

- con il **gerundio** presente o passato, a seconda che la causa indicata sia contemporanea o anteriore rispetto all’azione della principale. È possibile realizzare questa costruzione solo se il soggetto della causale è espresso o vi è coincidenza di soggetti tra principale e subordinata:

“*Essendo la batteria scarica* , non poté utilizzare il cellulare”

“*Avendo speso tutto,* l’uomo dovette chiedere un prestito”

- con il **participio passato**, ancora una volta, unicamente se il soggetto della causale è espresso o vi è coincidenza di soggetti tra principale e subordinata:

“*Finita la scuola,* i ragazzi andarono in campeggio sul mare”

“*Smascherato dalle intercettazioni telefoniche*, il ministro dovette dimettersi”.

- con l’**infinito**, preceduto da *per, di, a,* solo se vi è coincidenza tra il soggetto della reggente e della secondaria o in quei casi in cui , pur mancando tale coincidenza il soggetto della subordinata è facilmente deducibile dalla reggente:
“*Per avere ottenuto il massimo dei voti*, ho ricevuto in regalo una moto nuova”
“Ti ringrazio *di avermi aiutato*”

Le condizionali e il periodo ipotetico

Forme esplicite:

- Sono introdotte, per lo più, da *se*, con indicativo o congiuntivo, a seconda che si esprima un’ipotesi certa e reale, solo possibile o irreale:
  “*Se esci*, vengo con te”
  “*Se continuasse a piovere* il fiume strariperebbe”
  “*Se tu non te ne fossi andato*, questo non sarebbe successo”

- Possono essere introdotte anche da *Qualora, purché, nel caso che, nell’ipotesi che, a patto che, nell’eventualità in cui***,** con il verbo sempre al **congiuntivo**:
  “*Qualora si verificassero degli imprevisti*, te lo faremo sapere”
  “ *Nel caso che il treno fosse in ritardo,* perderemmo la coincidenza”

Forme implicite

- Richiedono l’identità del soggetto tra subordinata e reggente o l’esplicitazione del soggetto stesso
- Reggono il **gerundio presente, il participio passato o l’infinito presente (**preceduto dalla preposizione ***a***)
  “Continuando a bere così (= se continui a bere così), finirai per rovinarti il fegato”.
  “*Avendo qualche lira da parte* (= se avessi qualche lira da parte), farei un bel viaggio”
  “*Fatto con calma* (= se viene fatto con calma), qualsiasi lavoro riesce bene”
  “*A bere troppo* (= se si beve troppo), ci si rovina il fegato”.

Il periodo ipotetico

- La proposizione subordinata si chiama *pròtasi*, perché esprime la premessa, cioè la condizione da cui dipende la reggente.
- La reggente è detta *apòdosi,* conseguenza.

P. Ipotetico della realtà

- Ha il verbo all'indicativo nella protasi e nell'apodosi:
- "Se vuoi, ti accompagno" (realtà nel presente); "Non sarai promosso se non ti impegnerai" (realtà nel futuro); "Se non sei partito, è stata solo colpa tua" (realtà nel passato); **a volte,** l'apodosi ha il verbo all'imperativo: "Se piove, mettiti l'impermeabile".

P. Ipotetico della possibilità

- L'ipotesi contenuta nella protasi è presentata come soltanto possibile, perché riguarda un fatto che non è accaduto, ma potrebbe accadere
- Ha il verbo al *congiuntivo imperfetto* nella protasi e al condizionale presente o all'imperativo nell'apodosi

Esempi:

- Se lo *incontrassi,* glielo *chiederei*
- Se gli *parlassi* tu, forse *accetterebbe*
- Se ti *chiamasse,* va' subito
- **NB** : Se a introdurre sono *qualora, nel caso che, nell'ipotesi che*, la protasi va al **congiuntivo presente** e l'apodosi al **futuro di indicativo** o **imperativo:**
- **"**Qualora *restituisca il denaro,* non *sarà denunciato";* *"*Nel caso che si *faccia* vivo*, diglielo* subito"

Usi propri del registro colloquiale

- Si usa sempre più spesso l'indicativo, invece del congiuntivo, anche per la protasi del p. ipotetico della possibilità:

"Se si verifica qualche imprevisto, ti telefono", o anche "Se si verificherà qualche imprevisto ti telefono"

Conseguenze:

- Non solo appiattimento espressivo, ma anche ambiguità comunicativa (impossibilità di distinguere ciò che è reale da ciò che, invece è solo ipotizzato)

a) "Se *si verifica* qualche imprevisto, ti telefono"
b) "Se *si verificasse* qualche imprevisto, ti telefono"
c) "Se *si verificasse* qualche imprevisto, ti *telefonerei"*

Tuttavia, anche grandi scrittori, come Moravia, hanno fatto osservare che dire **"Se *vado* in Africa, ti *porto* un regalo"** esprime in modo facile e chiaro lo stesso concetto del complicato e difficile da costruire **"Se *andassi* in Africa, ti *porterei* un regalo".**

P. Ipotetico dell'irrealtà

- È quello in cui l'ipotesi espressa nella protasi è non vera o impossibile, perché riguarda un fatto che non si può realizzare o che avrebbe potuto accadere ma non è mai accaduto. Il verbo è, quindi, al **congiuntivo imperfetto** nella protasi e al **condizionale presente** nell'apodosi, se l'ipotesi irrealizzabile si riferisce al presente. "Se *fossi* in te, non mi *comporterei* così".

- Se invece l'ipotesi è riferita al passato, il verbo è al **congiuntivo trapassato** nella protasi e al **condizionale passato** nell'apodosi:
  "Se *fossi stato informato* dell'accaduto, *sarei partito* immediatamente".

- Quando però il fatto o la circostanza espressi nella protasi avvengono o proseguono nel presente, nell'apodosi si usa il **condizionale presente**:
  "Se tu *fossi stato sincero*, ora non *faresti* questa brutta figura".
  "Se *avesse seguito* le indicazioni del medico, starebbe molto meglio".

Tendenze della lingua

- Nel p. ipotetico dell'impossibilità, l'**indicativo imperfetto** tende a sostituire il **congiuntivo trapassato della protasi** e, nella lingua parlata, anche il condizionale passato dell'apodosi:
  "Se *arrivavi* un attimo prima, *avresti incontrato* Laura"
  "Se *arrivavi* un attimo prima, *incontravi* Laura"

Forma implicita

- La protasi può essere costituita da una condizionale implicita in tutti e tre i tipi di periodo ipotetico

a) **Realtà: "**A fare così, diventi insopportabile"; "Facendo così, diventi insopportabile"; "Letto con calma, questo libro si capisce bene"

b) Possibilità: "Verificandosi qualche imprevisto, vi telefonerò"; "Eseguito con calma, il lavoro riuscirebbe bene"

c) **Impossibilità:** "Eseguito con calma il lavoro sarebbe riuscito meglio"; "A insistere ancora, lo avremmo fatto arrabbiare"

NB: anche nel periodo ipotetico dell'impossibilità riferito al passato si usa il gerundio presente e non il gerundio passato, che assumerebbe un valore causale:

"*Potendo*, ti avrei aiutato";

"*Usando* un po' di buon senso, non avresti combinato tutti questi guai**".**

NB (2) : per esprimere l'alternativa tra due circostanze presentate entrambe come possibili si usano due subordinate rette dalle congiunzioni disgiuntive correlative *sia che… sia che; che…o,* con il verbo al congiuntivo:

"*Sia che Paolo venga o che preferisca stare a casa,* domani andremo al mare";

"*Che Paolo venga o no*, domani andremo al mare".

Che cos'è un testo

Il testo è l'unità <u>fondamentale</u> della nostra attività linguistica: un'unità che corrisponde a una determinata intenzione comunicativa e che si distingue dalla frase non tanto quantitativamente, quanto qualitativamente. Il testo nasce da un'esigenza di continuità e un'esigenza di progressione (di sviluppo). Può essere un insieme di frasi, ma può consistere anche di una sola frase, purché essa abbia senso compiuto e rappresenti un messaggio che l'emittente considera completo.

In un testo tanto scritto quanto orale (dal lat. *textus*, "tessuto") le parole che formano un messaggio, grazie ai legami formali e logici che le mettono in rapporto, generano una sorta di tessuto: *un tessuto di parole*.

L'estensione di un testo dipende dal tipo e dalla quantità di informazioni che il suo autore desidera affidare al suo messaggio. Può essere quindi formato da una o moltissime parole o articolato in uno o più settori di diversa ampiezza.

Sono testi completi, ad esempio, messaggi molto brevi come:

- Veni, vidi, vici
- Obbedisco
- Arriverò domani, treno 15,30. Mario

E così una scritta come *Bar*, *Alimentari* o *Tabacchi* può risultare un'informazione soddisfacente e completa per chi abbia bisogno, in un determinato momento, di un caffè, di pane o di acquistare un pacchetto di sigarette. Si tratta, dunque di un testo. Allo stesso modo, un saluto, un'ingiunzione, o un ammonimento, quando soddisfano la finalità per cui sono state originate, costituiscono un testo.

Alcune comunicazioni, però, sono più ricche di particolari e hanno bisogno di una più estesa narrazione di fatti, di descrizioni, di precisazioni, argomentazioni o dimostrazioni e necessitano, pertanto, in misura proporzionale alle esigenze indicate, di parole e degli strumenti adatti a evidenziare i rapporti logici che le collegano.

Osserviamo questa dispensa, che pur nella sua brevità ha richiesto una divisione in parti, e ancora in sub appartati, in capoversi, in blocchi di periodi, in periodi, in frasi, parole e lettere che compongono parole. L'argomento generale è uno "la lingua italiana", ma al suo interno tratta argomenti più specifici: la storia della lingua, le varietà sociolinguistiche, alcuni elementi grammaticali della norma standard ecc.

Ogni particolare serve allo scopo di contribuire alla trattazione dell'argomento principale; questo scopo, comune è ciò che lega insieme tutte le parti; da solo, senza una serie di altri strumenti di connessione più o meno evidenti, non sarebbe sufficiente.

Perché un testo soddisfi accettabilmente le esigenze comunicative del produttore e quelle ricettive del destinatario è indispensabile che l'esposizione del contenuto rispetti il criterio della **coerenza** logica e stilistica, segua cioè una linea che coordini le varie parti di cui il contenuto è costituito e abbia un registro adeguato e che vi sia **coesione.** È necessario, cioè, che vi sia un'efficace rete di collegamenti, di rimandi tra i vari elementi del testo (parole, frasi, periodi).

Costruire un testo

Per costruire un testo di una certa estensione (il caso di testi molto brevi non richiede particolari attenzioni) è necessario rispettare entrambi i criteri accennati nel paragrafo precedente.

C'è bisogno di:

- un argomento di fondo da trattare che ne costituisca l'unità di contenuto
- un inizio, uno svolgimento intermedio ed una conclusione
- un filo logico -la coerenza- cioè l'adesione degli elementi di contenuto e di senso il testo all'argomento unitario
- una serie di relazioni tra le componenti formali del testo (coesione):
    1. parole in grado di sostituirne altre o per natura grammaticale (pronomi) o per equivalenza di significato (sinonimi) ;
    2. parole in grado di connettere elementi di frasi, frasi tra di loro e periodi tra di loro (preposizioni, congiunzioni, pronomi, avverbi);
    3. parole ed espressioni adatte da indicare tempo, luogo, consequenzialità, distribuzione dell'argomento, a formulare giudizi su di esso, a fornire precisazioni o effettuare correzioni e rimodulazioni.

Questi elementi contribuiscono a realizzare la *coesione* cui si accennava sopra.

Infatti, per ottenere un testo efficace è necessario sperimentare una determinata competenza testuale. La mancanza di variazione lessicale, la difficoltà a eseguire le necessarie connessioni danno luogo a testi poco apprezzabili e difficilmente veicolabili.

Il concetto di foricità

La foricità, dal greco *pherō*, lat. *fero* ‘porto’ è la qualità posseduta da tutti gli elementi linguistici che

a) all’interno di un testo (referenza **endoforica**) rinviano ad altri elementi che ricorrono nel testo stesso.

b) rinviano al contesto situazionale (elementi noti al mittente e al destinatario) esterno al testo (referenza esoforica)

Questo tipo di rinvii, di connessioni, che permettono di raggiungere o meno la coesione del testo, la sua efficacia e la sua leggibilità appartengono a categorie grammaticali anche assai diverse tra di loro. Possono avere carattere temporale (*poco prima, subito dopo, in seguito, tre mesi dopo ecc*.) , come abbiamo accennato oppure spaziale (*più avanti, nei pressi, dal lato opposto*), logico (*perciò, in conseguenza, pertanto*), di suddivisione del testo (*in primo luogo, da ultimo, per concludere*); oppure possono essere rinvii anaforici, cataforici, normali congiunzioni, pronomi ecc.

Anafora (< gr. *anapherō* ‘ripeto’)

È il procedimento sintattico con cui i precedenti elementi del discorso vengono ripresi e sostituiti con elementi di tipo pronominale. Si tratta di uno dei meccanismi più importanti e delicati del testo. Es.:

1) *Ho incontrato Laura e le ho detto di chiamare Antonio per invitarlo alla mia festa.* (*le* è l’elemento anaforico che riprende sotto forma di pronome *Laura;* lo riprende *Antonio*)

2) *Ieri uscendo di casa per andare al lavoro ho visto* ***un gatto grigio*** *che se ne stava vicino alla porta del garage… Quando la sera sono tornato a casa,* ***il gatto*** *era ancora lì… Non ci ho pensato due volte: prima che* ***Ø****1 andasse* ***Ø****2 a finire sotto qualche macchina,* ***l****’ho preso,* ***l****’ho portato in casa e* ***gli*** *ho dato del latte caldo.* ***La bestiola*** *si è subito rianimata, e per prima cosa* ***Ø****3 ha cominciato* ***Ø****4 a esplorare la casa …*

Ø indica i casi di ellissi (del soggetto) e la marca di accordo del verbo (segnale anaforico).

Forme possibili di ripresa anaforica:

- ripetizione del sintagma nominale definito: un gatto grigio … il gatto
- sintagma nominale definito espresso

a) da un sinonimo (*un gatto … il micio …*);

b) da un sovraordinato (*il felino … la bestiola…*);

c) un nome generale (*un operaio… l'uomo*);

d) una perifrasi (*il papa… il vescovo di Roma*);

e) pronomi tonici (*lui/egli/esso…*) e atoni (*lo, gli, ecc.*);

f) l'ellissi in cui fa da segnalatore anaforico la marca di accordo sul verbo;

g) anafora zero (in cui manca anche la marca di accordo sul verbo (*temevo che il gatto andasse Ø a finire…*; *Maria è entrata in cucina Ø sbadigliando*);

h) "incapsulatore" anaforico con antecedente frasale (*Due anziani hanno tentato di togliersi la vita con i barbiturici … All'origine del* ***gesto****…*), in cui il cosiddetto "incapsulatore" riassume e racchiude una porzione del testo precedente.

La catafora (< gr *katapherō* porto avanti')

Si ha quando un termine (ad es. un pronome) si riferisce ad un altro che lo segue: *Codesto solo oggi possiamo dirti,/ ciò che non siamo, ciò che non vogliamo* (Montale).

Vediamone un esempio tratto da una delle *Novelle per un anno* di Pirandello:

Che Ø1 voleva dirmi?

L'affanno cresciuto non dava adito alle parole, che volevano certo esser aspre, a giudicare dagli sguardi e dai gesti con cui, Ø2 tossendo, Ø3 cercava di farmi comprendere.

– Il servo? – gli domandai, cercando, angustiato, uno interpretazione.

Ø4 Accennò si sì più volte col capo, irosamente; poi con la mano tremolante, Ø5 mi fece altri gesti.

- Lo caccio via?

– Sì. sì. sì, Ø6 m'accennò col capo, di nuovo.

Per quanto l'indignazione, a cui pareva in preda ***il povero infermo****, ora si comunicasse anche a me, al pensiero che quel servo vigliacco si fosse approfittato dei brevi momenti durante la giornata, nei quali ero costretto ad allontanarmi; pure restai perplesso. Venivo proprio ad annunziar****gli*** *che, d'ora in poi, non avrei più potuto trattenermi a vegliar****lo****, a curar****lo****, come nei primi giorni della malattia.*

Cacciando ora il servo, poteva ***egli*** *restar solo lì in casa?*

*Mi venne in mente lì per lì di persuader***lo** *a Ø7 cercar ricovero o in un ospedale o i qualche casa di salute, e* **gli***ene feci la proposta. Nonno Bauer (lo chiamavo così fin da quando era ragazzo) mi guardò con occhi smarriti…*

I sette principi costitutivi del testo secondo De Beaugrande-Dressler:

1. Coesione **–** Concerne i rapporti grammaticali e il modo in cui sono collegati tra di loro i vari elementi di un testo. È garantita dai connettivi testuali.
2. Coerenza – Riguarda la connessione tra i contenuti presenti nel testo. Si esprime mediante rapporti di causalità, scopo, successione temporale ecc. e si fondo sul principio di causalità e di relazione per cui gli eventi devono sempre essere connessi secondo un ordine logico
3. Intenzionalità **–** Intento di comunicare qualcosa: si riferisce a «tutti i mezzi utilizzati da chi produce un testo per perseguire e realizzare le proprie intenzioni» (RF)
4. Accettabilità – Concerne l'atteggiamento del ricevente, il quale si aspetta sempre che un testo soddisfi determinati requisiti;
5. Informatività **–** riguarda il grado di informazione di un testo: esprime il grado in cui un testo giunge atteso o inatteso, rappresenta un fatto noto o ignoto; la ***e*** di veloc**e**mente è meno informativa dalla *-e* di *veloce*, perché nel primo caso è necessaria, nel secondo si trova in opposizione a *-i* di *veloci*; l'aggettivo *bianco* è meno informativo nel sintagma *la bianca luna* (la luna non può non essere bianca), ma lo è di più nel sintagma *un cavallo bianco*; gli enunciati con funzione fatica sono assai meno informativi degli enunciati che fanno appello alla funzione poetica o a quella referenziale.

6. **Situazionalità –** è il trovarsi di un testo in una determinata situazione: *Accendere i fari nella galleria* ha un significato inequivocabile all'imbocco della galleria stessa. Esso non può non essere breve: è la situazione che lo richiede.

- 7. **Intertestualità –** è il rapporto tra un testo presente ed un testo o altri testi assenti, ma vivi nella memoria del ricevente. Ad es. *Spegnere i fari* alla fine della galleria.

I connettivi possono essere di due tipi:

Semantici. Collegano elementi contenutistici in quanto tali e quindi istituiscono relazioni tra i "fatti" di cui si parla. Possono rientrare tra questi:

- gli elementi che segnalano gli snodi temporali nei testi narrativi (*all'improvviso*, *ad un tratto*, *d'un colpo*, *un giorno*, *una volta* e sim.);
- gli elementi che mettono in relazione temporale due eventi (*dopo*, *poi*, *il giorno dopo*, *l'anno successivo*, *dopo due mesi* ecc.);
- la contemporaneità di due eventi (*contemporaneamente*, *nel frattempo*, *in quel preciso momento* ecc.);
- l'anteriorità (*poco prima*, *l'anno prima*, *precedentemente* ecc.).

Testuali. Collegano parti del testo in quanto unità di discorso**.** Vi ritroviamo:
a) gli elementi che servono a scandire il testo in parti (*in primo luogo*, *in secondo luogo*, *per prima cosa*, *infine* ecc.);
b) gli elementi che segnalano gli snodi importanti del testo, l'apertura, la chiusura dell'intero testo o di una sua parte (*Vorrei cominciare … come ho già detto*, *analizzeremo adesso*, *vedremo poco più sotto*, *in conclusione* ecc.)

I connettivi testuali possono svolgere diverse funzioni, tra le quali le principali sono:

- funzione additiva quando segnalano l'aggiunta di nuove informazioni (*e*, *anche*, *inoltre*, *oltre a ciò*, *possiamo inoltre aggiungere* e sim.);
- funzione avversativa, quando segnalano una contrapposizione (*al contrario*, *all'opposto*, *anzi*, *ciononostante*, *in caso contrario*, *invece*, *nondimeno* ecc.);
- funzione esplicativa, correttiva, esemplificativa e riassuntiva (*come ad esempio*, *a voler essere più precisi*, *infatti*, *in effetti*, *in altre parole*, *in breve*, *riassumendo*);
- funzione consecutiva (*così*, *dunque*, *per questi motivi* ecc.);
- funzione comparativa quando instaurano paragoni tra sequenze consecutive (*allo stesso modo*, *così*. *più spesso* ecc.);
- funzione pragmatica quando si segnala l'inizio o la fine di uno scambio [demarcativi] (nel testo orale: *Pronto?*, *bene*, *okay* ecc.); quando si vuol richiamare l'attenzione dell'interlocutore (*sai, sapessi, lo sai?*); quando si vuol puntellare il testo o riempire spazi vuoti (*insomma*, *praticamente*, *niente* ecc.).

Un testo corretto è quello in cui rimandi anaforici e cataforici sono adeguatamente variati: stabilito il referente testuale lo si può riprendere mediante

- sostituti grammaticali (pronomi, aggettivi, ecc.)
- sostituti lessicali (sinonimi, iperonimi, iponimi).

Si vedano i seguenti esempi:

- *La coppia di termini […] indica la relazione semantica paradigmatica fra termine generico, detto iperonimo o sovraordinato (ad es. mobile), e uno o più termini specifici, detti iponimi o sottoordinati (ad es. tavolo, armadio, sedia) (C. MARELLO,Dizionario di linguistica, ad vocem).*

- *- Virgilio non è dunque allegoria di una qualità, di una virtù, di una capacità, di una forza e neppure di una istituzione storica. Egli non è né la ragione, né la poesia, né l'impero (SOST. GRAMMATICALE)*

- *- Leopardi esprime questo concetto nell'antitesi grandezza-piccolezza. Questa opposizione percorre tutto il suo pensiero (SOST. LESSICALE CON SINONIMO)*

- *- Ho raccolto margherite, papaveri e viole. Ho regalato questi fiori a un'amica (SOST. LESSICALE PER IPERONIMO)*

- *Il libro che mi hai regalato è molto divertente. Da tempo desideravo leggere Marcovaldo (SOST. PER IPONIMO)*

INFORMATICA

A cura di
prof. Gianluca Caminiti, prof. Giovanni Quattrone

Si dichiara che il presente elaborato è originale e che è stato predisposto in funzione dell'attività formativa relativa ai Percorsi di potenziamento delle competenze di base anno 2009.

Capitolo 1

Cos'è l'informatica?

Il termine "informatica" proviene dalla lingua francese, esattamente da *"INFORmation electronique ou automaTIQUE"*; tale termine intende che il trattamento dell'informazione avviene in automatico mediante un elaboratore. Da notare che in lingua inglese non esiste l'equivalente di "informatica" ma che al suo posto viene utilizzato il termine "*computer science*" che presuppone l'esistenza della figura di uno scienziato interessato all'approfondimento della conoscenza della tecnologia dell'elaborazione.

È altresì interessante notare il differente significato di origine tra le differenti lingue nel denominare lo strumento base dell'informatica:

- *Elaboratore*, in italiano, per le sue numerose capacità di elaborazione.
- *Ordinateur*, in francese, per evidenziare le evidenti capacità dell'elaboratore nell'organizzare i dati e le informazioni.
- *Computer*, in inglese (letteralmente "calcolatore") in discendenza delle calcolatrici, prima meccaniche, poi elettromeccaniche, poi elettroniche.

È importante tenere presente che, contrariamente a quanto si ritiene comunemente, quella dei computer non è affatto classificabile come intelligenza. L'elaboratore non fa altro che eseguire istruzioni preventivamente "impartitegli" da un essere umano. Ciononostante, il computer è ormai diventato insostituibile in numerosi campi della vita e della scienza, grazie alla sua velocità di calcolo e sua notevole flessibilità.

Oggi "informatica" è un termine di uso comune che si accompagna, si integra ed è di supporto a svariate discipline scientifiche e pervade pressoché qualunque "mezzo" o "strumento" di utilizzo comune quotidiano, tanto che oggigiorno quasi tutti siamo o siamo stati, in qualche modo, utenti di servizi informatici. Data l'ampiezza e la diffusione del termine "informatica" si rende necessario definire, sia pure a grandi linee, un quadro generale entro il quale comprendere la materia.

L'informatica non è soltanto la scienza che studia la tecnologia dei calcolatori (che sono soltanto degli strumenti); l'informatica è bensì *la scienza che studia la rappresentazione, la memorizzazione, l'elaborazione e la trasmissione dell'informazione*.

L'elaboratore elettronico (o "computer" o "calcolatore") è uno strumento per la rappresentazione, la memorizzazione e l'elaborazione delle informazioni. L'elaboratore elettronico è uno strumento programmabile in quanto può essere predisposto per eseguire un particolare insieme di azioni, allo scopo di risolvere un problema.

Un elaboratore può essere pertanto utilizzato sia da utenti per eseguire software applicativo di svariata natura, come ad esempio:

- per elaborare informazioni di vario genere (testo, audio, video, etc);
- per memorizzare grossi archivi di dati, recuperarli velocemente e produrre informazioni;
- per trasmettere e recuperare informazioni;
- per risolvere problemi matematici;
- per rappresentare ed elaborare informazioni che simulano l'ambiente reale.

Un elaboratore può essere utilizzato anche da sviluppatori per lo sviluppo di nuovi programmi applicativi o di sistema, che hanno la funzione di fare funzionare il calcolatore.

Problemi, algoritmi e programmi

Il problema

Abbiamo un problema quando ci poniamo un obiettivo da raggiungere e per raggiungerlo occorre stabilire una strategia.

Problemi di interesse sono quelli per cui è possibile fornire una precisa formalizzazione, in un qualsiasi formalismo espressivo, ad esempio quello offerto dalla matematica. Esistono infatti problemi che sono così facilmente esprimibili e formalizzabili che è possibile definire una strategia di soluzione basata sull'applicazione sistematica di regole ben precise che consente di ottenere i risultati attesi a partire dai dati disponibili.

In molti di questi casi è possibile affidare l'applicazione delle regole di soluzione ad un elaboratore in grado di svolgere rapidamente i compiti affidatigli.

Tipici problemi di interesse sono:

- *Ricerca di informazione*. Il problema della ricerca di informazione è sempre stato un problema cruciale anche nel mondo dei documenti cartacei e risulta amplificato nel caso in cui la ricerca debba essere svolta su una quantità enorme di informazione. Esempi tipici di questa categoria di problemi sono: trovare il numero di telefono di una persona all'interno di un grosso archivio di dati, oppure individuare il numero più piccolo di una lunga sequenza di numeri.

- *Elaborazione di informazione*. Anche questo è sempre stato un problema cruciale nel mondo dei documenti cartacei. Una volta che si ha l'accesso all'informazione, si ha spesso l'esigenza di elaborarla al fine di ottenere altra informazione di carattere globale. Ad esempio dato un certo numero di prodotti con un determinato prezzo, è possibile elaborare tale informazione al fine di ottenere il costo totale dei prodotti.

- *Problemi di ottimizzazione*. Ovvero, tra tutte le soluzioni possibili che risolvono un problema, occorre trovare quella che rende minimo o massimo un certo fattore di interesse. Ad esempio, tra tutti i mezzi di trasporto che ci permettono di raggiungere Parigi ci interessa scegliere quello più economico oppure quello con il quale si impiega meno tempo.

L'algoritmo

Come si costruisce la soluzione a un problema? Qual è il giusto "punto di partenza" per pensare la soluzione a un problema? Quali metodologie e tecniche usare?

In generale per risolvere un problema occorre individuare una sequenza di passi che, partendo dai dati noti, si arrivi alla soluzione. A tale scopo appare utile introdurre il concetto di "*algoritmo*".

Il termine algoritmo deriva dal nome di un matematico persiano che nel 825 d.C. fu uno dei primi autori ad aver fatto riferimento esplicitamente a questo concetto. Tuttavia gli algoritmi erano presenti anche nelle antiche tradizioni matematiche, ad esempio la matematica babilonese, quella cinese o del Kerala trasmettevano le conoscenze in forma algoritmica.

Un algoritmo può essere informalmente definito come un *procedimento che consente di ottenere un risultato atteso eseguendo, in un determinato ordine, un insieme di passi semplici* corrispondenti ad azioni scelte solitamente da un insieme finito. Nel senso più ampio della parola, “algoritmo” è una ricetta di cucina, o la sezione del libretto delle istruzioni di una lavatrice che spiega come programmare un lavaggio. Di norma, comunque, la parola viene usata in contesti matematici e recentemente soprattutto informatici.

Una definizione più rigorosa e precisa di algoritmo è la seguente: *un algoritmo è una sequenza logica di istruzioni elementari* (ovvero che sono univocamente interpretabili) *che, eseguite in un ordine stabilito, permettono di ottenere la soluzione di un problema in un numero finito di passi.*

Da questa definizione si evincono le *quattro proprietà fondamentali* dell’algoritmo:

1. La sequenza di istruzioni deve essere *finita*.
2. Essa deve *portare ad un risultato.*
3. Le istruzioni devono essere *eseguibili materialmente*.
4. Le istruzioni devono essere espresse in modo *non ambiguo*.

Un esempio di “algoritmo da cucina” che illustra come preparare una frittata potrebbe essere il seguente:

Passo 1: rompere 2 uova.
Passo 2: sbattere le uova per 3 minuti.
Passo 3: aggiungere 2 cucchiai di formaggio.
Passo 4: aggiungere sale e prezzemolo quanto basta.
Passo 5: friggere l’impasto ottenuto per 2 minuti.

Affermando che i passi costituenti di un algoritmo debbano essere “elementari” e “non ambigui”, si intende che essi siano specificati in modo immediatamente evidenti a chi sarà chiamato ad applicare l’algoritmo, ovvero il suo esecutore. Così, “rompere 2 uova” è sicuramente un passo legittimo, mentre il passo “aggiungere sale e prezzemolo quanto basta” lo può essere soltanto nel caso in cui è possibile assumere che l’esecutore sia in grado di risolvere da solo l’ambiguità di questa frase. Al contrario, un passo come “friggere l’impasto ottenuto per 2 minuti” non può considerarsi “semplice”; potrebbe però essere associato ad un rimando ad un’altra sezione che fornisce un algoritmo apposito che spieghi quali passi “elementari” sono necessari per effettuare la frittura dell’impasto. Questi potrebbero essere, ad esempio, “aggiungere olio nella padella”, “riscaldare l’olio sulla fiamma”, “inserire l’impasto nell’olio caldo”. Infine, notare che tale ricetta per essere “eseguibile materialmente” deve essere indirizzata solo a chi è provvisto di cucina, la quale è necessaria per riscaldare l’olio sulla fiamma.

Esistono numerosi modelli matematici di algoritmo. In generale, un algoritmo riceve un insieme di valori (chiamati *dati in input*) e ne genera un altro (chiamati *dati in output* o *soluzione*). Questa corrispondenza tra input e output rappresenta il problema risolto dall’algoritmo.

Ritornando all’esempio dell’algoritmo da cucina che descrive come preparare una frittata, i dati in input sono le 2 uova, il formaggio, il sale, il basilico e l’olio, il dato in output è la frittata intesa come prodotto finito dopo l’esecuzione dell’algoritmo. Notare che in tale algoritmo descritto i dati in input e i dati in output appaiono invariabili, nel senso che ogni volta che viene eseguito lo stesso algoritmo si ha a che fare con esattamente gli stessi dati. Tuttavia, generalmente in matematica ed in informatica i “problemi” che si considerano sono quasi sempre caratterizzati da dati di ingresso variabili. Per esempio, il calcolo del massimo comune divisore fra due numeri è un esempio di “problema”, e i suoi dati di ingresso, variabili di volta in volta, sono i due numeri in questione. A un non matematico questa potrebbe apparire come una “famiglia di problemi” (il problema di calcolare il massimo comune divisore fra 10 e 15, il problema di calcolarlo fra 40 e 60, fra 35 e 95, e così via). Il matematico e l’informatico identificano con la parola “problema” l’intera famiglia e con “*istanza*” (o “caso particolare”) ciascuno dei quesiti specifici ottenuti fissando due particolari valori.

Data questa premessa, un algoritmo risolve un problema se è costituito da una sequenza di passi che, applicata indifferentemente a qualunque istanza del problema, produce in un tempo finito la soluzione desiderata. Questa idea riveste un’importanza fondamentale specialmente con l’avvento dell’informatica. Infatti, se per ottenere un certo risultato (risolvere un certo problema) esiste un procedimento infallibile, che può essere descritto in modo non ambiguo fino ai dettagli, e conduce sempre all’obiettivo desiderato in un tempo finito, allora *esistono le condizioni per affidare questo compito ad un elaboratore*, semplicemente descrivendo l’algoritmo in questione in un programma scritto in un opportuno linguaggio comprensibile alla macchina.

L’esecuzione di un algoritmo su un dato input richiede il consumo di una certa quantità di risorse; queste sono generalmente rappresentate dal *tempo di calcolo* impiegato e dallo *spazio di memoria* utilizzato. È importante saper valutare la quantità di risorse consumate proprio perché un consumo eccessivo può pregiudicare le possibilità di utilizzo di un algoritmo.

Lo studio di un algoritmo viene generalmente suddiviso in tre fasi:

1. *Sintesi*: dato un problema, occorre individuare un algoritmo per risolvere il problema.
2. *Analisi*: dato un algoritmo ed un problema, occorre dimostrare che l’algoritmo risolve il problema (correttezza) e valutare la quantità di risorse usate dall’algoritmo (complessità).
3. *Classificazione*: data una quantità di risorse, occorre individuare la classe di problemi risolubili da algoritmi che usano al più tale quantità.

Algoritmi equivalenti

In generale, dato un problema non esiste un solo ed unico algoritmo che lo risolve. Due algoritmi si dicono equivalenti quando:

- hanno lo stesso dominio di ingresso;
- hanno lo stesso dominio di uscita;
- in corrispondenza degli stessi valori nel dominio di ingresso producono gli stessi valori nel dominio di uscita, tuttavia pur producendo lo stesso risultato possono avere diversa efficienza e possono essere profondamente diversi.

Si consideri il seguente esempio: si vogliono moltiplicare tra loro due numeri. Un primo algoritmo potrebbe essere l’utilizzo delle somme successive, ad esempio:

$$12 \times 12 = 12 + 12 + \ldots + 12 = 144.$$

Un secondo algoritmo potrebbe essere l’utilizzo della tecnica di “somma e shift”:

```
  12 x
  12 =
--------
   24 +
 12   =
--------
 144
```

Diagramma di flusso o diagrammi a blocchi

Uno dei primi e più diffusi formalismi per la descrizione degli algoritmi si avvale di una dislocazione di blocchi contenenti le istruzioni e connessioni mediante frecce. Tale formalismo viene detto *diagramma di flusso* o *diagramma a blocchi*.

Ogni blocco ha un ramo di ingresso e uno o più rami di uscita; collegando tra loro i vari blocchi, aventi diverse forme, attraverso linee orientate si ottiene il diagramma di flusso.

Le forme dei blocchi sono:

- *Inizio.* Tutti i diagrammi a blocchi cominciano con un'ellisse che contiene la parola Inizio.

- I *dati in ingresso*. Sono i dati noti del problema, quelli che devono essere elaborati per arrivare alla soluzione.

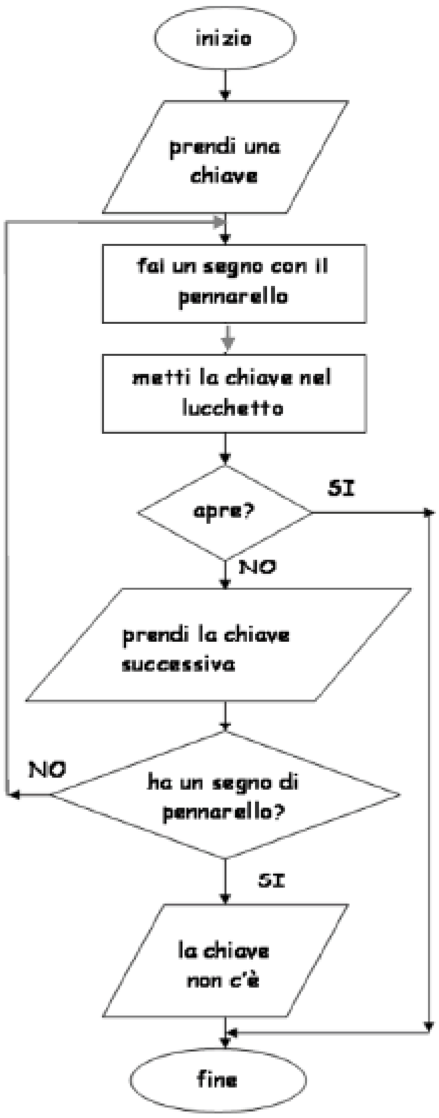
- Le *operazioni* da svolgere sui dati sono racchiuse in rettangoli.

- Quando si deve fare una *scelta* tra due possibilità si usa il rombo.

- I *dati in uscita* sono quelli che si vuole conoscere e costituiscono il risultato dell'elaborazione.

- Ogni diagramma di flusso si conclude con un’ellisse che contiene la parola *fine*.

Ad esempio se volessimo descrivere un algoritmo che permette di determinare in un mazzo di chiavi quella che apre un determinato lucchetto, potremmo utilizzare il diagramma di flusso illustrato nella seguente figura.



Programma e linguaggi di programmazione

Un programma è la *descrizione di un algoritmo in un linguaggio adatto ad essere eseguito su un elaboratore*. Un programma è pertanto una sequenza logicamente ordinata di istruzioni che produce soluzioni per una data classe di problemi. Il linguaggio utilizzato per descrivere l'algoritmo viene detto *linguaggio di programmazione*.

I linguaggi di programmazione, a differenza dei linguaggi umani, sono linguaggio formali, dotati di una *sintassi* (ovvero le regole di composizione dei simboli del linguaggio per ricavarne le istruzioni) e di una *semantica* (ovvero il significato delle istruzioni) ben definite che vanno *rigorosamente* rispettate.

Il termine programma deve essere tuttavia distinto da quello, più generico, di "software". Un programma è infatti un oggetto software che può essere caricato nella memoria di un computer per essere eseguito. Altri oggetti software (come, ad esempio, le librerie) non godono di questa proprietà in quanto non possono essere "eseguiti" direttamente. Analogamente, il termine "programma" deve essere distinto anche da quello di "applicazione". Quest'ultimo termine, infatti, viene usato normalmente per intendere un "servizio" che l'utente finale può usufruire, a prescindere dal fatto che questo sia realizzato da un programma solo o da una collezione di programmi.

Al giorno d'oggi è raro che un programma sia adatto ad essere eseguito direttamente da un elaboratore; infatti, di norma esso richiede una macchina virtuale che comprende l'hardware dell'elaboratore con l'aggiunta di uno o più livelli di software che contribuiscono a creare l'ambiente di esecuzione adatto per il programma stesso.

Il solo linguaggio che è direttamente compreso da un elaboratore, e quindi direttamente eseguibile da questo, è il *linguaggio macchina*.

I linguaggi macchina sono formati da istruzioni elementari, che vengono codificate in forma numerica e che consentono di effettuare operazioni aritmetiche, conversioni di bit e poco altro. Scrivere programmi in tale linguaggio è quindi estremamente difficoltoso: un'operazione basilare può richiedere anche tre o quattro istruzioni; avendo così la necessità di scrivere parecchio codice anche per i programmi più semplici. Il fatto che tale codice sia solamente numerico comporta inoltre grosse possibilità di errori e difficoltà nell'individuarne. È necessario inoltre avere continuamente a che fare con le caratteristiche fisiche della macchina in cui si programma: bisogna ad esempio specificare manualmente gli indirizzi di memoria in cui salvare le informazioni e i registri del processore in cui mantenere i dati temporanei.

Infine, ogni computer può comprendere solo il proprio linguaggio macchina, poiché esso è diverso da processore a processore. Esiste quindi anche lo svantaggio di dover *riscrivere interamente* un programma per farlo funzionare su piattaforme differenti.

Per tali ragioni, ormai dagli anni 50 si sono sviluppati linguaggi di programmazione più evoluti, contrapposti al linguaggio macchina, che sono facilmente comprensibili per il programmatore e sono anche in grado di rendere un programma portabile di piattaforma in piattaforma.

Possiamo pertanto suddividere i linguaggi di programmazione in *livelli*, a seconda di quanto essi sono vicini al linguaggio macchina (*linguaggi a basso livello*) o al linguaggio umano (*linguaggi ad alto livello*):

1. *Linguaggio macchina*. Le operazioni disponibili sono soltanto quelle direttamente fornite dall'hardware; ogni operazione è codificata da una sequenza di bit e ogni dato è indicato dall'indirizzo binario della parola di memoria in cui è memorizzato. Un programma in linguaggio macchina è una sequenza di bit che viene direttamente interpretata dall'hardware.
2. *Linguaggio assembler*. Le operazioni sono, come nel linguaggio macchina, soltanto quelle direttamente fornite dall'hardware, tuttavia nel linguaggio assembler queste sono indicate da nomi convenzionali, quindi sono facili da ricordare; inoltre, anche i dati sono di facile

utilizzo in quanto sono indicati da nomi. Il programma, per essere eseguito, viene tradotto in linguaggio macchina da un programma traduttore detto assemblatore.

3. *Linguaggi procedurali*. Le operazioni disponibili sono ampie ed estendono quelle fornite dall'hardware. I dati sono indicati in modo totalmente indipendente dalla loro memorizzazione. Si tratta di linguaggi progettati affinché la scrittura dei programmi sia semplice e di facile comprensione e verifica da parte degli utenti umani. Per essere eseguito, un programma scritto in un linguaggio procedurale deve essere tradotto in linguaggio macchina da un programma traduttore detto *compilatore*, oppure deve essere eseguito (o meglio, *interpretato*) da un altro programma che prende in nome di *interprete*.

   Il compilatore è un programma che esegue la traduzione, producendo il programma oggetto, ossia una sequenza di istruzioni macchina. Il compilatore segnala anche eventuali errori di sintassi nella scrittura del programma sorgente.

   Un interprete è un programma che non produce alcun programma oggetto, ma legge il ogni istruzione del programma sorgente e genera le istruzioni macchina corrispondenti, che vengono passate all'hardware per l'esecuzione.

   In un programma compilato, la traduzione avviene una sola volta, e poi il programma oggetto può essere eseguito quante volte si vuole. In un programma interpretato, la traduzione avviene tutte le volte che si esegue il programma.

   Linguaggi procedurali di rilievo sono (o sono stati) FORTRAN, COBOL, BASIC, Pascal, C. Tra i linguaggi procedurali alcuni sono detti orientati agli oggetti; tra questi ricordiamo C++ e Java.

Algebra di Boole.

In matematica ed informatica, le algebre booleane sono strutture algebriche che rivestono una notevole importanza in quanto "catturano l'essenza" degli operatori logici AND, OR e NOT consentendo di trattare in termini esclusivamente algebrici le operazioni insiemistiche dell'intersezione, dell'unione e della complementazione e permettono di trattare in termini algebrici questioni riguardanti singoli bit (0 e 1), sequenze binarie e altre funzioni binarie.

Sono state definite da George Boole, un matematico inglese dell'University College di Cork, che per primo, verso la metà del XIX secolo, le ha definite come componenti di un sistema logico. In particolare, l'algebra booleana era un tentativo di usare le tecniche algebriche per elaborare le espressioni nel calcolo proposizionale. Oggi, le algebre booleane trovano molte applicazioni, tra le quali la progettazione dei circuiti elettronici.

Gli operatori dell'algebra booleana possono essere rappresentati in vari modi. Spesso sono scritti semplicemente come AND, OR e NOT. In matematica spesso si usa "+" per OR e "×" per AND (poiché per alcuni versi queste operazioni sono analoghe alla somma ed al prodotto in altre strutture algebriche), mentre si rappresenta il NOT con una barra segnata sopra l'espressione che viene negata.

La logica binaria

Un computer è in grado di eseguire operazioni logiche utilizzando l'algebra di Boole. Tale algebra consiste di un insieme di regole per la valutazione della veridicità dei predicati. Un predicato è una condizione che può assumere soltanto due valori: "*vero*" e "*falso*", che nell'algebra di Boole sono associati rispettivamente ai simboli "1" e "0".

Un predicato può essere assimilato ad una frase. Ad esempio, se si considera il predicato "Mario mangia una mela", esso può risultare "vero" ("1") o "falso" ("0") dipendentemente dal fatto che Mario stia effettivamente mangiando una mela o meno. Un'altro esempio di predicato può essere "Luigi cammina per la strada". In genere i predicati con cui il sistema ed i programmi avranno a che fare, saranno del tipo "Il valore contenuto all'indirizzo di memoria 1034293 è 35" oppure "La somma dei valori contenuti agli indirizzi di memoria 2470234 e 2470238 è maggiore di 20".

Le operazioni logiche di base sono tre: la *congiunzione*, la *disgiunzione* e la *negazione*.

Congiunzione

L'operazione di congiunzione logica, indicata in genere con i simboli "∧" o "×", è un'operazione binaria (ovvero ha due operandi) ed è equivalente alla congiunzione "*e*" nella valutazione della veridicità di una frase, tanto che viene denominata anche con il nome *AND*. Quindi il predicato

$$A \wedge B$$

che rappresenta la congiunzione di due predicati A e B, risulterà vero soltanto quando lo saranno entrambi i predicati A e B.

L'operazione di congiunzione logica è pertanto così definita:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disgiunzione

L'operazione di disgiunzione logica, indicata in genere con i simboli "∨" o "+", è un'operazione binaria (ovvero ha due operandi) ed è equivalente alla congiunzione "*o*" nella valutazione della veridicità di una frase, tanto che l'operazione viene denominata anche con il nome *OR* . Quindi il predicato

$$A \vee B$$

che rappresenta la disgiunzione di due predicati A e B, risulterà vero quando lo sarà uno dei due predicati A o B.

L'operazione di disgiunzione logica è pertanto così definita:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Negazione

L'operazione di negazione logica, indicata in genere con il simbolo "—"(posto sopra il predicato considerato), è un'operazione unaria (ovvero ha un solo operando) ed è equivalente alla negazione "*non*" nella valutazione della veridicità di una frase, tanto che l'operazione viene denominata anche con il nome *NOT*. Quindi il predicato

$$\bar{A}$$

che rappresenta la negazione di un predicato A, risulterà vero quando sarà falso il predicato A e falso quando il predicato A sarà vero.

L'operazione di negazione logica è pertanto così definita:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Tavole di verità

Le tabelle della verità sono tabelle matematiche usate nella logica per determinare se, una volta attribuiti i valori di verità alle proposizioni che la compongono, una determinata proposizione è vera o falsa.

Ad esempio, la seguente è una tabella di verità che rappresenta la funzione booleana *v* = (*x* AND *y*) OR (*x* AND *z*) OR (*y* AND *z*).

x	y	z	$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Capitolo 2

Qualunque concetto appartenente al contesto dell'informatica si può inquadrare in una fra le due seguenti categorie: hardware e software.

Hardware

Col termine *hardware* (letteralmente "ferramenta", in inglese) si indica la parte fisica, tangibile, di un personal computer, cioè tutti quegli elementi meccanici, magnetici, ottici ed elettronici che ne consentono il funzionamento. Tale termine deriva dalla fusione di due parole della lingua inglese, l'aggettivo *hard* (rigido, duro) ed il sostantivo *ware* (che indica un insieme di oggetti dello stesso tipo, oppure intesi per lo stesso scopo). La tastiera, il processore, la stampante, l'hard disk, i DVD, sono tutti esempi di hardware e saranno considerati in dettaglio nel seguito.

Il *software* rappresenta la parte complementare all'hardware. Infatti, l'aggettivo *soft* sta ad indicare non tanto la parte "morbida" in senso stretto, quanto piuttosto tutto quello che non è "hard" (tangibile), quindi il software è rappresentato dalle componenti immateriali, cioè l'insieme dei programmi che possono essere eseguiti dal computer. Ad esempio, il software comprende i programmi applicativi, i videogiochi, i sistemi operativi, ecc.

Lo scopo dell'hardware è quello di realizzare un certo numero di funzioni di base, come la visualizzazione delle informazioni, oppure la loro conservazione, e così via. Il software, invece, rappresenta la "logica" che sta dietro le funzioni "fisiche" realizzate a mezzo dell'hardware. In questo modo il computer si rivela essere uno strumento polivalente, cioè in grado di svolgere un elevato numero di compiti anche diversi fra loro a partire da un certo numero di operazioni di base messe a disposizione dall'hardware, grazie alla specializzazione ottenuta tramite il software.

Infine, per meglio comprendere la differenza fra queste due fondamentali nozioni, si consideri l'esempio di un musicista che voglia eseguire un pezzo musicale. Egli ha a disposizione uno strumento, per esempio un pianoforte, ed uno spartito. In questo scenario semplicistico si può dire (non prendendo in considerazione il musicista stesso) che l'hardware è costituito dal pianoforte, in quanto tangibile e composto di parti fisiche. Tale hardware in questo caso realizza la funzione di emettere i suoni corrispondenti alle note musicali suonate. Il software, il programma che è "eseguito" dal musicista sul pianoforte è invece contenuto nello spartito, dove è codificato nella sequenza delle note sul pentagramma.

Architettura dell'elaboratore

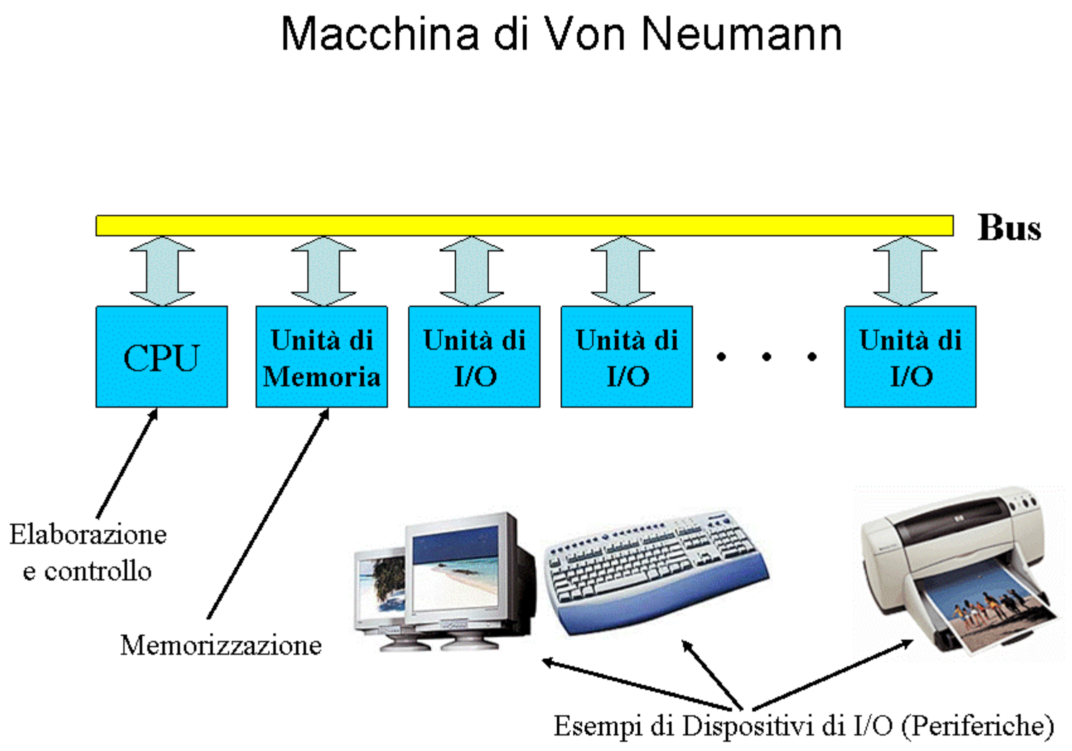
L'*architettura* di un elaboratore è rappresentata dall'organizzazione dell'hardware che lo costituisce, quindi comprende sia la tipologia e il numero delle parti fisiche che lo compongono, sia il modo in cui esse sono interconnesse al fine di realizzare le funzioni principali dell'elaboratore.

Essa, pertanto, costituisce un modello logico di funzionamento di un computer, da cui si ricava lo schema di progettazione degli elaboratori. L'architettura attualmente utilizzata per la realizzazione dei moderni computer è quella che prende il nome dal matematico John Von Neumann, si parla infatti di *Macchina di Von Neumann*.

Macchina di Von Neumann

Lo schema della macchina di Von Neumann si basa su quattro componenti principali:

1. CPU (Central Processing Unit) o Unità Centrale di Elaborazione. Essa ha lo scopo di eseguire i comandi e le funzioni fisiche rappresentati dai programmi. Si compone a sua volta di due parti:*Unità Operativa*, in cui uno dei sottosistemi più rilevanti è l'ALU (Arithmetic Logic Unit) ed *Unità di Controllo* (CU).
2. Unità di memoria, che hanno il compito immagazzinare e permettere il recupero delle informazioni usate dall'hardware per il suo funzionamento (programmi, dati, ecc.). Si distingue in *memoria principale* (anche detta memoria "centrale"), intesa come memoria di lavoro e *memoria secondaria* (anche detta memoria "di massa"), intesa come memoria di archiviazione permanente;
3. Unità di ingresso (input) e uscita (output), ovvero dispositivi tramite cui i dati sono inseriti (tipicamente dall'utente) nel calcolatore per essere elaborati, e dispositivi attraverso cui i dati elaborati possano essere restituiti all'utente;
4. Bus, un canale di comunicazione che permette l'interconnessione di tutti i componenti dell'architettura.



La macchina di Von Neumann funziona secondo il seguente schema generale: le informazioni sono inserite dall'utente attraverso i dispositivi di input. Il bus trasmette tali informazioni in memoria (centrale), da dove la CPU può prelevarle (sempre sfruttando il bus come canale di collegamento) al fine di procedere alla loro elaborazione. Al termine di questo passo fondamentale, la CPU pone il risultato dell'elaborazione nuovamente nella memoria centrale per procedere poi con ulteriori letture di dati ed elaborazioni successive. La memoria di massa è utilizzata allorquando si desidera porre i risultati ottenuti dalla CPU in un luogo in cui possano rimanere permanentemente, ovvero per periodi di tempo anche successivi allo spegnimento del computer. Al termine di tutte le elaborazioni, quando si giunge alla determinazione del risultato finale, i dati ottenuti sono presentati all'utente sfruttando i dispositivi di output.

Si noti che nonostante tale schema sia stato sviluppato negli anni ‘40, esso è ancora attuale, difatti è diventato il paradigma per la progettazione dei moderni personal computer.

Adesso si farà qualche ulteriore considerazione sull’architettura di Von Neumann. Tipicamente, essa presenta una molteplicità di unità di ingresso o di uscita, che a volte si suole inserire in un’unica categoria, indicata col termine di “periferiche”. Inoltre, quando ci si riferisce all’unità di memoria spesso si intende la sola memoria principale (la memoria centrale, o RAM), mentre le memorie di massa (come ad esempio l’Hard Disk o i lettori di DVD) sono talvolta considerate semplici dispositivi di I/O. Il motivo di ciò è essenzialmente tecnologico e deriva dal fatto che i dati da elaborare devono comunque essere caricati in memoria centrale, siano essi provenienti dalla tastiera (che è un tipico dispositivo di input) o da un file residente sull’hard disk.

Nel seguito si considereranno in dettaglio le diverse componenti della macchina di Von Neumann.

CPU

L’unità centrale di elaborazione (Central Processing Unit, CPU) è realizzata mediante un microprocessore, cioè un circuito elettronico integrato (*chip*) comprendente un notevole numero di transistor (attualmente, decine o anche centinaia di milioni).

Il principale compito della CPU è quello di leggere dalla memoria centrale le istruzioni ed i dati, eseguire le istruzioni al fine di ottenere l’elaborazione dei dati ed infine scrivere in memoria i risultati ottenuti; tali risultati dell’esecuzione dipendono inoltre dal tipo di dato oggetto dell’istruzione e dallo stato interno della CPU stessa, che tiene anche traccia di come si evolve il flusso di esecuzione.

La CPU si compone di due parti:

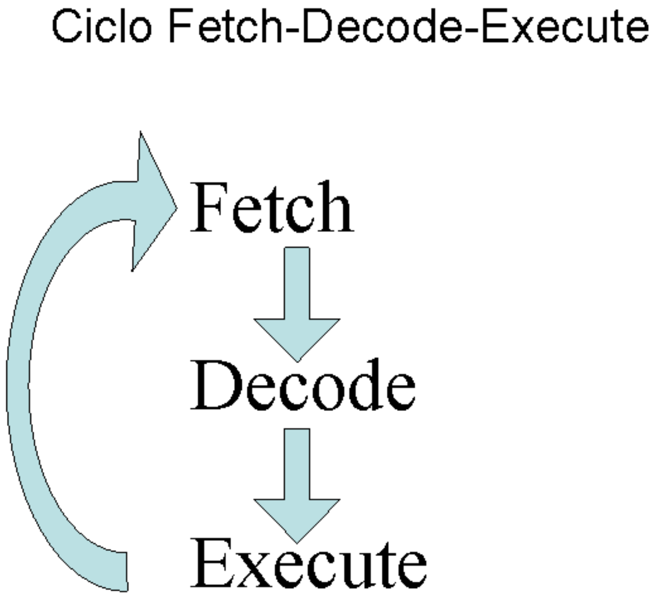
- una Unità Operativa, comprendente principalmente l’Unità Aritmetico-logica (ALU, da Arithmetic Logic Unit) che si occupa di eseguire le operazioni logiche derivanti dall’algebra di Boole, quelle di confronto fra i numeri e quelle aritmetiche;
- una Unità di Controllo (CU, da Control Unit) che legge dalla memoria le istruzioni da eseguire, se occorre legge anche i dati associati all’istruzione letta, esegue l’istruzione e memorizza l’eventuale risultato, scrivendolo in memoria o in un registro della CPU.

Inoltre, la CPU contiene al suo interno un certo numero di *registri*, speciali memorie di limitata capienza cui è possibile accedere molto più rapidamente che alla memoria centrale. Si segnalano due registri importanti che sono il registro IP (Instruction Pointer) (detto anche PC, da Program Counter), che contiene l’indirizzo in memoria della prossima istruzione da eseguire, ed il registro di stato, che non contiene valori numerici convenzionali, ma segnala stati (cioè situazioni) particolari in cui la CPU si trova, come le informazioni sul risultato dell’ultima operazione eseguita.

Il funzionamento della CPU è strettamente connesso a quello della CU, che, dall’accensione del computer sino al suo spegnimento, esegue senza sosta una serie di operazioni cicliche denominate “Ciclo macchina”, o anche “Ciclo Fetch-Decode-Execute”. Il Ciclo macchina si compone, difatti, di tre fasi fondamentali:

1. La fase di Fetch (caricamento) produce il caricamento della prossima istruzione da eseguire. L’istruzione si trova nella memoria centrale nella forma di un codice in linguaggio macchina (ovvero una sequenza di simboli binari, 0 oppure 1) che rappresenta le operazioni interpretabili da parte della CPU e dovrà essere eseguito dalla stessa utilizzando i registri e la ALU.
2. La fase di Decode (decodifica delle istruzioni e preparazione degli operandi) raccoglie gli eventuali operandi necessari a svolgere l’istruzione corrente (es. gli addendi di una somma, un indirizzo di memoria da incrementare, ecc.).

3. La fase di Execute (esecuzione) consiste nell’eseguire effettivamente l’istruzione corrente sugli operandi. Ciò tipicamente avviene sfruttando la ALU e/o i registri.



Al termine di ciascuna ripetizione del ciclo, la CPU verifica se vi sono state delle *interruzioni*. Esse sono segnalate attraverso il registro di stato e rappresentano situazioni che richiedono “l’attenzione” della CPU, che deve interrompere il compito attuale per dedicarsi ad esse. Successivamente il ciclo riprende a partire dalla fase di Fetch per procedere all’esecuzione della successiva istruzione.

Nonostante questo procedimento sia strettamente sequenziale, grazie al meccanismo delle interruzioni, un processore che sia controllato da un sistema operativo *multitask* è capace di alternare l’esecuzione di programmi differenti (es. videoscrittura, posta elettronica, ecc.). Poiché il passaggio dall’esecuzione del codice di un programma a quello di un altro avviene in tempi molto rapidi (dell’ordine di millesimi di secondo), l’utente avrà l’impressione che i programmi siano eseguiti contemporaneamente.

Memorie

Nel contesto dell’architettura di Von Neumann, la memoria è l’unità del computer destinata a conservare informazioni per un certo periodo di tempo. La memorizzazione di informazioni in memoria, e il successivo recupero delle medesime, sono operazioni fondamentali per il funzionamento del computer.

Una memoria può essere considerata in astratto come una sequenza finita di contenitori di dati (celle). Ogni cella contiene un bit, cioè un valore numerico binario che può essere 0 oppure 1. Tipicamente i bit si considerano a gruppi di 8 (detti *byte*) o di multipli di 8 (ad esempio, *word* di 16 bit, *double-word* di 32 bit; *quad-word* di 64 bit, ecc.). I gruppi di celle (nei moderni PC, le double-word o le quad-word) sono dette “locazioni di memoria” e ciascuna è individuata da un preciso indirizzo, espresso tramite un numero intero positivo. Quindi si può considerare la memoria come una sequenza finita di locazioni, ciascuna avente una certa dimensione (espressa in numero di bit) ed associata ad un indirizzo numerico univoco e progressivo.

La seguente tabella rappresenta, a titolo di esempio, un piccolo frammento di memoria:

Indirizzo della locazione	Valore memorizzato (dimensione di 32 bit)
0	01010101010101010101010101010101
1	01111111010101010101111101010101
2	01010101010101010101111111110101
...	...

La memoria si misura in multipli del byte. Si distinguono infatti il Kilobyte (KB), pari a circa 1000 byte (esattamente 2^{10}=1024 byte), il Megabyte (MB), pari a circa un milione di byte (2^{20}=1024*1024 byte), il Gigabyte (GB), pari a circa un miliardo di byte (2^{30}=1024*1024*1024 byte). Si noti che poiché il computer usa il sistema binario (basato sui simboli 0 e 1) i multipli del byte sono potenze di due. Ciò spiega, ad esempio, perché un MB (pari a 2^{10} byte) sia differente da un milione di byte (che è pari a10^6 byte).

E' possibile classificare la memoria in due grandi categorie: memoria centrale e memoria di massa. Queste saranno esaminate nel seguito.

Memoria Centrale

La *memoria centrale* è la memoria principale del computer ed è costituita dalla RAM. Essa è utilizzata come memoria di lavoro, ovvero come memoria veloce dove immagazzinare temporaneamente i dati che sono necessari per l'elaborazione.

La RAM (acronimo di Random-Access Memory, memoria ad accesso casuale) è una tipologia di memoria caratterizzata dal permettere l'accesso diretto a qualunque indirizzo di memoria con lo stesso tempo di accesso. Si distingue infatti dalle memorie ad accesso sequenziale, come ad esempio i nastri magnetici, in cui per accedere (cioè per leggere o scrivere) ad un dato che si trova in una certa posizione, è necessario percorrere prima tutte le posizioni che precedono quella cercata a partire dall'inizio della memoria.

La RAM è realizzata mediante circuiti elettronici integrati, e pertanto è molto veloce. Inoltre, si tratta di una memoria *volatile*, cioè essa perde il proprio contenuto allo spegnimento del computer.

All'interno della RAM sono memorizzati tipicamente i programmi che l'utente vuole eseguire (ad esempio software di videoscrittura) e i dati utilizzati da tali programmi (come i documenti).

Un altro tipo di memoria, spesso associata alla nozione di memoria centrale, è la memoria ROM (acronimo di Read-Only Memory, memoria a sola lettura) che è una memoria non volatile o anche detta *permanente* (memoria in grado di mantenere memorizzati i dati anche in assenza di alimentazione elettrica) contenente informazioni memorizzate dal costruttore e che sono necessarie per il buon funzionamento del computer (come ad esempio il BIOS, Basic Input-Output System, che contiene i programmi di avvio) e pertanto non devono essere modificate dall'utente.

La memoria *cache* (dal termine francese *caché* che significa "nascosto") è un tipo di memoria non volatile come la RAM, ma molto più veloce (e quindi più costosa) di questa. Per tale ragione, la dimensione della memoria cache è tipicamente molto piccola in confronto a quella della RAM. La cache funge da intermediario fra CPU e RAM. Ad esempio, quando la CPU effettua un accesso (in lettura o scrittura) ai dati contenuti nella RAM, la porzione di memoria che li contiene è copiata nella cache. In tal modo, successive letture da parte della CPU degli stessi dati, o anche di dati spazialmente "vicini", potranno avvenire sfruttando la copia presente in cache, cosa che avverrà in un intervallo di tempo sensibilmente inferiore a quello richiesto per leggere gli stessi dati dalla RAM. Nel caso tali dati non si trovino in cache, la ricerca degli stessi è ripetuta nella RAM (pagando un costo maggiore in termini di tempo).

La memoria cache riesce a migliorare le prestazioni della memoria centrale in quanto il suo funzionamento si basa su un principio generale, detto *principio di località*. Esso afferma che le informazioni usate più di recente dalla CPU (località *temporale*) e quelle che si trovano in posizioni (intese come indirizzi di memoria) vicine (località *spaziale*), saranno utilizzate in futuro dalla CPU con alta probabilità.

Memoria di massa

La memoria secondaria o *memoria di massa*, ha la caratteristica principale di essere "non volatile", ovvero presenta la possibilità di memorizzare i dati permanentemente, cioè anche in assenza di alimentazione elettrica (per questo motivo è definita anche "memoria di archiviazione"). Essa ha un costo sensibilmente inferiore rispetto alla memoria centrale, ma è anche molto più lenta, ragion per cui nei moderni computer la RAM è utilizzata come memoria temporanea di lavoro, mentre la memoria di massa è finalizzata essenzialmente all'archiviazione dei dati e dei programmi.

I principali rappresentanti di questa categoria di memoria sono gli hard disk e i supporti di memorizzazione rimovibili come dischi floppy, CD, DVD, nastri magnetici, memorie flash, ecc. I più importanti fra tali supporti sono descritti nel seguito.

Hard Disk

L'*hard disk*, anche chiamato disco rigido o disco fisso, è un dispositivo di memorizzazione di massa che utilizza uno o più dischi magnetici sovrapposti per l'archiviazione dei dati.

E' costituito da uno o più dischi, rivestiti da una superficie di materiale ferromagnetico (cioè in grado di mantenere una polarizzazione magnetica permanente). I dischi sono sovrapposti e vengono mantenuti in rapida rotazione da un motore elettrico. Inoltre vi sono due testine per ogni disco (una per lato). Le testine sono usate per leggere e scrivere i dati, rispettivamente rilevando o modificando lo stato di magnetizzazione della superficie del disco. Ciascuna testina rimane sollevata sulla superficie del disco ad una distanza molto piccola (dell'ordine dei nanometri, cioè dei miliardesimi di metro) grazie al cuscino d'aria prodotto dalla rotazione degli stessi dischi. I valori di rotazione comunemente riscontrabili negli hard disk in commercio sono 5.400, 7.200, 10.000 e 15.000 giri al minuto. Chiaramente, ad una maggiore velocità di rotazione corrisponde una maggiore velocità di lettura/scrittura dei dati.

Il disco rigido è una delle tipologie di dispositivi di memoria di massa attualmente più utilizzate, caratterizzato da elevate prestazioni (velocità di trasferimento dei dati), affidabilità (resistenza ai guasti) e capacità (valori tipici si aggirano intorno ai 1000 Gigabyte). Le informazioni possono essere memorizzate sulla superficie del disco a seguito di un'operazione, detta *formattazione*, che organizza il cerchio di ciascun disco in corone circolari concentriche (tracce) e ciascuna traccia in settori. All'interno di questi ultimi sono memorizzate le informazioni.

Floppy Disk

Il *floppy disk* è costituito da un unico disco rivestito di materiale ferromagnetico, tipicamente conservato dentro un involucro di plastica flessibile (da cui il termine "floppy") o rigida.

A differenza dall'hard disk, il floppy disk consiste del solo supporto di memorizzazione. Tutta la meccanica (motore, testine, ecc.) necessaria per le operazioni di lettura/scrittura è denominata *drive* e si annovera fra le periferiche di ingresso/uscita. Tipici valori di capacità sono dell'ordine dei Megabyte. I floppy disk sono importanti solo per ragioni di compatibilità con i vecchi computer, in quanto oggi sono stati sostituiti dalle memorie flash.

CD, DVD

Sono costituiti da un disco di plastica trasparente, incollato nella parte superiore ad un sottile foglio metallico. Le informazioni sono memorizzate come sequenze di "dossi" e "cunette" (in inglese “pits” e “lands”) successivamente letti per mezzo di laser in grado di distinguere l’uno dall’altro a seconda di come il fascio laser viene riflesso dalla superficie del disco. La memorizzazione può avvenire attraverso un processo di “stampa” (tipicamente solo in fabbrica e per grandi quantità) oppure utilizzando un *masterizzatore*, che sfrutta il laser per opacizzare (“bruciare”) determinate zone della superficie del disco, che, alternate a quelle trasparenti, rappresenteranno la sequenza dei dati memorizzati.

Si distinguono i CD (Compact Disk) dai DVD (Digital Versatile Disk). I primi possono immagazzinare al massimo 700 Megabyte. I DVD sono caratterizzati da una capienza che parte da 4,7 Gigabyte per arrivare ad un massimo di circa 17 Gigabyte. In questi supporti la capacità è privilegiata rispetto alla velocità di trasferimento dei dati; per tale ragione i dati sono organizzati su un percorso a spirale che, partendo dal centro del supporto giunge al bordo esterno.

Memorie Flash

E’ un tipo di memoria non volatile, a lettura-scrittura e a stato solido (è costituita da transistor), pertanto non presenta alcuna parte mobile ed è resistente agli urti. Inoltre, è leggera e di dimensioni ridotte. La capacità massima è attualmente di circa 64 Gigabyte. Uno svantaggio di questo tipo di memoria è che il numero massimo di scritture permesse è limitato (circa 100.000 nel caso migliore). Ciò implica che il ciclo di vita di questi dispositivi può divenire tanto più breve quanto più spesso si utilizzano.

Bus

Il bus, nel contesto della macchina di Von Neumann, è un canale che permette ai componenti del sistema (CPU, Memoria, Dispositivi di I/O) di comunicare tra loro. Tali componenti sono connessi fisicamente al bus in vari modi: le connessioni elettriche possono essere realizzate direttamente su circuito stampato (ad esempio sulla scheda madre, la scheda elettronica principale presente all’interno del computer) oppure tramite un apposito cavo.

Tipi di Bus

Il bus principale, presente in tutti i computer, è il bus di sistema, suddiviso in tre bus minori:

- Bus dati
- Bus indirizzi
- Bus di controllo

Bus dati

E’ il bus sul quale transitano le informazioni scambiate fra la CPU e la memoria o anche fra la CPU e le periferiche di ingresso/uscita.

Bus indirizzi

E’ il bus attraverso il quale la CPU stabilisce in quale indirizzo di memoria andare a scrivere o a leggere le informazioni. Dopo aver specificato l’indirizzo tramite questo bus, la scrittura o lettura avviene normalmente tramite il bus dati. Questo bus è fruibile in scrittura solo dalla CPU ed in lettura dagli altri componenti.

Bus di controllo

Il bus di controllo è un insieme di collegamenti utilizzato per trasmettere segnali di controllo che permettono di coordinare le attività del sistema. La CPU usa tali segnali di controllo per selezionare le componenti coinvolte in un trasferimento di dati, specificando se si tratta di un operazione di lettura o scrittura.

Ad esempio, quando la CPU vuole leggere il contenuto della cella di memoria RAM avente indirizzo 1000, deve scrivere sul bus indirizzi il numero 1000, specificando attraverso il bus di controllo sia l'operazione che si vuole effettuare ("lettura" in questo caso) che il dispositivo da cui si vuole leggere (la RAM). A questo punto, la CPU potrà leggere il contenuto della cella con indirizzo 1000 direttamente dal bus dati.

Dispositivi di Input/Output

Il bus permette inoltre il collegamento di numerosi dispositivi di Ingresso/Uscita (I/O). Tali dispositivi, detti *periferiche*, espandono le funzionalità del computer permettendo lo scambio di dati con l'ambiente esterno.

Si distinguono tre tipologie di periferiche:

- Periferiche di ingresso
- Periferiche di uscita
- Periferiche di ingresso/uscita

Periferiche di Ingresso

Questi dispositivi permettono l'inserimento di informazioni nel computer. Ad esempio, si ricorda la tastiera, il mouse, o il touchpad che permettono di impartire comandi al computer. Nel seguito si passerà in rassegna le periferiche di ingresso più importanti.

Tastiera

Essa è un insieme di tasti, ciascuno associato ad un simbolo grafico (detto "carattere") o numerico. Deriva dalle antiche macchine da scrivere e si utilizza per inserire informazione testuale nel computer. La pressione di un determinato tasto corrisponde ad un impulso elettrico che viene inviato alla CPU. A questo punto è possibile visualizzare il carattere digitato (ad esempio nei programmi di videoscrittura) oppure eseguire un'azione corrispondente al tasto premuto (per esempio la cancellazione, a seguito del tasto "Canc"). La disposizione dei caratteri sulla tastiera prende il nome di layout di tastiera e dipende principalmente dalla lingua utilizzata dall'utente. Difatti, una tastiera italiana presenterà caratteri accentati, una tedesca il simbolo della dieresi (umlaut), ecc.

Mouse, Touchpad

Sono dispositivi di puntamento. Nei moderni sistemi operativi con interfaccia grafica, si usano per controllare la posizione di un *puntatore*, un oggetto grafico (tipicamente a forma di freccia) che si utilizza per accedere a programmi e documenti. Il *mouse* presenta una pallina nella parte inferiore (mouse meccanico) che rotola in corrispondenza dello spostamento del dispositivo su una superficie piana. La direzione e l'entità dello spazio percorso dalla pallina sono rilevati attraverso due sensori (orientati secondo assi ortogonali) e tradotti in corrispondenti segnali elettrici. Nei mouse ottici la pallina è sostituita da un emettitore luminoso e da un sensore ottico che rileva spostamento del dispositivo sulla superficie di lavoro. Inoltre è presente una serie di pulsanti (due o tre) che permettono di attivare funzioni sugli oggetti dell'interfaccia grafica, come selezione, copia, ecc. Il *touchpad* è una superficie che, grazie ad una serie di sensori, rileva il movimento del dito attraverso una misura di capacità elettrica. In tal modo muovendo la punta dell'indice sul touchpad si controlla il puntatore. In aggiunta sono presenti alcuni pulsanti associati a specifiche funzioni (es. per selezionare un oggetto).

Scanner
E’ un dispositivo che permette l’acquisizione, attraverso l’utilizzo di sensori ottici, di una superficie piana (come pagine, fotografie, disegni, e così via). Ciò avviene sfruttando un sensore ottico che rileva la luce riflessa sulla superficie da una lampada fluorescente. Infatti, la luce viene riflessa completamente dalle zone chiare della superficie da acquisire, ed assorbita da quelle scure. Questa operazione, che termina con l’invio al computer dell’immagine in formato digitale (ovvero come sequenza di numeri), si dice “scansione”. Successivamente, sarà possibile per l’utente modificare tale immagine utilizzando programmi di grafica oppure, nel caso di una scansione di una pagina di testo, sarà possibile convertirla in un documento di testo (es. per Microsoft Word) mediante programmi di riconoscimento ottico dei caratteri (OCR).

Lettore Ottico
E’ costituito da un dispositivo a forma di una penna, che, fatta strisciare sul codice a barre stampato sui prodotti in commercio, grazie ad un sensore ottico, ne rileva il codice numerico corrispondente e lo associa alla descrizione e al prezzo del prodotto. Questa operazione di riconoscimento è effettuata in base allo spessore delle barre e allo spazio tra le stesse. In dettaglio, il lettore si limita ad associare al prodotto in esame un codice numerico univoco; le informazioni sul prezzo e la descrizione sono tipicamente reperite all’interno di un archivio elettronico (o una base di dati).

Webcam
Una webcam è una piccola telecamera (costituita essenzialmente da una lente e da un sensore di acquisizione di immagine) che trasmette al computer le immagini riprese. Il principale utilizzo delle webcam consiste nella possibilità di impiegarle per realizzare una videoconferenza attraverso il Web o altri sistemi basati su Internet come molte applicazioni di chat, messaggistica istantanea o video-telefonia (es. Skype).

Lettore Biometrico
Un lettore biometrico è un dispositivo simile ad uno scanner, ma di dimensioni molto più ridotte, che permette la scansione dell’impronta digitale del polpastrello. In tal modo è possibile risparmiare all’utente la fatica di dover digitare password d’accesso al computer, limitandosi egli pertanto a strisciare il dito sul sensore, che ha le dimensioni di un’unghia ed è comunemente disponibile sui computer portatili. Oltre alla maggiore semplicità d’uso, tale dispositivo garantisce un’elevata sicurezza nell’accesso a dati personali, in quanto si suppone che non esistano due individui con le stesse impronte digitali.

Microfono
E’ un dispositivo che, convertendo le onde sonore in onde elettriche, permette all’utente di inserire nel computer informazioni di tipo sonoro, come commenti vocali a diapositive, registrazioni di eventi (convegni, lezioni universitarie, ecc.). Queste informazioni sono convertite dal microfono in una sequenza di segnali elettrici analogici, ma prima di poter essere elaborate dal computer devono essere convertite in formato digitale da parte di un opportuno dispositivo (detto convertitore analogico-digitale, in sigla ADC) presente nelle moderne schede sonore.

Periferiche di Uscita
Esse servono a presentare le informazioni all’utente, e più in generale a permetterne il trasferimento dal computer all’ambiente esterno. Si distinguono i seguenti principali dispositivi:

Monitor
E’ utilizzato per presentare le informazioni visualizzando testo e immagini su uno schermo. Due sono i principali tipi di monitor: a tubo catodico (CRT), il cui funzionamento è basato su un

principio simile a quello dei vecchi televisori, e a cristalli liquidi (LCD), in cui una sottile pellicola costituita da cristalli liquidi è in grado di diventare opaca o trasparente alla luce in dipendenza dell'applicazione di un campo elettrico. In entrambi i casi, i monitor ricevono dal computer un segnale elettrico che contiene le informazioni sull'immagine da visualizzare e la rappresentano come un insieme di punti colorati (detti pixel, dal termine inglese *picture element*, ovvero punto elementare). Tanto maggiore è il numero dei pixel visualizzabili sullo schermo (cosiddetta *risoluzione* grafica), tanto maggiore sarà la definizione dell'immagine.

Scheda video

Detta anche *scheda grafica*, è un dispositivo che serve a pilotare il monitor, inviandogli segnali elettrici che rappresentano l'informazione grafica da visualizzare. Le moderne schede grafiche integrano anche una CPU (avente capacità di calcolo paragonabile alla CPU del computer) ed una memoria dedicate, al fine di accelerare le prestazioni nel contesto delle applicazioni multimediali e delle simulazioni in tre dimensioni.

Stampante

Questo dispositivo di uscita permette di stampare testo o immagini elaborate dal computer. La stampa può avvenire su carta oppure su materiali di altro tipo (tessuto, ecc.). Le principali caratteristiche di una stampante sono la sua velocità (misurata in pagine al minuto) e la sua risoluzione (misurata come densità di pixel, in sigla DPI, da Dot per Inches – Punti per pollice).

Si distinguono i seguenti principali tipi di stampante, a seconda della tecnologia su cui si basa il processo di stampa:

- Stampanti ad aghi;
- Stampanti a getto di inchiostro;
- Stampanti laser.

Stampanti ad aghi

La stampa è realizzata, riga per riga, da una testina mobile, contenente 24 oppure 36 aghi, mossi da elettromagneti, che battono sulla carta mediante interposizione di un nastro inchiostrato, in modo simile a quanto avviene con le macchine da scrivere elettriche. Gli aghi colpiscono il nastro in modo tale da comporre i pixel che costituiscono i caratteri o la parte di un'immagine da stampare. Oggi questa tecnologia di stampa è obsoleta, sebbene sia ancora richiesta in alcuni settori (ad esempio nella pubblica amministrazione) poiché permette l'uso di modulistica realizzata con carta copiativa. Velocità tipica: 1 pag./min. Risoluzione tipica: 180 DPI.

Stampanti a getto di inchiostro

In questo tipo di stampanti, un gruppo di piccoli ugelli, posti su un carrello mobile, spruzzano micro-gocce di inchiostro sulla carta. L'immagine viene impressa procedendo riga per riga dall'alto verso il basso. Questa tecnologia è caratterizzata dai seguenti vantaggi: basso costo di produzione, silenziosità e buona resa cromatica. Velocità tipica: 15 pag./min. Risoluzione tipica: 1200 DPI.

Stampanti laser

Questa tecnologia deriva direttamente da quella comunemente implementata nelle fotocopiatrici. Un raggio laser infrarosso è proiettato su un tamburo fotosensibile, preventivamente elettrizzato, che si scarica laddove è colpito dal laser. L'elettricità statica residua sul tamburo attira il *toner*, una polvere sottile di pigmenti, che viene trasferito sulla carta. Il foglio passa poi sotto un rullo riscaldato ad elevata temperatura, che fonde il toner facendolo aderire alla carta. Velocità tipica: 20 pag./min. Risoluzione tipica: 600-1200 DPI.

Periferiche di Ingresso/Uscita

Si distinguono inoltre tipi di periferiche che si comportano come dispositivi sia di ingresso che di uscita. Si considerano nel seguito i più importanti dispositivi:

Scheda audio

Questa scheda, detta anche *scheda sonora*, permette sia l'emissione (output) attraverso le casse acustiche, che l'acquisizione (input) attraverso un microfono, di suoni e musica da parte del computer. Nel primo caso, la scheda emette segnali elettrici che corrispondono alle informazioni di tipo sonoro presenti nella memoria del computer, nel secondo caso convertono i segnali raccolti dal microfono in una sequenza di numeri che vengono memorizzati nella RAM, risultando disponibili alla CPU per l'elaborazione.

Drive

Il drive è una periferica destinata alla lettura e/o scrittura di un supporto di memoria. Nel caso tale supporto sia un floppy disk si parla di disk drive, invece nel caso di CD/DVD si parla di CD-ROM drive o DVD-ROM drive.

Il floppy disk drive (o semplicemente disk drive) è presente sulla maggior parte dei personal computer anche se negli ultimi anni sono utilizzati, per le operazioni di salvataggio e trasferimento dati, molto più spesso i CD, i DVD e le pendrive USB. E' costituito da un contenitore in cui si inserisce il floppy disk. Due testine (una per ciascun lato del disco) consentono la lettura/scrittura in modo simile a quanto avviene per gli hard disk.

Un CD-ROM drive o DVD-ROM drive (detto anche lettore CD o lettore DVD) è invece una periferica che consente solo la lettura del supporto corrispondente. La scrittura è consentita utilizzando un masterizzatore.

Drive per schede di memoria

Detto anche lettore di schede di memoria, è un dispositivo che permette di leggere (e scrivere) memorie a stato solido (memorie flash). Vi sono molti tipi di memorie flash, poiché tali supporti sono utilizzati principalmente come memoria di archiviazione per i dispositivi portatili come fotocamere digitali, telefoni cellulari, ecc. Attualmente sono molto diffusi i formati Secure Digital (SD), specialmente nelle versioni miniSD e MicroSD. I moderni lettori di schede di memoria integrano nella stessa unità gli ingressi per molti formati diversi.

Pendrive USB

E' un dispositivo che integra una memoria di massa portatile di dimensioni molto contenute (qualche centimetro in lunghezza e intorno al centimetro in larghezza), realizzata mediante l'uso di memoria flash, che si collega al computer attraverso un'interfaccia USB. E' il supporto che ha sostituito completamente i vecchi dischetti e attualmente compete per prestazioni (capacità e velocità) con CD e DVD.

Touchscreen

Questo dispositivo consente interagire con un computer toccando lo schermo. Lo si può considerare come l'unione di un dispositivo di output (lo schermo) e un dispositivo di input (il sistema che rileva il contatto con lo schermo stesso, ricavandone la posizione).

I primi schermi di questo tipo usavano raggi di luce infrarossa proiettati secondo una disposizione a griglia immediatamente sopra la superficie dello schermo. Appoggiando il dito allo schermo l'utente interrompeva alcuni fasci orizzontali e alcuni fasci verticali, consentendo così l'identificazione delle coordinate a cui era avvenuto il "contatto". I modelli moderni invece rilevano le coordinate del punto in cui avviene il contatto in modo simile ai touchpad, ovvero sfruttando variazioni di resistenza o capacità elettrica. Esistono infine gli schermi multi-touch, in grado di rilevare la contemporanea pressione da parte di più dita.

Le periferiche di cui si è parlato possono comunicare col computer in due modi: alcune sono direttamente collegate al bus (come ad esempio la scheda grafica, la scheda sonora); altre (come le stampanti, i monitor, ecc.) sono collegate al computer mediante opportuni adattatori, detti *interfacce*.

Interfacce

Un'interfaccia è un dispositivo che permette la comunicazione fra il computer ed una periferica, mediante la conversione dei segnali interni al computer in un formato comprensibile alla periferica. Infatti, i primi computer potevano essere collegati ("interfacciati") alle periferiche solo a patto che si potesse instaurare con esse un collegamento fisico, pertanto il termine "interfaccia" ha acquisito nel tempo anche il significato di "tipo di connettore" che permette di collegare al computer un certo dispositivo.

Una prima distinzione si può fare fra interfacce *seriali* e *parallele*, le prime garantiscono la trasmissione di un certo numero di byte un bit alla volta, le altre permettono di trasferire i bit a gruppi (tipicamente, un byte per volta).

Il concetto di interfaccia si riferisce anche ai collegamenti con i dispositivi posti all'interno del computer (come ad esempio gli hard disk). Si distinguono allora le interfacce *interne* e quelle *esterne*, le prime usate per connettere il bus con i dischi rigidi e dispositivi simili (ad esempio si citano le interfacce IDE, SATA, SCSI). Le interfacce esterne sono usate per collegare il bus del computer a dispositivi esterni ad esso: monitor (VGA), mouse e tastiera (PS/2), modem (RS-232), altri dispositivi (USB).

Interfaccia USB

Merita ulteriori cenni l'interfaccia USB (acronimo di Universal Serial Bus), che, introdotta nel 1996, oggi è diventata così diffusa che gli altri tipi di interfaccia esterna tendono a scomparire. Ciò significa che tutti quei dispositivi che un tempo necessitavano di interfacce proprie (come stampanti, tastiera, mouse, ecc.), oggi sono realizzati in modo tale da presentare un'interfaccia USB. Questo standard è caratterizzato da una elevata velocità e dalla possibilità di permettere di collegare/scollegare i dispositivi senza dover riavviare il computer (hot swapping).

Capitolo 3

Rappresentazione numerica dell'informazione

Un'*informazione* è una nozione, un fatto, un evento, portato alla conoscenza di un soggetto. Ad esempio, un'informazione può essere una definizione, come quella relativa al concetto di hardware ("l'insieme degli elementi fisici, tangibili del computer") oppure un fatto descritto da una proposizione del tipo "Mario Rossi abita a Milano in via Bixio al numero 25", o anche la proibizione desumibile dalla lettura di un segnale stradale (come un limite di velocità o un divieto di sosta). Un'informazione è descritta attraverso un *messaggio*, definito come una sequenza di *simboli* come le lettere dell'alfabeto, i segni di punteggiatura ed i numeri nei primi due esempi, ed anche come le figure rappresentate sui segnali stradali.

Al fine di permettere la rappresentazione mediante il computer di una tipologia di informazione è sufficiente individuare un metodo attraverso cui sia possibile rappresentare l'insieme dei messaggi corrispondenti a tale tipo di informazione. Poiché ciascun messaggio è decomponibile in simboli, è sufficiente che il computer rappresenti in qualche modo le sequenze di tali simboli.

Questo risultato si ottiene associando ogni simbolo oggetto della comunicazione ad una differente sequenza di bit, di lunghezza fissata a priori e (come si vedrà nel seguito) dipendente dal numero di simboli da rappresentare. Tale associazione fra simboli e sequenze di bit si definisce *codifica* ed è frutto di una convenzione, pertanto gli stessi simboli possono essere rappresentati in modo differente in dipendenza dalla codifica scelta. Tipicamente si fa uso di convenzioni uguali per tutti (cosiddetti *standard*), al fine di permettere lo scambio delle informazioni fra diversi computer.

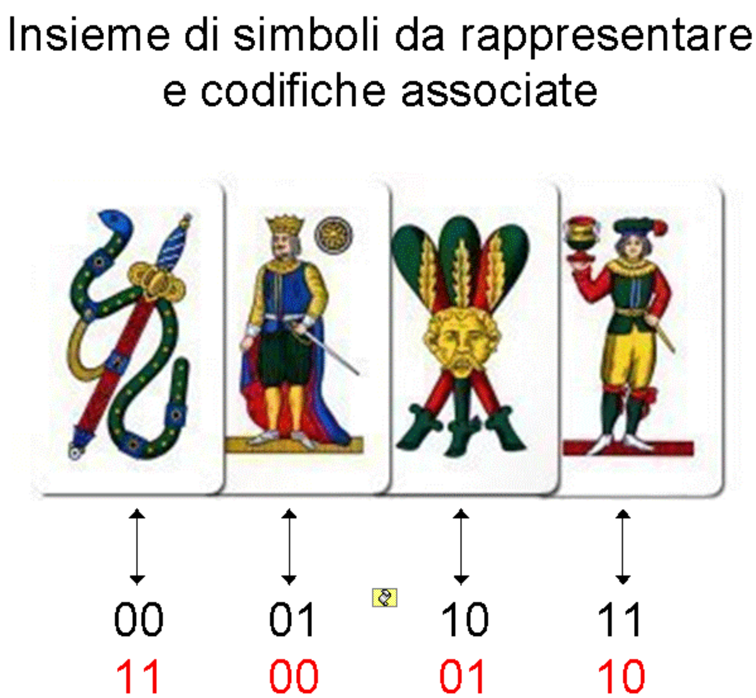
A questo punto è semplice comprendere che, fissata una codifica, sarà possibile utilizzare la RAM come supporto per rappresentare sequenze (dette *stringhe*) di simboli a mezzo di corrispondenti sequenze di bit.

In particolare, questo tipo di rappresentazione dell'informazione si dice *numerica*, o anche *digitale*, poiché ogni sequenza di bit (che è associata ad un simbolo) si può anche intendere come un numero espresso nel sistema binario, ovvero in base 2 (questo aspetto sarà descritto nel seguito). Pertanto si può dire che all'interno del computer l'informazione è codificata mediante sequenze di numeri espressi in base 2.

Adesso è necessario comprendere quanti bit debbano essere utilizzati per rappresentare ciascun simbolo. Questo dipende dal numero totale di simboli che si intendono rappresentare. Si consideri il seguente esempio: si voglia rappresentare l'insieme dei simboli costituito dai semi delle carte da gioco napoletane, *spade, denari*, *bastoni* e *coppe*.

Per determinare il numero minimo di bit necessari per rappresentare questi quattro simboli, si cominci con l'osservare che un unico bit non può essere sufficiente. Infatti, un bit, potendo assumere il valore 1 oppure il valore 0, permette di distinguere solamente fra due differenti simboli.

Se si considerano allora due bit, le configurazioni risultanti dalla loro composizione, ovvero le sequenze di bit che scaturiscono dalla loro combinazione saranno 00, 01, 10, 11. Queste quattro sequenze sono in numero sufficiente per rappresentare i quattro simboli dell'esempio. La codifica in questo caso potrebbe essere: spade = 00, denari = 01, bastoni = 10 e coppe = 11, ma si ripete che questo è frutto di una convenzione. Un'altra, altrettanto valida, codifica potrebbe essere la seguente: spade = 11, denari = 00, bastoni = 01 e coppe = 10.



Un concetto chiave della rappresentazione dell'informazione digitale è il numero di configurazioni rappresentabili mediante sequenze di bit. Infatti, se con un solo bit è possibile rappresentare solamente due simboli (o configurazioni) differenti, mettendo in sequenza *n* bit (dove $n > 1$ è finito) è possibile rappresentare un enorme numero di simboli, precisamente 2 elevato alla potenza di *n* simboli, che si scrive 2^n ed equivale a 2*2*...*2 (cioè 2 moltiplicato per se stesso *n* volte). La seguente tabella mostra la corrispondenza fra numero di bit e simboli rappresentabili per mezzo di tali bit.

Numero di bit (n)	**Simboli rappresentabili (2^n)**
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

Come si è detto precedentemente, esiste una precisa corrispondenza fra le sequenze di bit ed i numeri interi. Nel seguito sarà messa in luce tale relazione.

Rappresentazione in base diversa da 10

Il computer utilizza una rappresentazione interna molto semplice, costituita da sequenze di soli due valori numerici: 0 e 1. Questo tipo di rappresentazione si dice *binaria*, o anche *in base 2*, poiché sono solo 2 i “simboli base”, cioè le cifre, utilizzate in questo sistema numerico. Il motivo principale per cui la rappresentazione binaria è alla base del funzionamento del computer è il seguente: usare solo due valori rende possibile semplificare la realizzazione dell’hardware che dovrà gestire l’informazione rappresentata a mezzo di questi valori, ed infatti l’hardware è realizzato mediante i transistor, che sono dispositivi elettronici *bistabili*, cioè capaci di assumere e mantenere uno stato tra due configurazioni opposte (“acceso”, “spento”) come se fossero degli interruttori. Questi due stati permettono di rappresentare i corrispondenti valori contenuti nei bit.

Si è detto che il computer utilizza una rappresentazione binaria, ovvero all’interno della RAM, l’informazione è codificata attraverso sequenze finite di 0 e 1. Tale sistema in base 2 è equivalente a quello in base 10 (cioè fondato sull’uso di 10 cifre, da 0 a 9) utilizzato dagli esseri umani. E’ pertanto rilevante comprendere come si possa passare da un sistema all’altro e viceversa, in quanto su tale meccanismo di traduzione (conversione) si fonda quello dello scambio di informazioni fra uomo e macchina.

Il sistema numerico binario è un sistema numerico posizionale in base 2, cioè esso utilizza 2 simboli, tipicamente 0 e 1, invece dei 10 del sistema numerico decimale tradizionale.

Tale sistema è *posizionale* (come quello decimale) poiché la posizione delle singole all’interno di un numero sta a significare l’importanza (il “peso”) di quella cifra. Ad esempio, se si considera il numero 2561 in base 10, la posizione delle cifre permette di distinguere fra unità, decine, centinaia e migliaia. Infatti $2561 = 2*10^3 + 5*10^2 + 6*10^1 + 1*10^0 = 2*1000 + 5*100 + 6*10 + 1$. La cifra più a destra (che rappresenta 1 unità) si dice *cifra meno significativa*, quella più a sinistra è la *cifra più significativa* (che indica 2 migliaia).

Uno stesso numero acquisisce significati (valori) diversi a seconda del sistema numerico in cui è espresso. Ad esempio il numero 10 è letto “dieci” nel sistema decimale (base 10) e significa “1 decina e 0 unità” (si noti la corrispondenza diretta fra la posizione delle cifre ed il loro valore).

Nel sistema binario (base 2) lo stesso numero “10” si legge “uno zero” e vale “2”. Il motivo è semplice, poiché nel sistema binario le uniche cifre ammissibili sono 1 e 0, per rappresentare il numero 2 si scrive “10”, indicando 1 “coppia” (non “decina”, perché la base del sistema è due e non dieci) e 0 unità, che da come risultato 2. La seguente tabella mostra la corrispondenza fra valori binari e decimali.

Base 10	Base 2
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

Conversione da base 2 a base 10

Per convertire un numero da base 2 a base 10 è sufficiente effettuare una serie di somme e moltiplicazioni. Più precisamente, dato un numero *x* (avente *n* cifre) in base 2, si assegna un numero progressivo alle cifre procedendo da quella più a destra (cui si associa 0) a quella più a sinistra (cui si associa *n*-1). Questi numeri che vanno da 0 ad *n*-1 si chiamano *posizioni*. A questo punto, ogni cifra di *x* va moltiplicata per 2 elevato alla posizione corrispondente. I risultati delle moltiplicazioni si sommano per ottenere il risultato.

Esempio di conversione da base 2 a base 10 eseguita passo-passo

Sia dato il numero *x* = 10110 espresso in base 2 e lo si voglia convertire in base 10.

Si associa ad ogni cifra (partendo da destra, cioè dalla cifra meno significativa) la sua posizione (0, 1, ... , *n*-1, dove *n* sono le cifre che costituiscono *x*, quindi in questo caso *n* = 5) e si moltiplica ciascuna cifra per la potenza di 2 corrispondente, ottenendo la sommatoria:

$1*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0$

Adesso, ricordando che $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, si sostituiscono i risultati dell'elevazione a potenza, ottenendo la seguente semplificazione:

1*16 + 0*8 + 1*4 + 1*2 + 0*1

Effettuando le moltiplicazioni si ottiene la somma finale:

16 + 0 + 4 + 2 + 0

che fornisce come risultato 22.

Quindi, si vede che il numero 10110 (espresso in base 2), a seguito della conversione, vale 22 (espresso in base 10).

Conversione da base 10 a base 2

Per convertire un numero *x* da base 10 a base 2 si deve operare come segue.

Si divide *x* per 2 e si annota il resto della divisione. Si prosegue dividendo il quoziente ottenuto per 2 ed annotando a parte il resto. Si continua in questo modo finché non si ottiene un quoziente nullo. A questo punto ci si ferma e si trascrivono in ordine inverso i resti ottenuti dalle divisioni, ottenendo così il risultato.

Esempio di conversione da base 10 a base 2 eseguita passo-passo

Sia dato il numero *x* = 118 espresso in base 10 e lo si voglia convertire in base 2.

Si eseguono le divisioni per 2 e si annotano i resti, come descritto nella tabella seguente.

Divisione	Resto
118 ÷ 2 = 59	0
59 ÷ 2 = 29	1
29 ÷ 2 = 14	1
14 ÷ 2 = 7	0
7 ÷ 2 = 3	1
3 ÷ 2 = 1	1
1 ÷ 2 = 0	1

Il risultato si ottiene scrivendo in ordine inverso i resti ottenuti dalle divisioni, cioè partendo dall'ultimo resto ottenuto sino ad arrivare a quello ottenuto nella prima divisione.

Si ottiene il numero binario 1110110, che corrisponde a 118 (in base 10).

Si può eseguire la verifica effettuando la conversione da base 2 a base 10 del numero binario ottenuto (come visto nel paragrafo precedente).

Oltre alla base 2, in informatica ricorre spesso l'uso delle basi 8 e 16. La base 8 (sistema ottale) è usata principalmente per mantenere la compatibilità con le codifiche usate nel passato. Il sistema esadecimale (base 16) è utilizzato per ottenere una rappresentazione compatta di indirizzi di memoria e numeri interi, come ad esempio nel caso dei colori utilizzati nelle pagine web.

Al fine di evitare ambiguità, quando il contesto non permette di desumere quale sia la base utilizzata (2, 10, o un'altra ancora) per esprimere i numeri, essa è indicata esplicitamente mediante l'uso di pedici. Ad esempio, per descrivere il fatto che il numero 118 è espresso in base 10, si scrive 118_{10}. Analogamente, la scrittura 1000_2, indica il numero 1000 in base 2, che è equivalente a 8_{10}.

Nel seguito del capitolo si vedrà come rappresentare all'interno della memoria del computer informazione di tipo numerico, testuale, grafico e sonoro.

Rappresentazione di informazione numerica

Rappresentazione di numeri interi positivi

Questo tipo di rappresentazione è molto semplice, in quanto si tratta semplicemente di convertire un dato numero da base 10 a base 2 (utilizzando la tecnica vista precedentemente) e memorizzare la sequenza di bit così ottenuta nella RAM. Tipicamente si sceglie un formato di rappresentazione, ovvero il numero dei bit, multiplo di 8, utilizzato per rappresentare il numero intero dato. Pertanto, si parla di interi a 8 bit, 16 bit, 32 bit, 64 bit, ecc. La differenza fra questi formati sta nel fatto che ad un maggior numero di bit corrisponde la possibilità di rappresentare un numero intero più grande; ad esempio, con 8 bit è possibile rappresentare gli interi positivi da 0 fino a 255, poiché 2^8=256 e serve un simbolo per rappresentare lo 0. La tabella seguente mostra quale sia il numero intero positivo più grande rappresentabile utilizzando un fissato numero di bit (multiplo di 8).

Numero di bit	Max numero intero positivo rappresentabile
8	$2^8 - 1 = 255$
16	$2^{16} – 1 = 65.535$
32	$2^{32} – 1 = 4.294.967.295$
64	$2^{64} – 1 = 18.446.744.073.709.551.615$

Tuttavia questa non è la rappresentazione più efficiente, infatti in elettronica ed informatica è spesso utilizzata la rappresentazione BCD.

Binary-coded Decimal (BCD)

La codifica Binary-coded Decimal (BCD), ovvero “decimale codificato in binario” è un metodo utilizzato in informatica per rappresentare le cifre decimali in codice binario.

In questo formato ogni cifra di un numero è rappresentata da un codice binario di quattro bit (*nibble*), il cui valore è compreso tra 0 (0000) e 9 (1001). Le restanti sei combinazioni (si ricorda che con 4 bit si possono rappresentare fino a 16 diversi stati) possono essere usate per rappresentare simboli come +, -, ecc. Ad esempio il numero 127 è rappresentato in BCD come 0001, 0010, 0111.

Poiché il computer memorizza i dati nella RAM a gruppi di byte, con tale codifica è possibile memorizzare una cifra per byte e riempire i restanti quattro bit con zeri o uno, oppure memorizzare due cifre per ciascun byte, al fine di risparmiare spazio in memoria. Così ad esempio 0127 si potrebbe rappresentare con i seguenti due byte: 00000001 00100111. Nel prossimo paragrafo si vedrà come rappresentare un testo.

Rappresentazione di informazione testuale

Un testo è una sequenza di parole, spazi e simboli di punteggiatura. Più in dettaglio, le singole parole si possono considerare sequenze di simboli alfabetici e/o numerici (detti “caratteri”). Pertanto, il modo più usato per rappresentare un testo è quello di rappresentare nella memoria del computer i simboli (caratteri, spazi, segni di punteggiatura, ecc.) che lo costituiscono. La più importante codifica che utilizza questo metodo è la codifica ASCII.

La codifica ASCII

ASCII è l’acronimo di American Standard Code for Information Interchange (Codice Standard Americano per lo Scambio di Informazioni). È un sistema standardizzato di codifica che utilizza 7 bit per rappresentare ciascun simbolo presente sulla tastiera di un computer (le lettere maiuscole e minuscole, le cifre numeriche, i segni di punteggiatura ed i simboli grafici di uso comune come ad esempio @, #, $, ecc.) e anche i simboli “non stampabili”, detti anche “di controllo”, cioè quelli corrispondenti a funzioni speciali associate ad alcuni tasti, come il ritorno a capo (“Invio”), la cancellazione di un carattere (“Canc”), la tabulazione (“Tab”), e così via.

Il totale dei simboli facenti parte della codifica ASCII è pari a circa un centinaio, per cui 7 bit sono sufficienti, permettendo di rappresentare fino a 128 simboli diversi.

Esistono versioni “nazionali” della codifica ASCII, ovvero in cui la codifica originale è arricchita da simboli quali ad esempio le lettere accentate in Italia, la tilde (~) ed il punto interrogativo capovolto in Spagna, l’umlaut (la dieresi) in Germania. Per ottenere queste versioni estese si utilizzano 8 bit anziché 7 per rappresentare i simboli, infatti l’ulteriore bit permette di raddoppiare l’insieme dei simboli rappresentabili.

Benché la codifica ASCII sia utilizzata tuttora ovunque, il suo principale limite è che essa non riesce a rappresentare un numero di caratteri sufficienti per tutte le lingue, ed il ricorso alle versioni estese dell'insieme di caratteri non fa altro che accrescere la confusione, infatti nel momento in cui si prende un documento testuale codificato in ASCII e scritto in Italia e lo si utilizza in un altro paese europeo (es. in Francia), è possibile che alcuni dei caratteri il cui codice è maggiore di 128 (ovvero quelli facenti parte dell'estensione) possano non corrispondere ai simboli grafici originali poiché in Francia la codifica ASCII estesa utilizzata è differente.

La tabella seguente mostra, a titolo di esempio, una parte dei caratteri ASCII stampabili appartenenti all'insieme di base.

Codice ASCII	**Carattere**	**Codice ASCII**	**Carattere**	**Codice ASCII**	**Carattere**
32	(spazio)	51	3	70	F
33	!	52	4	71	G
34	“	53	5	72	H
35	#	54	6	73	I
36	$	55	7	74	J
37	%	56	8	75	K
38	&	57	9	76	L
39	‘	58	:	77	M
40	(	59	;	78	N
41	)	60	<	79	O
42	*	61	=	80	P
43	+	62	>	81	Q
44	,	63	?	82	R
45	-	64	@	83	S
46	.	65	A	84	T
47	/	66	B	85	U
48	0	67	C	86	V
49	1	68	D	87	W
50	2	69	E	88	X

La codifica Unicode

Si è visto che la codifica ASCII (anche quella estesa) non possiede un numero di simboli sufficienti per tutte le lingue e per le necessità di comunicazione in qualsiasi ambito disciplinare. Tale limitazione è superata dalla codifica standard Unicode, che è un sistema di codifica che assegna un numero a ciascun simbolo in maniera indipendente dal programma applicativo utilizzato, dal sistema informatico e dalla lingua.

Originariamente pensato come una codifica in cui ogni simbolo era rappresentato da 16 bit, il che dava la possibilità di codificare al massimo 65.536 caratteri, oggi lo standard Unicode è stato esteso fino a rappresentare ogni simbolo con 21 bit, riuscendo pertanto a supportare circa un milione di caratteri. Infine, i primi 128 caratteri di Unicode sono gli stessi dell'insieme ASCII originale; questo permette la compatibilità con i documenti di testo composti in ASCII.

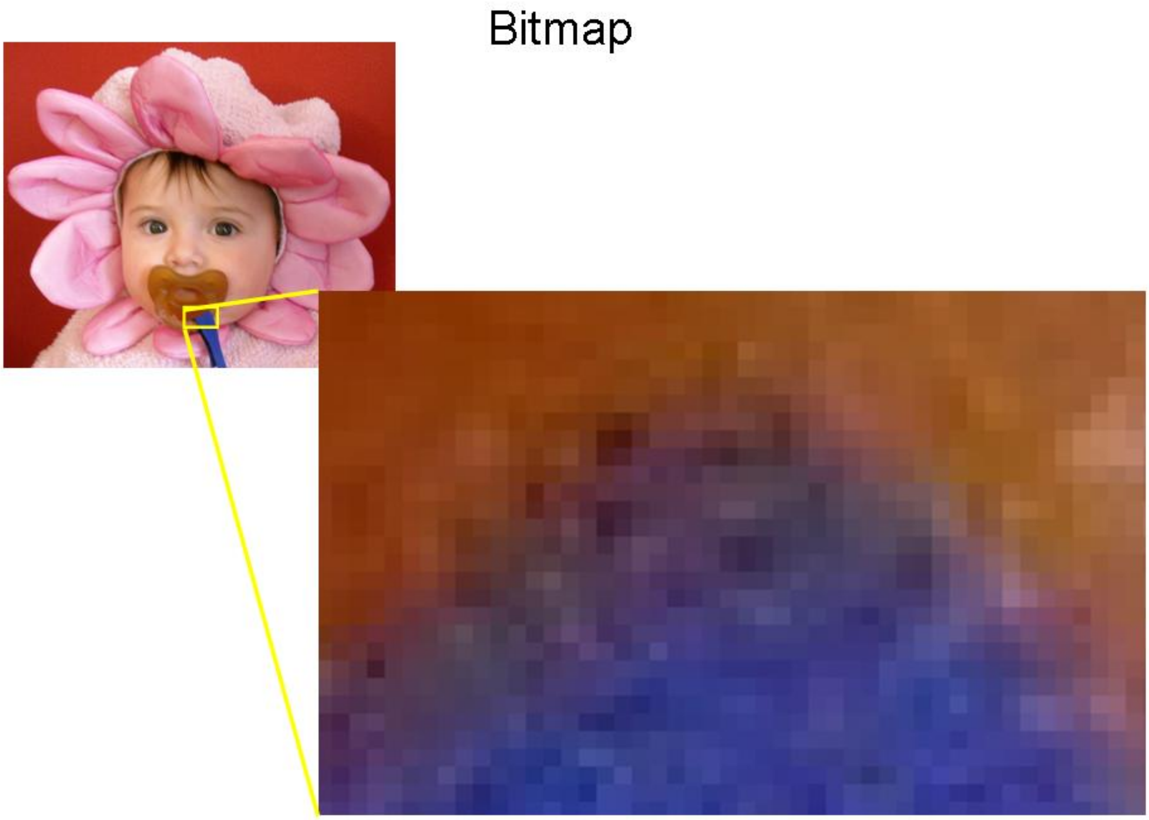
Rappresentazione di informazione grafica

L'informazione grafica è costituita da immagini digitali, ciascuna costituita da un'insieme di punti elementari (detti *pixel*) disposti a matrice, ovvero come una serie di righe e di colonne.

Tale matrice di punti è anche detta *bitmap* (mappa di bit)oppure *raster*.

Il termine raster (che vuol dire trama, reticolo, griglia) trae origine dalla tecnologia televisiva analogica (quella dei vecchi televisori a tubo catodico), ovvero dal termine che indica le righe orizzontali dei televisori o dei monitor.

Pertanto, un'immagine visualizzata su un monitor è considerata come una scacchiera e ad ogni elemento della scacchiera (pixel) è associato uno specifico colore.



Fissato il numero di righe e colonne che costituisce tale scacchiera, ai fini della rappresentazione interna, l'immagine bitmap si può anche intendere come sequenza finita di punti. Di conseguenza, la problematica fondamentale è quella di stabilire in che modo tali punti debbano essere rappresentati utilizzando gruppi di bit. Più precisamente, occorre chiarire quanti bit debbano essere utilizzati per rappresentare ciascun pixel. Ciò dipende dal tipo di immagine considerata. Si distinguono tre casi principali:

- Immagini in bianco e nero (immagini monocromatiche);
- Immagini a colori aventi al più 256 colori;
- Immagini fotografiche aventi migliaia o milioni di colori.

Immagini monocromatiche

Nel caso di immagini in bianco e nero si assume che il colore di fondo (il bianco) e quello di primo piano (il nero) siano rappresentati dai due stati complementari del bit. Pertanto ogni pixel è rappresentato da un bit corrispondente il cui valore 0 indica la presenza del colore di sfondo, mentre il valore 1 indica quella del colore di primo piano. I colori di sfondo e di primo piano sono fissati a priori una volta per tutte. In tal modo, ad esempio, la sequenza di 6 bit 011001, rappresenta 6 pixel dell'immagine di cui il primo è nero, il secondo e il terzo sono bianchi, e così via.

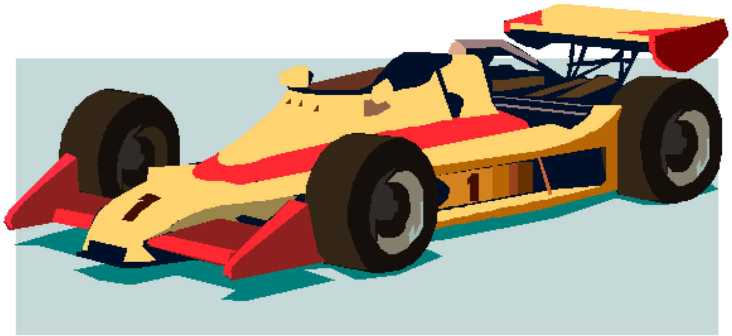
La conoscenza delle dimensioni dell'immagine (intese come il numero di pixel su ciascuna riga dell'immagine, e il numero di righe dell'immagine) permette la corretta visualizzazione di una sequenza di bit di questo tipo, infatti il computer dovrà leggere i bit dalla RAM e disegnare i pixel ponendoli in sequenza su ogni riga procedendo da sinistra verso destra, avendo cura di "andare a capo", ovvero disegnare la riga successiva, quando avrà contato un numero di bit pari al numero di pixel (noto a priori) per ciascuna riga dell'immagine. Le immagini monocromatiche sono tipiche degli apparecchi fax.

Immagini a colori aventi al più 256 colori

Nel caso l'immagine contenga un numero massimo di colori pari a 256 la tecnica usuale è quella di separare l'informazione riguardante la trama del disegno (la bitmap vera e propria) da quella relativa ai colori, creando a parte un elenco dei colori utilizzati (tavolozza). A questo punto ciascun pixel sarà rappresentato da 8 bit, sufficienti per rappresentare 256 stati differenti. Il valore di tale byte corrisponderà all'indice del colore associato presente nella tavolozza.

Queste immagini sono molto comuni sia su Internet, ad esempio per realizzare i pulsanti e gli altri elementi grafici dei siti Web, sia come *clip-art*, cioè come disegni da inserire nei documenti di testo, in quanto occupano poca memoria e pertanto richiedono tempi brevi per il caricamento.

Immagini con al più 256 colori



Immagini fotografiche

Nel caso si vogliano utilizzare molti più colori, come ad esempio accade con l’uso di immagini provenienti da fotocamere digitali, il singolo pixel non definisce più l’indice del colore in una tavolozza di colori, ma lo definisce direttamente come l’unione di tre componenti principali blu, rossa e verde (in sigla RGB, dall’inglese Red, Blue, Green). Questo non è l’unico modo di definire un colore, esistono molti altri modi che vengono chiamati *spazi di colore*, ma nel caso delle immagini generate al computer il sistema RGB è il più diffuso.

In un immagine RGB ogni pixel è caratterizzato da una tonalità di colore che è il risultato della mescolanza delle tre componenti di base. Ogni componente possiede una *intensità*, che è rappresentata da 8 bit (un byte), per cui esistono 256 valori diversi di intensità, da 0 (la più bassa) che indica l’assenza di quella componente, a 255 che indica che tale componente è al massimo.

Il modello RGB è additivo, cioè un certo colore si ottiene come somma delle diverse componenti, per esempio mescolando il blu ed il verde alla massima intensità si ottiene il giallo, oppure mescolando il blu ed il rosso alla massima intensità si ottiene il magenta, ecc.

Il colore nero corrisponde all’unione delle tre componenti con intensità nulla (assenza di componenti); il bianco risulta dalla somma di tutte le componenti alla massima intensità.

Caratteristiche generali delle immagini bitmap

Sintetizzando quanto detto sopra, una bitmap è caratterizzata da due proprietà principali: *risoluzione* e *profondità di colore*.

La prima è determinata dal numero di pixel contenuti nell'immagine e si indica in due modi: come prodotto del numero di pixel orizzontali per quello dei pixel verticali (es. 1280*1024 pixel), oppure come valore risultante da tale prodotto espresso in modo approssimato (es. 10Mpixel, ovvero circa 10 milioni di pixel). Ad una maggiore risoluzione corrisponde una maggiore definizione dell'immagine. Ad una minore risoluzione corrisponde un'immagine più "sgranata".

La seconda proprietà è definita dalla quantità di memoria che si dedica ad ogni pixel, ovvero dal numero di bit dedicati ad ogni pixel per descrivere il colore (secondo le tecniche descritte precedentemente), e si misura in BPP (Bit Per Pixel); chiaramente, maggiore è il numero di bit, maggiore è il numero di colori che è possibile descrivere.

Rappresentazione di informazione sonora

Un *suono* è un'onda di pressione che si propaga in un mezzo (come ad esempio l'aria). Per rappresentare questo tipo di informazione è necessario che esso sia convertito in un segnale elettrico analogo, cioè con le stesse caratteristiche.

Ciò avviene per mezzo di un *microfono*, il quale produce, quando viene colpito da una onda sonora ininterrotta, un segnale elettrico, i cui valori di tensione descrivono la forma dell'onda acustica originaria. Un segnale di tale genere è detto *analogico*, poiché i valori assunti nel tempo dal segnale elettrico aumentano o diminuiscono in modo "analogo" a quelli del segnale acustico corrispondente.

Al fine di rappresentare questo segnale elettrico in forma numerica sono necessari altri due passi: il primo è detto *campionamento* e serve ad estrapolare dei valori di riferimento (*campioni*), misurati con una cadenza regolare (*frequenza di campionamento*), che descrivono l'andamento della forma d'onda analogica con una precisione che aumenta all'aumentare del numero degli stessi campioni (e quindi di tale frequenza). Nei moderni standard tecnologici, in genere le frequenze di campionamento spaziano dagli 8.000 campioni al secondo (misurati in Hertz, Hz in sigla) per ottenere una qualità simile alla voce telefonica, fino ai 44.000 e più campioni al secondo per la qualità musicale offerta dal Compact Disk.

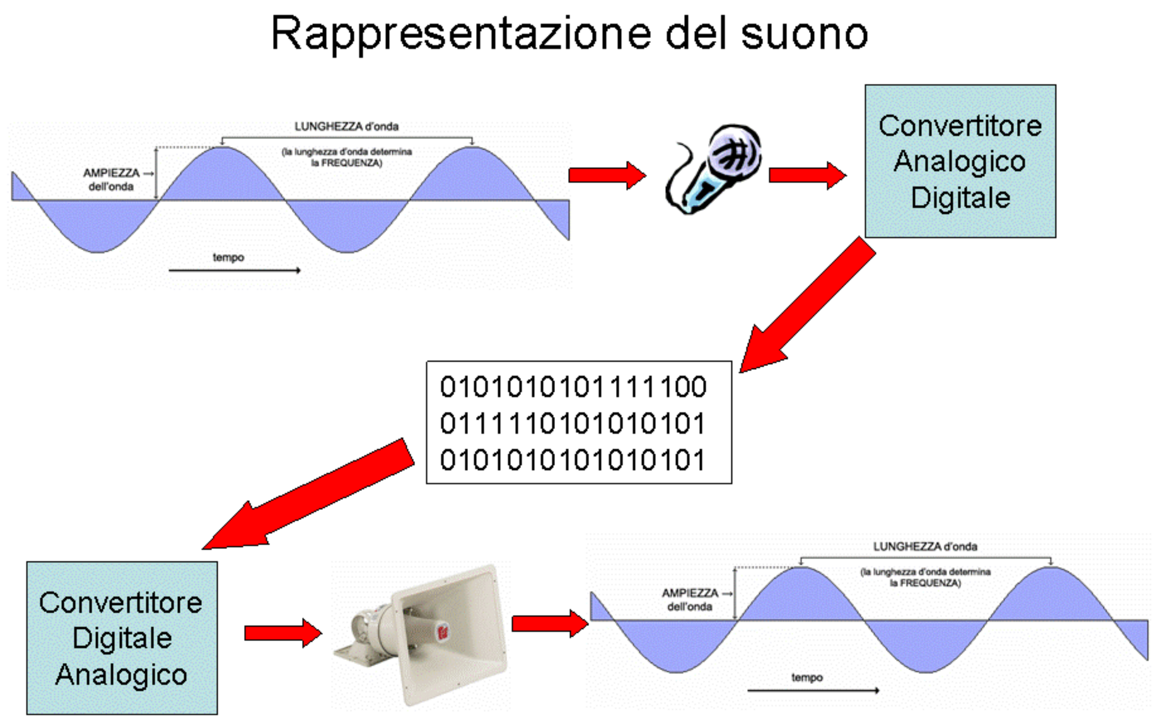
Il secondo passo è detto *quantizzazione* e si utilizza per riportare i valori dei campioni misurati al passo precedente entro i limiti di un intervallo finito di valori assunti a priori come dominio.

La sequenza numerica che così si ottiene è detta segnale audio digitale e contiene in sé tutte le informazioni necessarie per ricostruire la forma elettrica originale, che a sua volta era l'immagine quasi perfetta della forma d'onda acustica che l'aveva originata. La sequenza numerica ottenuta a valle della fase di quantizzazione deve essere convertita in binario prima di poter essere rappresentata nella RAM.

Il complesso delle operazioni che permettono la trasformazione del segnale da analogico a digitale (inteso come sequenza di bit) si indicano col nome di *conversione analogico-digitale*. I dispositivi che realizzano tale conversione sono contenuti nelle schede sonore.

Il segnale digitale può essere elaborato in vario modo: si può introdurre un effetto di eco, aumentare o diminuire il volume, miscelare con altri segnali e così via.

Infine, si può procedere alla conversione da digitale ad analogico per ottenere nuovamente la forma elettrica originale, che una volta inviata ad un altoparlante riprodurrà il suono originario.



Capitolo 4

Software

Il termine software è un vocabolo della lingua inglese costituito dall'unione di due parole, *soft* (morbido) e *ware* (manufatto, componente, oggetto). Sta ad indicare un programma o un insieme di programmi in grado di funzionare su un elaboratore.

Il software è suddiviso in due classi principali: software di base e software applicativo.

Software di base

Comprende tutti quei programmi necessari al funzionamento di base del computer. Consiste del sistema operativo e degli strumenti di sviluppo software (cioè quelli orientati alla programmazione). Si pone perciò come un intermediario tra l'hardware e l'utente e tra l'hardware ed il software applicativo.

Software applicativo

E' l'insieme dei programmi (detti *applicazioni*) finalizzati a risolvere i problemi specifici dell'utente. Inoltre, l'insieme dei programmi legati tra loro logicamente e finalizzati a risolvere una specifica esigenza si dice *pacchetto software* (ad esempio, Microsoft Office è un pacchetto software che comprende le applicazioni dedicate al mondo del lavoro come videoscrittura, fogli di calcolo, ecc.).

Sistemi Operativi

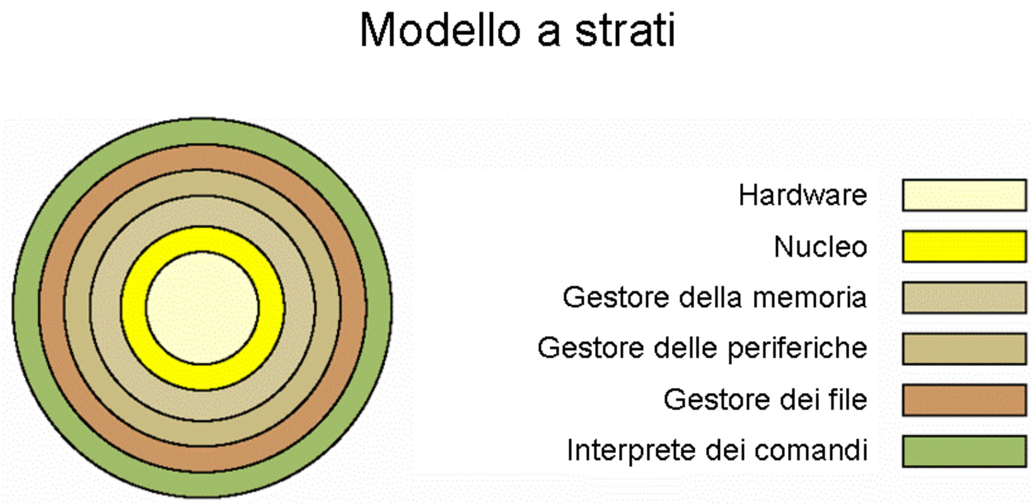
Un Sistema Operativo (spesso abbreviato in S.O.) è un insieme di programmi di base il cui fine è quello di permettere all'utente ed ai programmi applicativi di utilizzare le risorse messe a disposizione dall'hardware (memoria centrale, dispositivi di I/O, ecc.). A tale scopo, un sistema operativo fornisce un'interfaccia (grafica o testuale) che funge da intermediario fra i comandi dell'utente e l'hardware del sistema. In tale modo, l'utente ha diretta percezione solo dei servizi offerti dal sistema (come elaborazione ed archiviazione dei documenti, stampa, gestione dei dispositivi esterni, ecc.), ciascuno realizzato da uno o più programmi.

Struttura e funzioni

La funzione principale di un sistema operativo è l'intermediazione fra l'utente (o i programmi applicativi) e l'hardware. Ciò, si è detto precedentemente, avviene attraverso la fornitura di servizi o *funzioni*. Le funzioni che comunemente sono messe a disposizione da un sistema operativo sono le seguenti:

- La gestione dei processi;
- La gestione della memoria;
- La gestione delle periferiche;
- La gestione dei file;
- L'interprete dei comandi.

Ciascuna di queste funzioni è descritta in dettaglio nel seguito. Per il momento si mette in evidenza che esse si possono schematizzare mediante una struttura a strati concentrici: Al centro vi è l'hardware, che è avvolto dal *nucleo* (che svolge la funzione di gestore dei processi). Seguono: lo strato del *gestore della memoria*, quello del *gestore delle periferiche*, quello del *gestore dei file* ed infine vi è lo strato più esterno, l'*interprete dei comandi*. Esternamente a tale successione di strati vi è l'utente o i programmi applicativi.



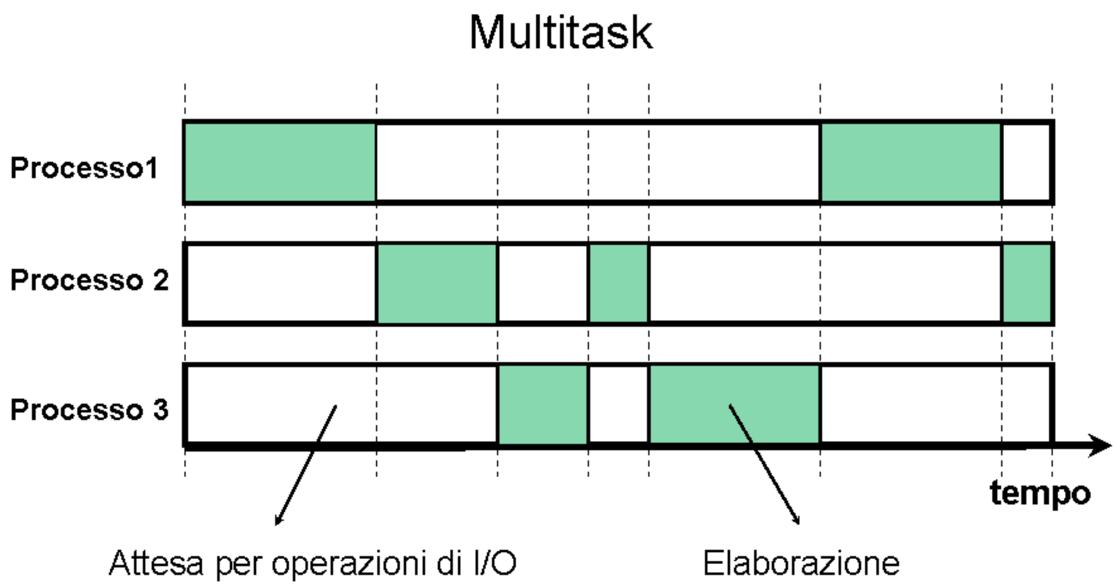
In questo modello, ogni strato realizza una funzione specifica sfruttando le funzioni messe a disposizione dai livelli più interni. In tale modo, l'utente (o i programmi applicativi) accedono indirettamente alle risorse dell'hardware.

Adesso si prenderanno in considerazione gli strati costituenti il sistema operativo, procedendo dall'interno verso l'esterno, al fine di descrivere la funzione svolta da ciascuno di essi.

Il nucleo

Il nucleo del sistema (detto anche *kernel*) interagisce direttamente con l'hardware e fornisce le funzionalità di base per tutti gli altri strati del sistema operativo. La sua funzione principale è quella di gestire i processi (concetto simile a quello di programma). In dettaglio, mentre un *programma* è una entità "statica" costituita da una sequenza di istruzioni espresse nel linguaggio macchina della CPU, un *processo* è una entità "dinamica", composta dal codice del programma, dai dati necessari alla sua esecuzione e dalle informazioni sullo stato dell'esecuzione. Quest'ultimo specifica quale sia la relazione fra il processo e la CPU.

A questo punto una prima distinzione che si deve fare è tra quei sistemi che eseguono un processo per volta e quelli in grado di gestirne diversi "contemporaneamente". I primi sono detti monotask (ad esempio MS-DOS), gli altri sono detti multitask (ad esempio, Windows, MacOS X, Linux). Nel caso dei sistemi operativi multitask, i processi sono eseguiti uno per volta, ma in modo alternato, cioè la CPU dedica un brevissimo intervallo di tempo (*quanto* di tempo) a ciascun processo, in modo che l'utente abbia la sensazione che essi siano in esecuzione contemporaneamente.



Principalmente, si distinguono tre stati per i processi:

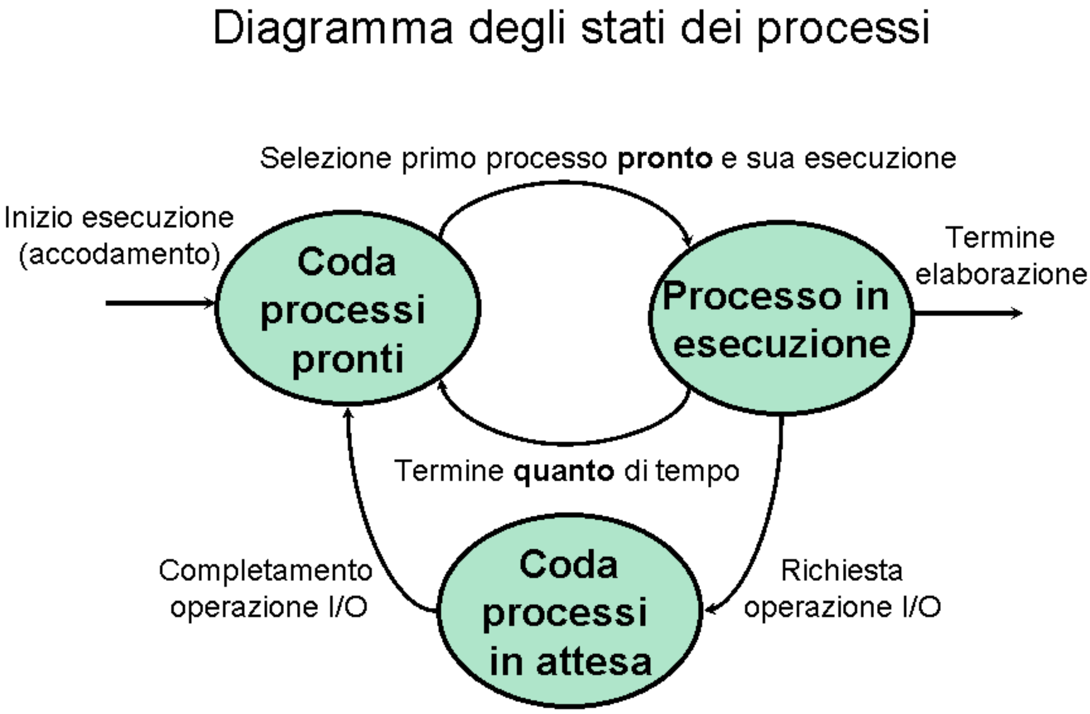
- Stato di *esecuzione*;
- Stato di *pronto*;
- Stato di *attesa*.

Un processo è nello stato di "*esecuzione*" quando la CPU lo sta eseguendo. Un processo è nello stato di "*pronto*" quando la CPU non lo sta eseguendo, ma quel processo è pronto per essere eseguito non appena essa sarà disponibile. Un processo si dice nello stato di "*attesa*", quando la sua esecuzione è stata interrotta per consentire che si compia un determinato evento (ad esempio, l'inserimento di un input da tastiera). Il processo lascerà lo stato di "attesa" nel momento in cui tale evento si sarà realizzato.

E' importante mettere in evidenza quali siano le transizioni possibili fra i diversi stati. Dallo stato di "esecuzione" si può passare allo stato di "pronto" (quando termina il quanto di tempo concesso al processo dalla CPU) o in quello di "attesa" (quando la CPU decide di bloccare l'esecuzione del processo per eseguire un altro processo, nell'attesa che si verifichi un certo evento).

Dallo stato di "pronto" si può passare soltanto allo stato di "esecuzione" (quando la CPU diverrà disponibile per quel processo). Dallo stato di "attesa" si può passare solo allo stato di "pronto" (un processo non può andare direttamente nello stato di "esecuzione" poiché la CPU potrebbe nel frattempo essere già occupata da un altro processo).

Ad un dato istante un solo processo può essere in esecuzione, mentre gli altri processi saranno nello stato di "pronto" o in quello di "attesa". Per questo motivo il gestore dei processi organizza in code i processi in "pronto" o in "attesa".



Il gestore della memoria

L'utente oggi ha la possibilità di utilizzare molti programmi contemporaneamente (sfruttando il multitask offerto dai sistemi operativi), ad esempio per attività come videoscrittura, posta elettronica, lettura di pagine web, accesso a banche dati, ecc.

In questo scenario si verifica quanto segue: da una parte i programmi tendono ad essere sempre più ricchi di funzioni, per cui le loro dimensioni (intese come spazio occupato in memoria centrale) crescono, dall'altra parte la memoria RAM potrebbe non essere sufficiente a contenere tutti i programmi che l'utente desidera utilizzare, per cui si potrebbe verificare la situazione in cui essa è satura e non può più contenere ulteriori programmi.

Il gestore di memoria è la componente del sistema operativo che risolve questa problematica generale, occupandosi assegnare la memoria ai processi (*allocazione*). Infatti, per potere essere eseguiti i processi devono essere trasferiti (*caricati*) dalla memoria di massa a quella centrale. Il gestore di memoria deve assegnare a ciascun processo uno spazio di memoria separato, tenendo al contempo traccia della memoria libera. In questo modo, quando un processo termina (o sospende, passando allo stato di "pronto" o di "attesa") l'esecuzione, il gestore della memoria deve rendere nuovamente disponibile l'area di memoria utilizzata dal processo.

Allo stesso modo, in caso di interruzione di un processo a causa di un errore, il sistema di gestione della memoria deve essere in grado di comunicare al sistema operativo che la memoria occupata da quel processo può essere liberata.

In mancanza di un sistema di gestione, l'area di memoria in cui risiede un processo potrebbe erroneamente essere utilizzata anche da altri processi, compromettendone l'esecuzione e determinando arresti inattesi dei processi o del sistema operativo.

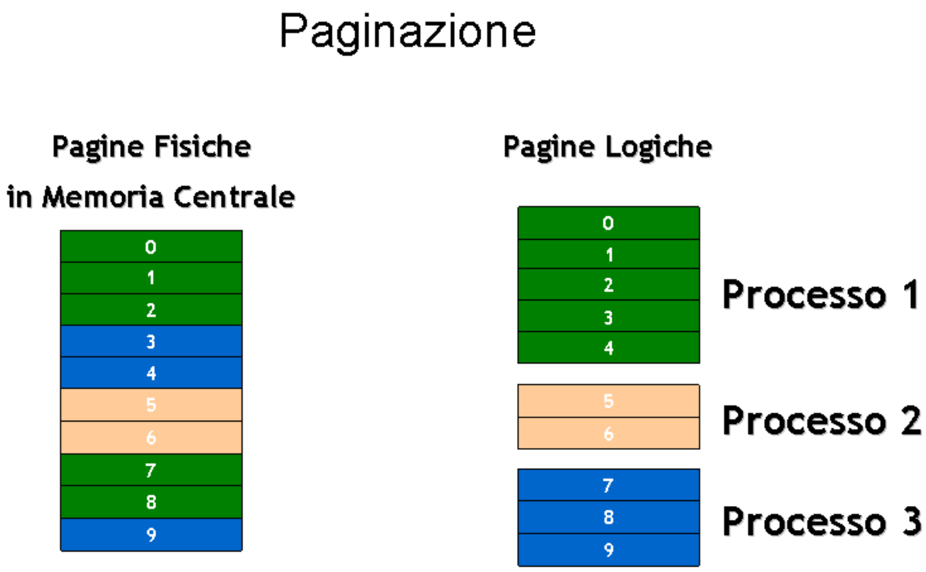
La tecnica principale utilizzata dal gestore della memoria è detta *memoria virtuale*. Essa, attraverso l'utilizzo della memoria di massa, permette di simulare la presenza di una memoria RAM avente dimensioni maggiori di quella fisicamente presente nel sistema.

La memoria virtuale sfrutta due meccanismi: la *paginazione* e lo *swapping*.

Paginazione

La paginazione consiste nella suddivisione dei processi (presenti in memoria di massa) in pagine *logiche*, ovvero sezioni di dimensioni fisse ed uguali fra loro. Allo stesso modo la RAM è suddivisa in pagine *fisiche* aventi la stessa dimensione delle pagine logiche. Ciò comporta due principali conseguenze: principalmente, il fatto che un processo non debba essere necessariamente caricato per intero in memoria RAM, ma possano essere caricate solo le pagine logiche necessarie per realizzare le funzionalità richieste in quel momento dall'applicazione.

Inoltre, è possibile allocare il processo senza necessariamente doverlo mantenere tutto in una zona contigua di memoria, cioè le pagine di un processo si possono alternare a quelle di un altro processo, senza che questo fatto pregiudichi il corretto funzionamento del sistema, ma con grandi vantaggi in termini di sfruttamento degli spazi liberi di memoria RAM.



Swapping

Questa tecnica permette di sfruttare la memoria di massa (tipicamente l'hard disk, che è un dispositivo capiente, veloce ed affidabile) allo scopo di simulare la presenza di una memoria RAM di dimensione superiore a quella fisicamente presente nel computer. Il gestore della memoria, infatti, è in grado di trasferire il contenuto di un'area della memoria RAM all'interno di un'area della memoria di massa (*area di swap*), allo scopo rendere disponibile la memoria RAM per l'allocazione di ulteriori processi rimasti. I processi che sono trasferiti nell'area di swap sono tipicamente quelli che si trovano in stato di "pronto" o di "attesa". Nel momento in cui un processo, precedentemente trasferito nell'area di swap, torna nello stato di "esecuzione", le pagine di quel processo sono trasferite nuovamente in RAM (eventualmente a seguito del trasferimento in senso inverso di pagine appartenenti a processi la cui esecuzione è sospesa).

Il gestore delle periferiche

Il sistema operativo deve anche provvedere a realizzare la comunicazione con le periferiche, ovvero con i dispositivi di ingresso e quelli di uscita. In questo caso il sistema operativo dovrebbe conoscere i dettagli del funzionamento di ogni dispositivo hardware con cui si volesse interfacciare.

Ciò è chiaramente impossibile, specialmente se si pensa che ogni giorno sono messi in commercio dispositivi nuovi e quindi si dovrebbe modificare costantemente il sistema operativo per fare sì che esso possa funzionare anche con tali periferiche.

La soluzione è che il S.O. utilizza dei programmi, detti *driver*, che sono forniti direttamente dai produttori delle periferiche. Un driver funge da "interfaccia" con il *controller* della periferica, cioè con quel dispositivo hardware da cui essa è comandata attraverso specifici segnali elettrici. In questo modo, ad esempio, quando un'applicazione invia al sistema operativo il comando di "stampa" (a seguito di una scelta dell'utente), il driver "pilota" il controller della stampante selezionata che, comandando con segnali elettrici la parte meccanica (motore, rullo, testina di stampa, ecc.), produce l'output su carta.

Il gestore dei file

L'informazione è archiviata in memoria di massa sotto forma di *file* (parola che significa "archivio" in inglese). Un file contiene i dati che rappresentano l'informazione digitale, organizzati come una sequenza di bit ed immagazzinati come un unico elemento su una memoria di massa. Ogni file possiede le seguenti proprietà: un *nome* che permette di individuarlo in modo univoco, un'*estensione*, cioè una sequenza di caratteri che tipicamente fa da suffisso al nome ed è associata per convenzione al tipo di file, come ad esempio ".txt" per indicare un testo, ".jpg" per indicare un'immagine fotografica. Inoltre un file è caratterizzato da una *dimensione* (il numero di bytes di cui è composto) e dalla *data di creazione* o *dell'ultima modifica effettuata* dall'utente.

Il *gestore dei file* (detto anche *file system*) è quel componente del sistema operativo che consente l'archiviazione, l'accesso, la lettura, la modifica e l'organizzazione dei file.

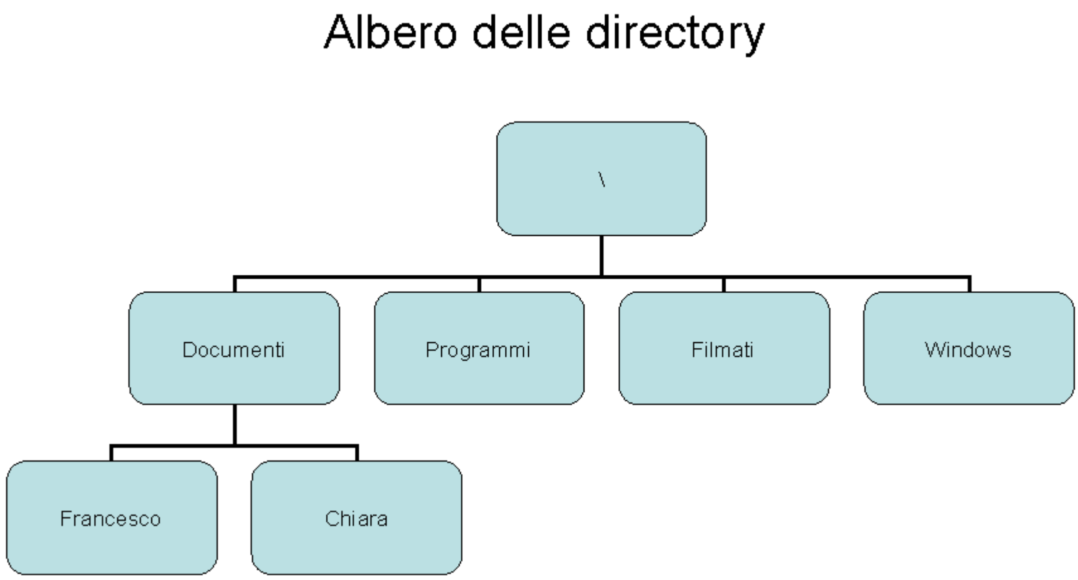
I file sono organizzati in elenchi, detti *directory*. Una directory può anche essere vista come un contenitore di file e può contenere a sua volta anche altre directory. Ne consegue una struttura gerarchica (come un insieme di scatole cinesi) in cui esiste una directory (detta principale, o *radice*) che non può essere contenuta a sua volta in un'altra directory, ma che contiene tutte le altre. Per tale ragione, questa struttura si dice anche ad *albero*.

L'organizzazione in directory permette all'utente di mantenere più file con lo stesso nome, a patto che risiedano in directory differenti. In questo modo, un file è identificato univocamente non più solo dal suo nome, ma anche dal suo *percorso*, cioè la sequenza di directory che (partendo dalla radice) è necessario attraversare per giungere a quella che contiene il file in questione.

Ad esempio (si consideri l'albero delle directory in figura), immaginando che la cartella "Chiara" contenga il file "musica.mp3", il percorso completo di tale file sarà:

"\Documenti\Chiara\musica.mp3"

dove il simbolo "\" (detto *backslash*) si usa per separare i nomi delle directory all'interno del percorso e, se posto all'inizio (come nell'esempio) indica la directory *radice*. In tal caso si parla di percorso *assoluto*. Il percorso "Chiara\musica.mp3" è invece un percorso *relativo*, in quanto non parte dalla radice.



Le operazioni più comuni su un file sono la lettura e la scrittura di dati (quest'ultima intesa come modifica dei dati preesistenti o come aggiunta di nuovi dati al file originale. In generale, un programma non può leggere o scrivere un file se prima non lo ha "aperto", cioè non vi ha ottenuto l'accesso da parte del gestore dei file. Una volta che il programma ha terminato di usare il file lo deve "chiudere", cioè segnalare al gestore che l'accesso è concluso per dare modo al sistema operativo di liberare le risorse occupate, come le aree di memoria deputate alla conservazione dei dati che sono letti o scritti dal/sul file (i *buffer*).

Il gestore dei file si occupa inoltre della sicurezza di file e directory, facendo in modo che ogni utente che utilizza il sistema operativo disponga di ben determinati permessi e divieti sui file e sulle directory contenute nella memoria di massa. Tipicamente, un utente può sempre leggere e scrivere sui file da lui creati, ma non può mai scrivere (e talvolta neanche leggere) sui file creati da altri utenti. Questa regola generale permette di tutelare la *riservatezza* dei dati. Naturalmente, un utente può concedere ad altri di leggere o scrivere sui propri file (come avviene per i gruppi di lavoro).

L'interprete dei comandi

E' il programma che realizza l'interfaccia con l'utente, permettendogli di interagire con il computer. Esistono due principali famiglie di interfacce utente: *interfacce a linea di comando* e *interfacce grafiche*.

Utilizzando l'interfaccia a linea di comando, in sigla CLI (dall'inglese "command line interface"), l'utente invia al computer una serie di comandi tramite la tastiera e riceve risultati a video visualizzati come testo. Questo tipo di approccio risale ai primi calcolatori, che possedevano solo terminali testuali, collegati ad un elaboratore centrale cui inviavano i comandi immessi dall'utente.

Secondo questa modalità di interazione, l'utente compone i comandi in forma testuale e rispettando una precisa sintassi. L'utente segnala la terminazione della composizione utilizzando il tasto "Invio", come per andare a capo. A questo punto, l'interprete dei comandi verifica che il testo immesso dall'utente sia valido ed in tal caso esegue i comandi corrispondenti, producendo anche un risultato visibile sullo schermo o su una periferica di output.

In ambiente Windows è possibile utilizzare l'interprete a linea di comando usando il "Prompt dei comandi".

Nei sistemi operativi moderni, tuttavia, la CLI è stata rimpiazzata dall'interfaccia grafica (GUI, dall'inglese "graphical user interface").

La GUI consente all'utente di interagire con il computer attraverso operazioni su oggetti grafici, come menu a tendina, pulsanti, icone, che rappresentano le funzioni dei programmi applicativi o anche i file e le directory. In tal modo l'utente non deve imparare una serie di comandi da impartire con la tastiera, come avveniva in precedenza.

Tipicamente, l'interfaccia grafica è concepita secondo la metafora di un "piano di lavoro" (detto scrivania o *desktop*) rappresentato dallo schermo, con le icone a rappresentare i file (di cui alcune a forma di cartella per indicare le directory) e le finestre a rappresentare le applicazioni.

Tale ambiente di lavoro è caratterizzato dalla presenza di un puntatore comandato con il mouse mediante il quale è possibile compiere un elevato numero di operazioni comuni (ad esempio, accedere ai file ed alle directory o eseguire programmi) senza la necessità di maturare una conoscenza approfondita del funzionamento del computer.

Software applicativo

Il software applicativo comprende i programmi che risolvono i problemi specifici degli utenti. I linguaggi di programmazione consentono la creazione del software applicativo.

Un programma applicativo può essere considerato come l'insieme di tre componenti, che svolgono differenti funzioni:

- L'*interfaccia con l'utente,* che gestisce (attraverso un'interfaccia a linea di comando, testuale o grafica) sia l'inserimento dai dati da parte dell'utente che la presentazione dei risultati delle elaborazioni effettuate;
- La *logica applicativa*, che risulta dall'implementazione degli algoritmi che caratterizzano l'applicazione specifica;
- La *gestione dei dati*, che gestisce l'organizzazione, l'archiviazione ed il reperimento dei dati utilizzati dall'applicazione.

Se ad esempio si considera un programma di elaborazione testi, si può individuare l'interfaccia con l'utente nell'insieme dei menu e dei pulsanti messi a disposizione per selezionare le opzioni dell'applicazione. La logica applicativa risiede nelle parti che realizzano le funzionalità del programma (ad esempio, la modifica del formato dei caratteri o dei paragrafi, la numerazione automatica delle pagine). La componente di gestione dei dati è quella che si occupa del salvataggio dei dati su disco, della conversione fra diversi stili e formati, e così via.

L'insieme di programmi applicativi (*applicazioni*) che si occupano risolvere problemi appartenenti ad uno stesso contesto (ad esempio nell'ambito dell'automazione di ufficio) costituiscono un *pacchetto applicativo.* Si possono distinguere inoltre i pacchetti a "scopo generale", che sono concepiti per risolvere problematiche di carattere generale e quindi possono non soddisfare appieno le esigenze di una specifica fascia di utenti, e i pacchetti a "scopo specifico", che invece sono sviluppati appositamente per una particolare categoria di utenti (ad esempio medici, avvocati, commercialisti, ecc.). Vi sono poi i cosiddetti pacchetti "su misura", che sono frutto di personalizzazione di pacchetti applicativi più generali, al fine di risolvere, su richiesta dell'utente, problemi molto specifici.

Per concludere, si presenterà un breve elenco delle diverse tipologie di software applicativo:

- Elaborazione testi, che consente la creazione o la modifica di testi utilizzando anche differenti tipi di carattere e formati;

- Foglio elettronico, che permette di organizzare i dati numerici in tabelle al fine di eseguire calcoli o di tracciare diagrammi;
- Gestore di basi di dati (DBMS), utilizzato per la gestione di archivi di dati;
- Gestione delle finanze personali, che permette di gestire bilanci (personali e familiari). Le versioni professionali sono dette *software gestionali*;
- Impaginazione, che permette di generare l'impostazione grafica (il formato) delle pagine di pubblicazioni come libri, giornali, riviste, pubblicità ecc;
- Organizer, che permette di gestire le attività normalmente organizzate mediante un'agenda come rubrica telefonica e calendario degli appuntamenti;
- Presentazioni, per creare e gestire presentazioni (come le diapositive per una lezione);
- Project Management, che permette di gestire l'avanzamento e la pianificazione temporale di un progetto.

Si ricordano, inoltre, le applicazioni per la grafica, che permettono la creazione e la modifica di immagini, le applicazioni per Internet, che consentono la lettura di pagine Web (*browser*) e l'uso della posta elettronica, ed infine, i videogiochi, che permettono di utilizzare il computer come strumento ricreativo.

Capitolo 5

Introduzione alle reti di calcolatori

Una rete di calcolatori è costituita da un insieme di computer collegati tra loro mediante un'infrastruttura che permette lo scambio reciproco di informazioni.

L'infrastruttura è costituita da componenti hardware (cablaggi, ripetitori, HUB) e componenti software (sistemi operativi di rete) che forniscono gli strumenti per la gestione della rete stessa.

Perché implementare una rete?

Le motivazioni per cui può valere la pena implementare una rete sono diverse:

- *Per permettere lo scambio di informazioni* tra i calcolatori in modo rapido ed efficace. Se infatti i calcolatori non sono in qualche modo collegati risulterà impossibile condividere dati con gli altri utenti.
- *Per condividere risorse*, quali potenza di elaborazione, memoria, unità di memorizzazione e periferiche. Ad esempio, consideriamo il caso di un ufficio con una dozzina di dipendenti che utilizzano il PC per redigere relazioni tecniche. Piuttosto che installare una stampante per ognuno dei PC dell'azienda, è sicuramente preferibile acquistare un paio di stampanti per l'intero ufficio, più costose ma veloci e di alta qualità, e configurarle in modo che tutti possano utilizzarle per stampare i propri documenti. In questo modo l'amministratore riesce a ottimizzare i costi di acquisto e di gestione dell'hardware e contemporaneamente gli utenti hanno la possibilità di produrre stampati di qualità superiore.
- *Per consentire una gestione centralizzata delle risorse*. Dati, applicazioni e periferiche possono essere gestiti in maniera centralizzata semplificando le operazioni di amministrazione e utilizzando le performance dell'intero sistema.
- *Per aumentare la sicurezza del sistema*. In questo modo le informazioni confidenziali e i dati riservati possono venire memorizzati su di un server protetto a cui gli utenti possono avere accesso con permessi più o meno limitati a seconda del ruolo rivestito dall'utente stesso in azienda.

Risulta evidente che l'implementazione di una rete di calcolatori presenta un gran numero di vantaggi che permottono da un lato di ottimizzare in termini di costi e di semplicità di gestione delle risorse, e dall'altro un incremento dell'efficienza produttiva determinato dall'elevata velocità con cui gli utenti possono attingere alle informazioni necessarie per lo svolgimento della propria attività lavorativa.

Ne consegue che se da un lato lo sviluppo delle reti di calcolatori fornisce un mezzo sempre più potente per aumentare la competitività e la produttività delle aziende, dall'altra genera una domanda sempre crescente di personale tecnico qualificato in grado di progettare, implementare e amministrare le reti di calcolatori.

Storia delle Reti

Le origini

L'era delle reti del calcolatore elettronico inizia nei primi anni '60 quando vennero prodotti i primi esemplari di mainframe, elaboratori per l'epoca velocissimi ma decisamente complessi e costosi. Le dimensioni di questi prodigi della scienza erano sicuramente ragguardevoli poiché un mainframe occupava quasi sempre uno spazio notevole, spesso una o più stanze.

L’elaborazione avveniva tipicamente all’interno della struttura principale ed era esclusivamente di tipo batch. I calcoli venivano eseguiti rispettando sequenze di istruzioni predefinite che venivano memorizzate su schede perforate senza nessuna interazione tra utente e macchina.

Questo tipo di gestione della potenza elaborativa risultava spesso inefficiente poiché inevitabilmente la macchina doveva restare inattiva tra una operazione e la successiva per consentire lo scambio delle schede perforate che contenevano le istruzioni da eseguire.

Con l’avvento dei nastri magnetici e successivamente dei dischi l’efficienza venne molto migliorata ma inevitabilmente i tempi di inattività dovuti alle operazioni di caricamento delle istruzioni in memoria, continuavano a pesare sul rendimento complessivo degli elaboratori.

Per ovviare a questo tipo di problema e sfruttare a pieno le potenzialità del calcolatore venne sviluppato il concetto di multielaborazione. Si pensò di distribuire la potenza di calcolo su diverse attività che venivano eseguite in modo tale da suddividersi il tempo di elaborazione. In questo modo i tempi di attesa dovuti alle operazioni di Input/Output venivano drasticamente ridotti; poiché il calcolatore poteva eseguire i calcoli relativi a una determinata attività mentre venivano caricati in memoria i dati necessari alle altre.

Il concetto di partizione del tempo portò alla nascita di una nuova generazione di sistemi operativi in grado di gestire i meccanismi che ne regolavano il funzionamento.

Il primo sistema operativo di questo tipo venne ideato verso la fine degli anni ‘60 e divenne noto con il nome di MULTIX. Proprio uno dei ricercatori che svilupparono il multix sviluppo qualche anno più tardi la prima versione di un nuovo sistema operativo capace di gestire il concetto di multielaborazione in maniera efficiente: lo UNIX.

L’avvento di nuovi sistemi operativi capaci di gestire la partizione del tempo portò a una sostanziale modifica delle modalità con cui venivano immessi i dati nella memoria dell’elaboratore poiché ora era possibile per gli utenti interagire direttamente con la macchina mediante l’utilizzo di terminali collegati al computer principale chiamato *host*.

I terminali non disponevano né di memoria né di capacità di elaborazioni locali, ma permettevano l’inserimento dei dati attraverso una tastiera che venivano inviati all’unità centrale che elaborava le informazioni e restituiva i risultati sugli schermi dei terminali. Era nato il concetto di Rete.

Arpanet

Negli anni ‘70 l’Advanced Research Projects Agency del dipartimento della Difesa degli Stati Uniti finanzia un progetto per una rete che deve consentire il collegamento tra i computer dell’università e i laboratori di ricerca del paese e lo scambio di informazioni militari: nasce *Arpanet*.

Grazie ad Arpanet i computer host sono in grado di comunicare e condividere dati. Ciascun host viene identificato attraverso un indirizzo univoco che consente l’instradamento verso il computer di destinazione dei pacchetti contenenti le informazioni.

Da Arpanet è nata la rete che oggi conosciamo come *Internet*.

Tipi di reti

Reti centralizzate

Le reti centralizzate sono costituite da uno o più unità centrali chiamate mainframe e da una serie di terminali collegati direttamente al computer principale.

L’elaborazione dei dati avviene totalmente (o quasi) all’interno dell’unità centrale.

Le reti centralizzate utilizzano tipicamente hardware dedicato e piuttosto costoso e non sono molto flessibili e scalabili.

Reti Peer-to-Peer

Le reti Peer-to-Peer sono costituite da un gruppo ridotto di calcolatori (tipicamente non più di 10) generalmente non molto potenti che devono condividere dati e periferiche. In una rete di questo tipo non c'è un elaboratore centrale che funge da riferimento per gli altri ma tutti i calcolatori sono sullo stesso piano ed operano sia come client che come server.

Dal punto di vista amministrativo non esiste una figura amministrativa centralizzata che gestisca gli utenti, le password e le impostazioni di sicurezza dell'intera rete ma ogni calcolatore ha un amministratore locale che decide quali sono le risorse da mettere a disposizione degli altri e con quali permessi.

I vantaggi della rete Peer-to-Peer sono collegati essenzialmente:

- alla *riduzione dei costi* di installazione: non si ha la necessità di acquistare un sistema operativo di tipo server per la gestione della rete ma si può lavorare con sistemi operativi non particolarmente costosi.
- alla *semplicità di amministrazione*: la gestione di un sistema operativo di tipo server risulta sicuramente più complessa e richiede quasi sempre competenze specifiche e personale tecnico appositamente preparato.

Gli svantaggi sono legati al fatto che il sistema Peer-to-Peer non è adatto per reti di grandi dimensioni.

Le reti client-server

Le reti client-server sono costituite da una o più macchine server che fungono da punto di riferimento per gli altri calcolatori della rete: i client.

Un server è un computer che mette a disposizione le proprie risorse (memoria, potenza di elaborazione, periferiche) a disposizione per gli altri PC della rete.

I client sono computer dotati di memoria e capacità elaborativi locale che utilizzano le risorse che i server mettono a loro disposizione.

Dal punto di vista amministrativo, le reti client-server, tipicamente basano il loro funzionamento sul concetto di dominio. Un dominio è un insieme di calcolatori che viene amministrato in maniera centralizzata in cui un utente superpartes ha il controllo completo sull'intera rete. Questo utente, detto *amministratore del dominio*, è in grado di creare account per gli altri utenti, gestirne le password, configurarne l'ambiente di lavoro, distribuire software ed impostare permessi.

Di solito l'architettura client-server rappresenta la soluzione migliore quando il numero di PC che devono essere collegati in rete è elevato.

I vantaggi di questo tipo di modello consistono:

- nella scalabilità del sistema
- nella possibilità di gestire le impostazione di sicurezza in maniera centralizzata
- nella possibilità di ottimizzare l'utilizzo delle risorse con conseguente incremento delle prestazioni generali della rete

Lo svantaggio principale deriva dal fatto che l'implementazione e l'amministrazione del sistema richiedono maggiori competenze tecniche e personale specializzato.

Estensione delle reti

Le reti LAN (Local Area Network)

L'importanza del computer risulta evidente soprattutto nel mondo degli affari quando ci si rende conto che per aumentare la potenzialità delle aziende diventa indispensabile disporre di strumenti che agevolino la condivisione delle informazioni. In un primo periodo lo scambio di dati fra gli utenti avviene o stampando il documento utilizzando floppy disk o consentendo a più utenti di accedere allo stesso calcolatore. Poiché le soluzioni non si dimostrano efficienti si rende necessario un approccio diverso al problema: nascono le LAN.

Una LAN (o "rete in area locale" in italiano) è una tipologia di rete informatica contraddistinta da un'estensione territoriale non superiore a qualche chilometro.

Le prime LAN (Local Area Network) si sviluppano negli anni '70, ma si diffondono su larga scala solo nell'intervallo temporale a cavallo tra gli anni '80 e '90. Le LAN sono costituite da gruppi di calcolatori distribuiti su un'area limitata, collegati tra loro mediante cavi e schede di rete.

Grazie all'introduzione delle LAN, i calcolatori sono in grado non solo di comunicare, ma anche di condividere risorse come spazio di memoria o stampanti. L'implementazione classica di LAN è quella che serve un'abitazione o un'azienda all'interno di un edificio, o al massimo più edifici adiacenti fra loro.

L'estensione territoriale limitata di una LAN favorisce la velocità della trasmissione dati. La LAN inoltre, sempre in conseguenza dell'estensione territoriale limitata, presenta bassi ritardi e pochissimi errori.

Le reti WAN (Wide Area Network)

In maniera graduale, le reti utilizzate dalle aziende per condividere e scambiare informazioni cominciano ad espandersi arrivando a coprire aree di dimensioni sempre maggiori con calcolatori distribuiti tra vari uffici in filiali distanti centinaia di chilometri.

Grazie allo sviluppo delle tecnologie informatiche pian piano risulta possibile realizzare reti di calcolatori che si estendono su aree di grandi dimensioni: le cosiddette WAN (Wide Area Network).

Attraverso le WAN, costituite da più LAN collegate tra loro in vario modo, le aziende riescono a condividere informazioni con i propri collaboratori a livello globale e scambiare dati in tempo reale tra filiali che si trovano da un capo all'altro del pianeta.

Con il passare del tempo le tecnologie WAN si sono sempre più evolute e consolidate permettendo la creazione di reti a livello globale. Nel mondo moderno con il termine *InternetWork* ci si riferisce solitamente ad una WAN costituita da un insieme di LAN fisicamente distinte collegate fra loro in vario modo.

Topologia delle reti

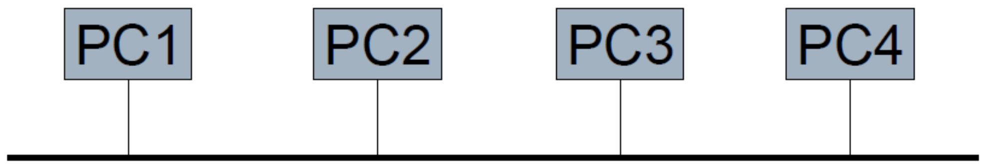
Co il termine "*topologia*" ci si riferisce alla modalità con cui i calcolatori sono collegati tra di loro.

Le topologie più diffuse sono sostanzialmente:

- Rete a Bus
- Rete a Stella
- Rete ad Anello
- Reti miste o ibride

Topologia a Bus

La topologia a bus, detta anche topologia lineare, rappresenta la struttura più semplice da implementare. E' costituita da un singolo cavo cui sono collegati da tutti i PC che costituiscono i nodi della rete.



Quando un calcolatore deve inviare dati a un altro computer trasmette le informazioni sul cavo servendosi della propria scheda di rete. Le informazioni viaggiano sul supporto fisico fino a raggiungere tutti i computer della rete ma solo il destinatario o i destinatari del messaggio processano e leggono i messaggi inviati.

La trasmissione dei dati in una struttura di questo tipo è limitata a un solo PC alla volta mentre tutti gli altri restano semplicemente in ascolto. Quando più calcolatori inviano dati contemporaneamente sul supporto fisico si generano *conflitti* che vengono risolti in modo diverso a seconda della modalità con cui viene gestito l'accesso alla rete.

In una rete di questo tipo i dati viaggiano sul supporto fisico in entrambe le direzioni fino a raggiungere l'estremità del cavo dove vengono posizionati degli oggetti chiamati "terminatori".

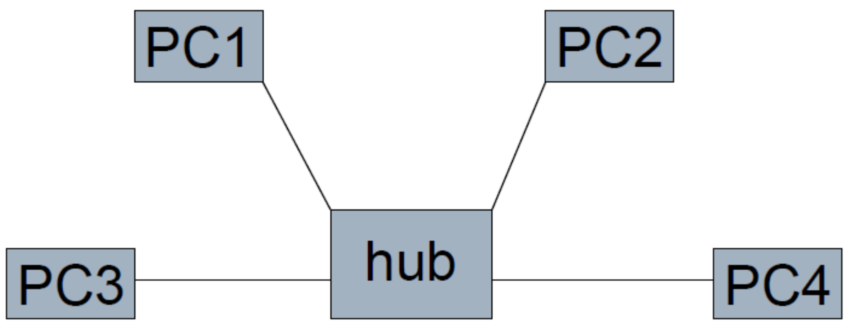
I vantaggi delle reti a bus sono la semplicità di gestione e manutenzione, la flessibilità, i bassi costi necessari per realizzarla e l'affidabilità.

Lo svantaggio principale di questo tipo di struttura deriva dal fatto che se il cavo viene danneggiato o interrotto in un punto qualsiasi, nel punto di interruzione viene generata una riflessione che spesso impedisce l'utilizzo del mezzo per la trasmissione dei dati mettendo di fatto fuori uso l'intera rete.

Inoltre, tutte le stazioni dipendono da un solo mezzo trasmissivo condiviso e, pertanto, le prestazioni possono divenire un fattore critico nel momento di traffico elevato.

Topologia a Stella

In una rete a Stella i calcolatori sono tutti collegati ad un componente centrale chiamato HUB.



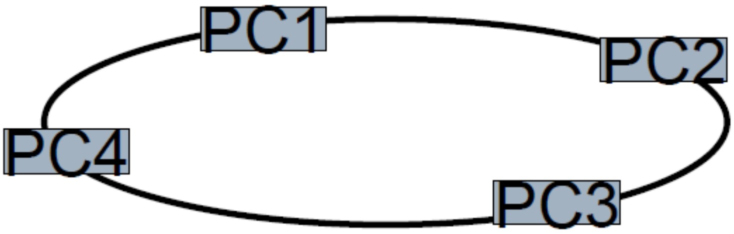
Quando un calcolatore deve inviare un messaggio sulla rete, il messaggio giunge all'HUB centrale e quindi tutti gli altri PC direttamente collegati.

Il principale vantaggio della tipologia a stella consiste nel fatto che quando si interrompe il collegamento tra uno dei PC e l'HUB centrale, solo il PC in questione non riesce più a inviare e ricevere dati, tutti gli altri continuano a lavorare senza problemi.

Lo svantaggio principale di questo tipo di struttura deriva dalla possibilità di sovraccarico in caso di traffico elevato, con possibilità di blocco delle comunicazioni. Inoltre vi è una dipendenza dall'affidabilità del componente centrale, dato che un suo guasto bloccherebbe l'intera rete.

Topologia ad Anello

In una rete che utilizza la topologia ad anello tutti i PC sono collegati tramite un unico cavo che rappresenta un anello logico. Il segnale viaggia attraverso l'anello in una sola direzione attraverso i computer che costituiscono i nodi della rete fino a raggiungere il PC di destinazione. Ogni nodo funge da ripetitore del segnale che viene amplificato di passaggio in passaggio.



Nelle reti ad anello il metodo utilizzato per la trasmissione dei dati è basato sul concetto di TOKEN. Un TOKEN è un insieme di bit che viaggia sull'anello contenente informazioni di controllo.

Quando un PC deve inviare dati si impossessa del TOKEN, lo modifica e lo invia insieme al messaggio. I dati viaggiano fino a che non arrivano al computer di destinazione, che, una volta confrontato il proprio indirizzo con quello contenuto nel messaggio, elabora i dati ricevuti, e se necessario, crea un nuovo TOKEN per ritrasmettere dati sulla rete.

Il principale vantaggio della rete ad anello è il costo ridotto necessario per collegare un gruppo di PC.

Lo svantaggio principale di questo tipo di struttura deriva dalla limitata flessibilità visto che l'aggiunta di una nuova stazione comporta l'apertura dell'anello che comporterebbe la sospensione delle attività per il tempo necessario all'inserimento. Inoltre l'affidabilità della rete dipende dall'affidabilità di tutte le stazioni collegate; se una di esse ha un malfunzionamento l'anello si interrompe e l'intera rete risulterebbe bloccata.

Reti miste o Topologie Ibride

In una rete mista, due o più topologie vengono combinate insieme per formare una rete di dimensione maggiore.

Le due topologie ibride comunemente utilizzate sono:

- Topologia a Stella-Bus: in cuoi due o più reti a stella vengono collegate attraverso un BUS.
- Topologia Stella-Anello: in cui due o più reti a stella vengono collegate in modo da formare un anello.

Protocolli di Rete

Il solo collegamento fisico non è sufficiente per permettere la comunicazione fra calcolatori. Due o più macchine infatti possono comunicare tra loro rispettando norme che sono dette *protocolli di rete* o *protocolli di comunicazione*. L'aderenza ai protocolli garantisce che due software in esecuzione su diverse macchine possano comunicare correttamente, anche se sono stati realizzati indipendentemente.

Un *protocollo di comunicazione* è pertanto *un insieme di regole e convenzioni che controllano lo scambio di informazioni in una comunicazione* come, ad esempio:

- A quale velocità avviene l'invio di byte.

- Quali segnali indicano l’inizio e la fine di una trasmissione.
- Quali tecniche si usano per verificare la correttezza dei messaggi.
- Quale segnale indica la corretta ricezione del messaggio.

Esistono diversi tipi di protocollo che si differenziano per diverse caratteristiche. Alcuni sono protocolli aperti cioè non di proprietà di uno specifico produttore, altri sono protocolli proprietari.

Alcuni sono instradabili cioè in grado di far viaggiare le informazioni attraverso i router, altri invece sono utilizzabili a livello locale.

TCP/IP

Cosa significa TCP/IP

TCP/IP è una serie di protocolli. La sigla TCP/IP significa “Transmission Control Protocol/Internet Protocol”. Esso proviene dai nomi dei due protocolli maggiori della serie di protocolli, cioè i protocolli “*TCP*” e “*IP*”.

TCP/IP rappresenta in un certo modo l’insieme delle regole di comunicazione su Internet e si basa sulla nozione di indirizzamento IP, cioè il fatto di fornire un indirizzo IP ad ogni terminale di rete per poter inviare dei pacchetti di dati. Dato che la serie protocollare TCP/IP è stata creata in origine per scopi militari, essa è concepita per rispondere ad un certo numero di criteri fra i quali:

- Il frazionamento dei messaggi in pacchetti;
- L’uso di un sistema di indirizzi;
- L’invio di dati sulla rete (routing);
- Il controllo degli errori di trasmissione di dati.

TCP/IP è un modello a livelli

Per poter applicare il modello TCP/IP a tutti i terminali, cioè indipendentemente dal sistema operativo, il sistema di protocollo TCP/IP è stato scomposto in più moduli ciascuno con un compito preciso. Inoltre, questi moduli svolgono i compiti gli uni dopo gli altri in un ordine preciso, con un sistema stratificato, ragione per cui si parla di modello a *livelli*.

Il termine “livello” è usato per evocare il fatto che i dati che transitano sulla rete attraversano più livelli di protocolli. Così, i dati (pacchetti di informazioni) che circolano sulla rete sono trattati successivamente per ogni livello, che aggiunge un elemento d’informazione (detto intestazione) e poi li trasmette al livello successivo.

Il modello TCP/IP è molto simile al modello OSI (con 7 livelli) che è stato messo a punto dall’organizzazione internazionale degli standard per normalizzare le comunicazioni tra computer.

Lo scopo di un sistema a livelli è di separare il problema in differenti parti (i livelli) secondo il loro livello di astrazione.

Ogni livello del modello comunica con un livello adiacente (quello sopra o quello sotto). Ogni livello usa inoltre i servizi dei livelli inferiori e ne fornisce a quelli superiori.

Il modello OSI

Il modello OSI è un modello che prevede 7 livelli, mentre il modelli TCP/IP ne prevede solo 4. In realtà, il modello TCP/IP è stato sviluppato quasi nello stesso momento del modello OSI, ed è la ragione per cui ci si ispira ma non è totalmente conforme alle specifiche del modello OSI. I livelli del modello OSI sono i seguenti:

1. Il *livello fisico* definisce il modo in cui di dati sono fisicamente convertiti in segnali digitali sui media di comunicazione (impulsi elettrici, modulazioni della luce, ecc.).
2. Il *livello collegamento dati* definisce l'interfaccia con la scheda di rete e la condivisione del media di trasmissione.
3. Il *livello rete* permette di gestire l'indirizzamento e il routing dei dati, cioè il loro invio tramite la rete.
4. Il *livello trasporto* è incaricato del trasporto dei dati, della loro divisione in pacchetti e della gestione degli eventuali errori di trasmissione.
5. Il *livello sessione* definisce l'apertura e la distruzione delle sessioni di comunicazione tra i terminali di rete.
6. Il *livello presentazione* definisce il formato dei dati manipolato dal livello applicativo (loro rappresentazione, eventualmente loro compressione e loro codifica) indipendentemente dal sistema.
7. Il *livello applicazione* assicura l'interfaccia con le applicazioni. Si tratta quindi del livello più vicino agli utenti, gestito direttamente da alcuni software.

Il modello TCP/IP

Il modello TCP/IP, ispirato al modello OSI, riprende l'approccio modulare ma ne contiene solo quattro:

1. *Livello Accesso di rete*: specifica la forma nella quale i dati devono essere inviati indipendentemente dal tipo di rete usata.
2. *Livello Internet*: si incarica di fornire il pacchetto di dati.
3. *Livello Trasporto*: assicura l'invio dei dati, nonché i meccanismi che permettono di conoscere lo stato della trasmissione.
4. *Livello Applicazione*: ingloba le applicazioni standard della rete (Telnet, SMTP, FTP, etc.).

Come si può notare, i livelli del modello TCP/IP hanno dei compiti ben diversi da quelli del modello OSI, dato che alcuni livelli del modello TCP/IP corrispondono a più livelli del modello OSI.

Regole del TCP/IP

Ogni calcolatore viene identificato sulla rete mediante un indirizzo a 32 bit (4byte), pertanto in linguaggio decimale un indirizzo IP è costituito da 4 numeri compresi tra 0 e 255 separati da un punto.

Ad ogni indirizzo IP viene associata una subnet mask anch'essa rappresentata in notazione decimale da 4 numeri compresi tra 0 e 255 separati da un punto che serve per determinare la parte dell'indirizzo IP che identifica la sottorete di appartenenza del calcolatore e la parte che invece identifica il calcolatore stesso in quella particolare sottorete.

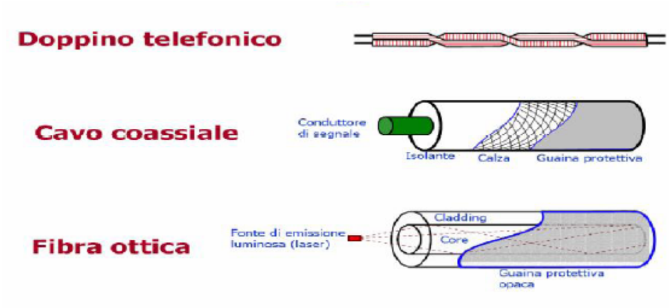
Esempio:
Indirizzo IP: 192.168.1.2
Subnet mask: 255.255.255.0

Trasmissione

Mezzi di trasmissione

Per la comunicazione tra calcolatori si possono usare diversi canali fisici di trasmissione. Possono essere utilizzati mezzi guidati e mezzi non guidati.

I *mezzi guidati* sono caratterizzati da linee fisiche che portano il segnale fino al ricevitore e supportano la trasmissione di segnali elettrici oppure ottici. Esempi di mezzi guidati sono il doppino telefonico, il cavo coassiale o le fibre ottiche.



Fili di rame

Corpo centrale conduttore

Filamento vetroso di silicio

Nei *mezzi non guidati* invece i segnali vengono trasmessi e ricevuti mediante antenne. In particolare, l’antenna del trasmettitore irradia nello spazio onde elettromagnetiche che l’antenna ricevente è in grado di captare. La trasmissione del segnale in un mezzo non guidato può essere a sua volata direzionale quando la trasmissione avviene punto-a-punto oppure non direzionale quando la trasmissione avviene da un sistema trasmittente ad un insieme di sistemi riceventi non definito a priori.

Teoria della Trasmissione

Le informazioni non vengono trasmesse sulla rete in un unico blocco ma vengono suddivise in *pacchetti* che possono arrivare a destinazione seguendo percorsi diversi e in tempi diversi.

Una volta giunti a destinazione, vengono poi riassemblati in modo tale da ottenere la struttura originale.

Perché i dati non vengono trasmessi in modalità unitaria ma si preferisce scomporli in pacchetti?

I motivi per cui nelle comunicazioni di rete si utilizzano i pacchetti sono molteplici.

Innanzi tutto per rendere possibile l’utilizzo contemporaneo della rete da PC evitando situazioni di monopoli inefficaci e poco funzionali.

Ad esempio, se un PC inviasse sulla rete un file di grandi dimensioni in un unico blocco, per diversi minuti il supporto fisico risulterebbe occupato e quindi inutilizzabile dagli altri calcolatori che magari hanno bisogno di trasmettere solamente brevi messaggi di controllo.

In secondo luogo perché in caso di problemi o errori in fase di trasferimento si dovrà ritrasmettere solo una parte di dati e non l’intero file.

In generale la divisione in pacchetti permette di ottimizzare il trasferimento delle informazioni e quindi incrementare le prestazioni della rete.

Struttura dei pacchetti

La struttura dei pacchetti può variare anche in maniera significativa in base all’architettura utilizzata per l’implementazione della rete.

Alcune caratteristiche sono comunque comuni e riscontrabili in tutti gli ambienti, in particolare un pacchetto contiene sempre le seguenti informazioni:

- indirizzo di origine
- indirizzo di destinazione
- istruzioni sulle modalità di trasferimento dei dati
- informazioni sulla modalità di connessione del pacchetto ad altri pacchetti per il riassemblaggio dei dati
- informazioni per il controllo degli errori
- dati

Hardware delle reti LAN

Le reti LAN utilizzano una struttura basata su cavi e concentratori che permette il trasferimento di informazioni. In un'ottica di questo tipo, i computer che prendono parte allo scambio dei dati possono ricoprire vari ruoli. Alcuni calcolatori mettono in toto o in parte le loro risorse a disposizione degli altri calcolatori della rete: sono i cosiddetti *server*. I PC che invece accedono ai server e ne utilizzano le risorse in spazio di memorizzazione, potenza di calcolo, applicazioni e periferiche costituiscono i *client*.

In alcuni casi i calcolatori possono operare contemporaneamente sia come client che come server: un tipico esempio e' quello costituito da un gruppo di PC che formano un gruppo di lavoro o workgroup.

Scheda di rete

Il collegamento fisico tra un PC e il cavo di rete avviene attraverso un componente specifico che è la *scheda di rete*.

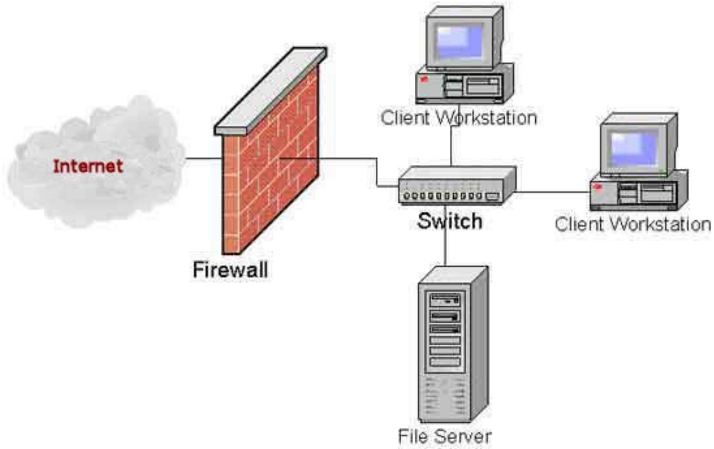
Ogni scheda di rete viene identificata in modo univoco attraverso l'indirizzo fisico o *indirizzo MAC* (Media Access Control) assegnato in fase di costruzione dal produttore del componente. Ogni produttore ha a sua disposizione un range determinato di indirizzi fisici unico e diverso da quello di tutti gli altri in modo che a livello mondiale non esistano due schede di rete con indirizzo fisico identico.

Esistono diverse tipologie di schede di rete che si differenziano tra loro per aspetto, dimensioni e prestazioni.

Le schede PCMCIA, ad esempio, che vengono tipicamente utilizzate con i calcolatori portatili, sono decisamente piccole ed hanno un aspetto molto simile a quello di una carta di credito, altre schede invece si contraddistinguono per una serie di funzionalità avanzate che le rendono adatte all'utilizzo sui server di rete.

Alcune ad esempio dispongono di una banda passante particolarmente elevata o di un microprocessore incorporato che ne incrementa le prestazioni, altre addirittura di uscite multiple per il collegamento contemporaneo di più cavi di rete.

Firewall



Un firewall (termine inglese, la traduzione letteraria è “muro tagliafuoco”) è un componente passivo di difesa perimetrale che può anche svolgere funzioni di collegamento tra due o più tronconi di rete. Usualmente la rete viene divisa in due sottoreti: una, detta esterna, comprende l’intera Internet mentre l’altra interna, detta LAN (Local Area Network), comprende una sezione più o meno grande di un insieme di computer locali.

Una definizione di firewall è la seguente: *apparato di rete hardware o software che filtra tutti i pacchetti entranti ed uscenti, da e verso una rete o un computer, applicando regole che contribuiscono alla sicurezza della stessa*.

In realtà un firewall può essere realizzato con un normale computer (con almeno due schede di rete e software apposito), può essere una funzione inclusa in un router o può essere un apparato specializzato. Esistono inoltre i cosiddetti “firewall personali”, che sono programmi installati sui normali calcolatori, che filtrano solamente i pacchetti che entrano ed escono da quel calcolatore; in tal caso viene utilizzata una sola scheda di rete.

La funzionalità principale è quella di creare un filtro sulle connessioni entranti ed uscenti, in questo modo il dispositivo innalza il livello di sicurezza della rete e permette sia agli utenti interni che a quelli esterni di operare nel massimo della sicurezza. Il firewall agisce sui pacchetti in transito da e per la zona interna potendo eseguire su di essi operazioni di

- controllo,
- modifica,
- monitoraggio.

Questo grazie alla sua capacità di “aprire” i pacchetti IP per leggere le informazioni presenti all’interno e effettuare verifiche sul contenuto del pacchetto.

Modem

Il modem è un dispositivo elettronico che rende possibile la comunicazione di più sistemi informatici (ad esempio dei computer) utilizzando un canale di comunicazione composto tipicamente da un doppino telefonico.

Questo dispositivo permette la *MO*dulazione e la *DEM*odulazione dei segnali contenenti le informazioni, dal nome di queste due funzioni principali il dispositivo prende appunto il nome di *MODEM*. In altre parole, sequenze di bit vengono ricodificate come segnali elettrici. Il modem è anche una componente fondamentale del Fax. In pratica il Modem, associato ad un terminale di rete ovvero un PC, attua tutte quelle procedure di codifica e conversione del segnale elettrico informativo da analogico a digitale (demodulazione numerica) in entrata al PC (che è per l’appunto un sistema digitale) e da digitale ad analogico (modulazione numerica) in uscita dal PC lungo il canale di trasmissione, ovvero il doppino telefonico, verso altre destinazioni della Rete. Può essere visto quindi come un opportuno dispositivo elaborativo di rice-trasmissione nell’ambito delle comunicazioni o trasmissioni di tipo digitali o numeriche.

HUB

Gli HUB sono dispositivi che permettono il collegamento del computer in strutture che utilizzano una topologia a stella.

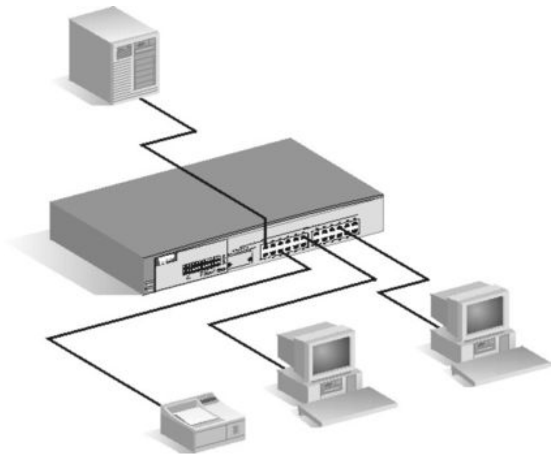
Sono dotati di un numero variabile di porte alle quali vengono collegati, tipicamente attraverso un cavo intrecciato, i vari PC della rete.

Se uno dei cavi si rompe solo il computer direttamente connesso al cavo danneggiato risulta scollegato dalla rete, tutti gli altri continuano a comunicare normalmente.

Esistono 2 tipi differenti di HUB:

- HUB PASSIVI che si limitano a trasmettere il segnale ricevuto su tutte le porte senza amplificarlo.
- HUB ATTIVI chiamati ripetitori multiporte che invece ritrasmettono il segnale dopo averlo processato e amplificato.

Switch



Uno switch (voce inglese, in italiano è letteralmente “il commutatore”) è un dispositivo di rete che inoltra selettivamente i frame ricevuti verso una porta di uscita.

Come con un HUB, due nodi possono comunicare attraverso uno switch come se questo non ci fosse, ovvero il suo comportamento è trasparente. A differenza però di quanto farebbe un HUB, uno switch normalmente inoltra i frame in arrivo da una qualsiasi delle sue porte soltanto a quella cui è collegato il nodo destinatario del frame.

Uno switch possiede quindi l’intelligenza necessaria a riconoscere i confini dei frame nel flusso di bit, immagazzinarli, decidere su quale porta inoltrarli, trasferirli verso una porta in uscita, trasmetterli.

Normalmente uno switch opera al livello di collegamento dati del modello di riferimento ISO/OSI.

Router

Un router (voce inglese, in italiano è letteralmente “l’instradatore”), è un dispositivo di rete che si occupa di instradare pacchetti informativi.

La caratteristica fondamentale dei router è che la funzione di instradamento è basata sugli indirizzi di livello 3 (livello di rete) del modello OSI (corrispondente al livello IP dello stack TCP/IP), a differenza dello switch che instrada sulla base degli indirizzi di livello 2 (livello di collegamento). Gli elementi della tabella di instradamento (o Routing Table) non sono quindi singoli calcolatori ma intere reti, ovvero sottoinsiemi anche molto ampi dello spazio di indirizzamento. Questo è fondamentale per la scalabilità delle reti, in quanto permette di gestire reti anche molto grandi facendo crescere le tabelle di instradamento in modo meno che lineare rispetto al numero di host .

In generale i router necessitano di essere configurati, non essendo dispositivi plug and play. A seconda della tipologia del router, per essere configurato esso fornisce un'interfaccia basata su web (accessibile digitando l'indirizzo del gateway nel browser) o attraverso un'apposita console a linea di comando su porta seriale.

Per garantire la massima affidabilità e lo sfruttamento ottimale dei collegamenti in caso di reti complesse costituite da molte sottoreti diverse e variamente interconnesse, i router possono costruire le loro tabelle di instradamento autonomamente in modo dinamico, scambiandosi periodicamente informazioni su come raggiungere le varie reti che collegano l'un l'altro.

Alcuni router possiedono anche un firewall incorporato, poiché il punto di ingresso/uscita di una rete verso l'esterno è ovviamente il luogo migliore dove effettuare controlli sui pacchetti in transito.

Internet

Nata su progetto del ministero della difesa statunitense nei primi anni '60 con il nome di ARPANET per consentire lo scambio di informazioni tra le università americane e le istituzioni militari, nel corso degli anni *Internet* ha subito profonde modifiche che la hanno portata a sviluppare ben oltre gli obiettivi cui era stata originariamente progettata.

Partita come struttura essenzialmente militare Internet si è pian piano trasformata fino a diventare il più grande mezzo di comunicazione esistente a livello mondiale.

Una rete di computer mondiale ad accesso pubblico è stata teorizzata per la prima volta nel 1960 dallo statunitense J.C.R. Licklider, docente del Massachusetts Institute of Technology ed è divenuta una realtà solo a partire dal 1990 quando il governo degli Stati Uniti ha legiferato la possibilità di ampliare, a fini di sfruttamento commerciale da parte dell'iniziativa privata, una Internet che in quel momento era una rete di computer mondiale di proprietà statale destinata al mondo scientifico (università e laboratori di ricerca).

Il vero boom di Internet si ha con l'avvento del World Wide Web (WWW) nel 1991. Nato su progetto di Ginevra il WWW definisce l'insieme di regole che rendono più agevole l'utilizzo della rete grazie all'introduzione del concetto di *link* che rende la navigazione più semplice e intuitiva.

Con la nascita del WWW, a cui fa seguito un immediato successo in ragione delle sue funzionalità, della sua efficienza, e non ultima, della sua facilità di utilizzo, ha poi inizio la crescita esponenziale di Internet. Crescita che in pochissimi anni la porterà a cambiare per sempre la società moderna rivoluzionando il modo di relazionarsi delle persone come quello di lavorare tanto che nel 1998 si arriverà a parlare di "nuova economia".

Con il WWW diventa possibile scambiare attraverso la rete dati non solo in formato testo ma anche immagini, filmati, suoni e musica.

Internet è oggigiorno una rete di computer mondiale ad accesso pubblico attualmente rappresentante anche uno dei principali mezzi di comunicazione di massa. Chiunque infatti disponga di un computer e degli opportuni software, appoggiandosi ad un ISP che gli fornisce un accesso a Internet attraverso una linea di telecomunicazioni dedicata (ADSL, GPRS, ecc.) o una linea telefonica può accedere a Internet ed utilizzare i suoi servizi. Ciò è reso possibile alla suite di protocolli di rete

“TCP/IP” che permette ai vari computer di Internet di comunicare tra di loro indipendentemente dalla loro architettura hardware e software.

Costituita da alcune centinaia di milioni di computer collegati tra loro con i più svariati mezzi trasmissivi, Internet è anche la più grande rete di computer attualmente esistente, motivo per cui è definita “*rete delle reti*” o “*rete globale*”.

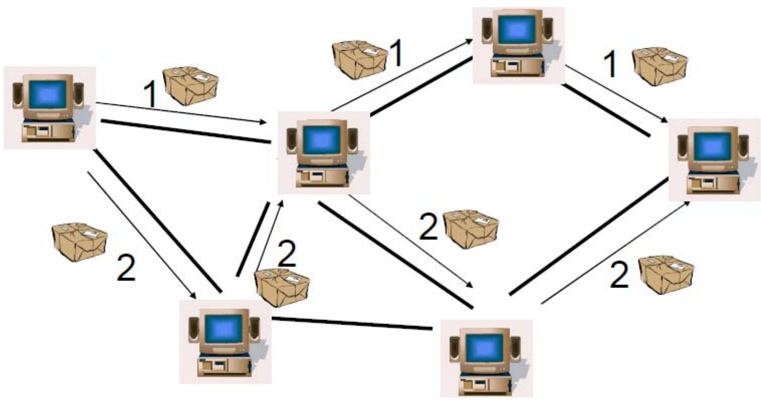
Internet offre i più svariati servizi, i principali dei quali sono il WWW e la posta elettronica. Quest’ultima viene utilizzata per le comunicazioni più disparate sia private che pubbliche, sia lavorative che ricreative, sia scientifiche che commerciali. I suoi utenti, in costante crescita, già alla fine del 2005 hanno superato il miliardo.

Internet può essere vista come una rete logica di enorme complessità, appoggiata a strutture fisiche e collegamenti di vario tipo (fibre ottiche, cavi coassiali, collegamenti satellitari, doppino telefonico, collegamenti su radiofrequenza, su ponti radio, su raggi laser e su onde convogliate su condotte elettriche o addirittura idrauliche) che interconnette un agente umano o automatico ad un altro agente tramite, praticamente, qualsiasi tipo di computer o elaboratore elettronico oggi o in futuro esistente o immaginabile.

Ogni dispositivo connesso direttamente ad Internet si chiama *host* (“ospite” in inglese) mentre la struttura che collega i vari host si chiama *link di comunicazione*.

Da qualche anno è ormai possibile collegarsi a questa grande rete da dispositivi mobili come palmari o telefoni cellulari. In breve dovrebbe essere possibile per uno di questi dispositivi non solo “accedere” ad Internet, ma anche “subire l’accesso” da parte di altri host in Internet.

Ciò che viaggia in Internet sono i *pacchetti*, che costituiscono l’unità minima in questo sistema di comunicazione. Tali pacchetti viaggiano usando una tecnica conosciuta come *commutazione di pacchetto* (“packet switching”) che consente di condividere un cammino piuttosto che fare uso di percorso dedicato. In pratica un pacchetto che parte da un host e giunge ad un altro host non segue un percorso predefinito, ma quello più congeniale in un preciso momento.



L’utenza casalinga accede ad Internet mediante l’uso di *Internet Service Provider* (“fornitori di servizi Internet”, abbreviato in “ISP”) i quali sono connessi a loro volta ad ISP di livello superiore che utilizzano router ad alta velocità e link in fibra ottica.

Come si comprende, la struttura di Internet non è uniforme ma la “ragnatela” è composta da un’ossatura molto veloce e potente a cui si connettono sottoreti a volte più deboli e lente.

Queste sottoreti possono anche essere protette e, quindi, consentono l’accesso a Internet (e viceversa) solo in maniera condizionata. Si tratta delle *Intranet* e la protezione è un *firewall*.

I vari nodi Internet sono collegati tra loro in diversi modi e tramite diversi percorsi. Questo tipo di collegamento può essere compreso alla luce delle motivazioni che negli anni sessanta dettarono la nascita di Internet (allora denominata ARPANET): creare una rete di elaboratori decentrata che potesse resistere ad un attacco nucleare da parte dell’Unione Sovietica. Una tale rete decentrata sarebbe sopravvissuta a molti attacchi visto che un attacco ad un singolo elaboratore non avrebbe impedito il funzionamento generale, ed i collegamenti ridondanti avrebbero sostituito quelli distrutti.

Le modalità di utilizzo di Internet differiscono a seconda del tipo di servizio che si richiede e al tipo di server a cui ci si collega; per citarne solo alcune:

- Posta elettronica (*e-mail*). Consente di inviare e ricevere (a/da utenti) messaggi contenenti testo ed altri formati (es.: immagini, video, audio). La modalità di funzionamento dei server di posta elettronica e di molti programmi client viene detta store-and-forward.
- *File Transfer Protocol* ("Protocollo di trasferimento dati", FTP). Consente di inviare e ricevere (a/da sistemi) file, cioè insiemi di informazioni codificate in maniera binaria (es.: testi, immagini, filmati, programmi, ecc.).
- *Hyper Text Transfer Protocol* ("Protocollo di trasferimento ipertesti", HTTP). Consente di organizzare le informazioni e le risorse presenti in rete in maniera non-sequenziale (Collegamento ipertestuale). L'HTTP funziona su un meccanismo richiesta/risposta (client/server): il client esegue una richiesta ed il server restituisce la risposta. Nell'uso comune il client corrisponde al browser ed il server al sito web.

Capitolo 6

Introduzione ai DBMS. Scopi di un DBMS

Un DataBase Management System (*DBMS*) consiste in una collezione di dati correlati e in un insieme di programmi per accedere questi dati. Le collezioni dei dati, generalmente denominati database, contengono informazioni su una determinata organizzazione.

Il *primo scopo di un DBMS* è quello di fornire un ambiente che è sia conveniente che efficiente da usare nel recupero e nella memorizzazione delle informazioni. I DBMS sono stati *progettati per gestire* grandi quantità di informazioni.

La gestione delle informazioni comporta tanto la definizione di strutture per la loro memorizzazione che di meccanismi per la loro manipolazione.

Inoltre, un DBMS deve gestire *la sicurezza* delle informazioni memorizzate, ovvero deve essere capace di far fronte sia a crash del sistema che ad accessi non autorizzati.

Un DBMS deve essere capace di gestire, in modo corretto ed efficiente, la *condivisione dei dati* tra diversi utenti.

Per comprendere meglio tutte queste problematiche consideriamo il seguente esempio. Supponiamo di dover gestire l'informatizzazione di una *filiale di una banca* che mantiene informazioni sui clienti e sui conti.

Un modo per mantenere l'informazione su un computer è quello di *memorizzarla in file permanenti*.

Per consentire agli utenti di manipolare le informazioni, il sistema deve avere un certo *numero di programmi applicativi* che manipolano i file corrispondenti; tra questi programmi dovranno necessariamente essere presenti:

- un programma per la gestione dei depositi e dei prelievi;
- un programma per aggiungere un nuovo conto;
- un programma per calcolare il saldo di un conto;
- un programma per generare gli estratti conto.

Questi programmi applicativi vengono scritti da *programmatori* in risposta alle necessità della banca.

Nuovi programmi applicativi vengono aggiunti al sistema mano a mano che nascono nuove necessità (si pensi, ad esempio, ai programmi per la gestione dei conti on-line). Così, con il passare del tempo, *più file e più programmi applicativi* vengono aggiunti al sistema.

I file che compongono il sistema sono supportati da un *sistema operativo convenzionale*. Le informazioni di interesse vengono memorizzate in vari file; inoltre, vengono scritti diversi programmi applicativi per estrarre o inserire nuovi dati nei file appropriati.

Prima dell'avvento dei DBMS le organizzazioni memorizzavano le informazioni utilizzando tipicamente tali sistemi.

Questo modo di gestire le informazioni comporta, però, alcuni *grossi svantaggi*. Più specificatamente, vi possono essere:

- *Ridondanze ed inconsistenze dei dati*. Dal momento che i file e i programmi applicativi vengono scritti, nel tempo, da programmatori differenti, i vari file avranno probabilmente *formati differenti* e i programmi possono essere scritti in diversi linguaggi di programmazione.

  Inoltre, la stessa informazione *può essere duplicata* in diversi posti. Per esempio, l'indirizzo e il numero di telefono di un particolare cliente può apparire nel file dei conti e, ad esempio, nel file dei depositi. Tale ridondanza porta a dei costi di memorizzazione e di accesso più alti.

  Inoltre, essa può portare ad *inconsistenza dei dati*, ovvero le varie copie degli stessi dati potrebbero differire. Ad esempio, il cambiamento dell'indirizzo di un cliente può essere stato registrato nel file dei conti e non in quello dei depositi.

- *Difficoltà nell'accedere ai dati*. Si supponga che uno degli impiegati bancari debba selezionare i nomi di tutti i clienti che vivono nella parte di città con CAP 89128. L'impiegato chiede al dipartimento di elaborazione dei dati di generare tale lista. Poiché tale richiesta non è stata prevista quando il sistema originale è stato progettato, non vi è alcun programma applicativo già pronto per soddisfarlo.

  C'è, tuttavia, un programma applicativo per *generare la lista di tutti i clienti*. L'impiegato bancario ha ora *due scelte*: o ottiene la lista di tutti i clienti ed estrae da questa manualmente l'informazione desiderata oppure chiede al dipartimento di elaborazione dei dati di scrivere un opportuno programma applicativo. *Entrambe le alternative sono, ovviamente, insoddisfacenti*.

  Si supponga che tale programma sia stato scritto e che, alcuni giorni dopo, lo stesso impiegato *deve aggiornare la lista* per includere solo quei clienti che hanno un saldo maggiore di 10000 euro. Chiaramente, un programma per aggiornare tale lista non esiste. Ancora una volta l'impiegato ha le due opzioni precedenti, nessuna delle quali è soddisfacente.

  Il punto qui è che i tradizionali ambienti per l'elaborazione dei file non permettono un recupero conveniente ed efficiente delle informazioni di interesse.

- *Isolamento dei dati*. Poiché i dati sono distribuiti su più file e questi possono avere formati differenti, è difficile scrivere nuovi programmi applicativi per recuperare le informazioni desiderate.

- *Problemi di integrità*. I valori dei dati memorizzati nel database devono soddisfare alcuni *vincoli di integrità*. Per esempio, il bilancio di un conto in banca non può mai scendere al di sotto di un valore prescritto (diciamo, 25 euro).

  Per controllare che tali vincoli vengano rispettati, gli sviluppatori dovranno aggiungere del codice appropriato nei vari programmi applicativi.

  Tuttavia, se vi è la necessità di aggiungere nuovi vincoli, sarà necessario cambiare i programmi aggiungendo nuovo codice per controllare che i vincoli stessi vengano rispettati. Ciò risulta essere molto difficile.

  Tale attività diventa particolarmente complessa quando i vincoli coinvolgono diversi dati provenienti da file differenti.

- *Problemi di atomicità*. Un computer, come qualunque altro dispositivo meccanico o elettronico, è soggetto a guasto. In molte applicazioni è cruciale assicurarsi che, una volta che è avvenuto un guasto e che lo stesso è stato individuato, i dati vengano riportati all'ultimo stato consistente esistente prima del guasto.

Si consideri, a titolo di esempio, un programma per trasferire 50 euro dal conto A al conto B. Se accade un guasto nel sistema durante l'esecuzione del programma è possibile che 50 euro vengano rimossi dal conto A ma non accreditati nel conto B, comportando una inconsistenza nel database.

Chiaramente è essenziale, per la consistenza del database, che vengano registrati sia gli accrediti che gli addebiti oppure che non vengano registrati nessuno dei due. In altre parole, il trasferimento dei fondi deve essere un'operazione *atomica*, cioè deve avvenire nella sua interezza o non deve avvenire affatto. è difficile assicurare tale proprietà con un file system tradizionale.

- *Anomalie nell'accesso concorrente*. Affinché si possa migliorare la performance complessiva del sistema, ottenendo un tempo di risposta alle interrogazioni minore, molti sistemi consentono *a più utenti* di aggiornare simultaneamente i dati.

  In tali ambienti l'interazione di *aggiornamenti concorrenti* può portare a dati inconsistenti. Si consideri un conto A che contiene 500 euro. Se due clienti prelevano soldi (diciamo 50 euro e 100 euro, rispettivamente) dal conto A nello stesso istante, il risultato dell'esecuzione concorrente può lasciare il conto in uno stato incorretto (o inconsistente).

  Si supponga che i programmi che gestiscono il prelievo leggano il vecchio saldo, riducono il valore della quantità da prelevare e riscrivano il risultato. Se i due programmi vengono eseguiti concorrentemente essi possono entrambi leggere il valore 500 euro e scrivere di nuovo 450 euro e 400 euro, rispettivamente. A seconda di chi scrive il valore, il conto può contenere 450 euro oppure 400 euro, piuttosto che il valore corretto di 350 euro.

  Per affrontare tale problema il sistema deve mantenere qualche forma di supervisione. Poiché i dati possono essere acceduti da programmi applicativi che non sono stati precedentemente coordinati, la supervisione è difficile da garantire.

- *Problemi di sicurezza*. Non tutti gli utenti del DBMS dovrebbero essere capaci di accedere a tutti i dati. Per esempio, in un sistema bancario, il personale che gestisce i pagamenti deve vedere solo la parte del database che contiene informazioni sui vari impiegati bancari. Esso non deve accedere ad informazioni sui conti dei clienti. Tali vincoli di sicurezza possono essere difficilmente garantiti con una gestione basata sui file dal momento che, in questo caso, è difficile controllare tutti i programmi "ad-hoc" che, via via, vengono aggiunti al sistema.

Queste difficoltà, tra le altre, hanno *stimolato lo sviluppo dei DBMS*.

Modelli dei dati

Un modello dei dati è un formalismo matematico composto da due parti:

- una notazione per descrivere i dati;
- un insieme di operazioni per manipolare i dati.

I modelli si suddividono in:

- *Modelli concettuali*; essi vengono utilizzati per descrivere i dati in maniera completamente indipendente dalla struttura del DBMS sottostante; tali modelli non sono disponibili su DBMS commerciali. Il loro nome deriva dal fatto che essi tendono a descrivere i concetti del mondo reale, piuttosto che i dati utili a rappresentarli.

  I modelli concettuali vengono utilizzati durante la fase preliminare del processo di progettazione di basi di dati, per analizzare nel modo migliore la realtà di interesse, senza preoccuparsi del DBMS con cui questa viene successivamente rappresentata.

Il più importante modello concettuale è il modello Entità/Relazione.

- *Modelli logici*; essi sono gli effettivi modelli di riferimento per i vari DBMS; essi descrivono la realtà avendo come riferimento una strutturazione concreta dei dati (ad alberi, a grafi, a tabelle, ad oggetti). Modelli logici molto comuni sono il modello gerarchico, quello reticolare, quello relazionale e quello orientato agli oggetti.
- *Il modello relazionale* rappresenta la realtà di interesse per mezzo di relazioni. Una relazione si può rappresentare mediante una tabella le cui righe rappresentano specifiche istanze e le cui colonne corrispondono a specifiche proprietà; l'ordine delle righe e delle colonne è sostanzialmente irrilevante.

Schemi e Istanze

Nelle basi di dati esiste una parte sostanzialmente invariante nel tempo, detta *schema della base di dati*, che definisce le caratteristiche e la struttura dei dati, ed una parte variabile nel tempo, detta *istanza o stato della base di dati*, che memorizza i valori effettivi.

Ad esempio, consideriamo un fornitore. Il corrispondente schema è dato dal codice, dal nome e dall'indirizzo. Scriveremo:

FORNITORE(Codice, Nome, Indirizzo)

Le istanze rappresentano gli effettivi fornitori. Ad esempio:

1	Rossi	Reggio Calabria
2	Bianchi	Cosenza
3	Verdi	Roma

Lo schema prende anche il nome di componente *intensionale* della base di dati mentre le istanze rappresentano la sua componente *estensionale*.

Introduzione alla progettazione di un Sistema Informativo

Il ciclo di vita dei Sistemi Informativi

La progettazione di una base di dati costituisce solo una delle componenti del processo di sviluppo di un sistema informativo; essa va, quindi, inquadrata in un contesto più ampio, quello del *ciclo di vita dei Sistemi Informativi*.

Tale ciclo comprende, generalmente, le seguenti attività:

- *Studio di fattibilità*. Serve a definire, in modo quanto più possibile preciso, i costi delle varie alternative possibili nonché a stabilire le priorità di realizzazione delle varie componenti del sistema.
- *Raccolta e analisi dei requisiti*. Consiste nella individuazione e nello studio delle proprietà e delle funzionalità che il Sistema Informativo dovrà avere. Tale fase richiede un'interazione con gli utenti del sistema e produce una descrizione completa, ma generalmente informale, dei dati coinvolti e delle operazioni su di essi. Vengono, inoltre, stabiliti i requisiti software e hardware del Sistema Informativo.
- *Progettazione*. Si divide generalmente in *progettazione dei dati* e *progettazione delle applicazioni*. La progettazione dei dati ha lo scopo di individuare la struttura e l'organizzazione che i dati dovranno avere; la progettazione delle applicazioni ha lo scopo di definire le caratteristiche dei programmi applicativi. Le due attività sono complementari e

possono procedere in parallelo o in cascata. Le descrizioni dei dati e dei programmi prodotte in questa fase sono formali e fanno riferimento a specifici modelli.

- *Implementazione*. Consiste nella realizzazione del Sistema Informativo secondo la struttura e le caratteristiche definite durante la fase di progettazione. Viene costruita e popolata la base di dati e viene sviluppato il codice dei programmi.
- *Validazione e collaudo*. Serve a verificare il corretto funzionamento e la qualità del Sistema Informativo realizzato. La sperimentazione deve prevedere, per quanto possibile, tutte le condizioni operative.
- *Funzionamento*. Durante questa fase il Sistema Informativo diventa operativo e richiede, a meno di malfunzionamento o revisioni delle sue funzionalità, solo operazioni di gestione e manutenzione.

Va precisato che il processo non è quasi mai strettamente sequenziale in quanto spesso, durante l'esecuzione di una di queste attività, è necessario rivedere decisioni prese durante le attività precedenti.

Oggi viene spesso effettuata anche la *prototipizzazione,* che consiste nell'uso di specifici strumenti software per la realizzazione rapida di una versione semplificata del Sistema Informativo, con la quale sperimentare le sue funzionalità. La verifica del prototipo può portare a una modifica dei requisiti e ad una eventuale revisione del progetto.

Le basi di dati costituiscono, in effetti, solo *una delle componenti di un Sistema Informativo* che tipicamente include anche i programmi applicativi, le interfacce con l'utente e altri programmi di servizio.

Tuttavia, il ruolo centrale che i dati hanno in un sistema informativo giustifica ampiamente uno studio autonomo relativo alla progettazione delle basi di dati.

Metodologia di progettazione delle basi di dati

Nell'ambito delle basi di dati si è consolidata negli anni una metodologia di progettazione oramai da tutti accettata come standard.

Tale metodologia distingue, innanzitutto, tra progettazione dei dati e progettazione delle applicazioni.

La progettazione di ciascuno di questi componenti si articola, a sua volta, in *varie sottofasi*. Più specificatamente, la *progettazione dei dati* si suddivide in:

- *Progettazione Concettuale,*
- *Progettazione Logica,*
- *Progettazione Fisica*.

La *progettazione delle applicazioni,* invece, si suddivide in:

- *Individuazione delle Interfacce e dei Flussi Informativi,*
- *Individuazione dei Gestori Principali,*
- *Raffinamento dei Gestori Principali.*

Le due componenti, tuttavia, non sono completamente separate ma interagiscono continuamente.

Progettazione Concettuale

Il suo scopo è quello di rappresentare le specifiche informali della realtà di interesse in termini di una *descrizione formale e completa*, ma indipendente dai criteri di rappresentazione utilizzati nei sistemi di gestione delle basi di dati.

Il prodotto di questa fase viene denominato *schema concettuale* e fa riferimento a un *modello concettuale* dei dati. I modelli concettuali ci consentono di descrivere l'organizzazione dei dati ad un elevato livello di astrazione, senza tenere conto degli aspetti implementativi.

Durante questa fase, infatti, il progettista deve cercare di rappresentare il contenuto informativo della base di dati, senza preoccuparsi né delle modalità con le quali le informazioni verranno rappresentate in un sistema reale né dell'efficienza dei programmi che devono elaborare queste informazioni.

Nella progettazione concettuale si fa uso delle specifiche sui dati mentre le specifiche sulle operazioni servono solo a verificare che lo schema concettuale sia completo, ovvero che contenga le informazioni necessarie per eseguire tutte le operazioni previste.

Uno strumento per la progettazione concettuale: il modello E/R

Il modello Entità/Relazione (E/R) è un modello concettuale di dati e fornisce una serie di strutture, detti costrutti, atte a descrivere la realtà di interesse in modo facilmente comprensibile e prescindendo dai criteri di organizzazione dei dati negli elaboratori.

I costrutti messi a disposizione del modello E/R vengono utilizzati per definire schemi che rappresentano una specifica realtà secondo un determinato modello.

Per ciascun costrutto del modello E/R esiste una rappresentazione grafica; essa consente di definire uno schema E/R mediante un opportuno diagramma che ne facilita la sua comprensione.

Progettazione Logica

Consiste nella traduzione dello schema concettuale, definito durante la fase precedente, in termini delle strutture di rappresentazione proprie del tipo di DBMS a disposizione.

Il prodotto di questa fase viene denominato schema logico della base di dati e fa riferimento a un modello logico dei dati. Come noto, un modello logico ci consente di descrivere i dati secondo una rappresentazione ancora indipendente dai dettagli fisici, ma che può essere realizzata direttamente con un DBMS che adotta il modello logico prescelto.

Durante questa fase le scelte progettuali tengono conto anche dei criteri di ottimizzazione delle rappresentazioni, in base alle operazioni da effettuare sui dati. Si fa comunemente uso anche di tecniche formali di verifica delle qualità dello schema logico ottenuto. Nel caso del modello relazionale dei dati, la tecnica comunemente utilizzata è quella della *normalizzazione*.

In tale fase si fa riferimento allo schema concettuale *per quanto riguarda i dati* (cioè non si fa uso diretto delle specifiche sui dati), mentre le specifiche sulle operazioni si utilizzano, insieme alle previsioni sul carico applicativo, per ottenere uno schema logico che renda tali operazioni eseguibili in maniera efficiente. Durante questa fase è necessario anche *conoscere il modello logico adottato* ma non è ancora necessario conoscere il particolare DBMS scelto (solo la categoria a cui appartiene).

Inoltre, mentre la progettazione concettuale ha come obiettivo la rappresentazione accurata e naturale dei dati di interesse dal punto di vista del significato che hanno nell'applicazione, la progettazione logica costituisce la base per l'effettiva realizzazione e deve tener conto, per quanto possibile, delle sue prestazioni: questa necessità può portare ad una ristrutturazione dello schema concettuale che renda più efficiente l'esecuzione delle operazioni previste.

Pertanto, la progettazione logica si suddivide in due fasi:

- Ristrutturazione dello schema E/R: questa fase ha lo scopo di ristrutturare lo schema E/R per eliminare quei costrutti incompatibili con il modello logico prescelto e per soddisfare quanto più possibile le esigenze di ottimizzazione;
- Traduzione verso il modello logico: questa fase ha lo scopo di tradurre lo schema E/R ristrutturato nel modello logico prescelto.

Introduzione al modello relazionale

Il modello relazionale fu proposto da Codd nel 1970 al fine di superare le limitazioni dei modelli all'epoca utilizzati a livello logico che non permettevano di realizzare efficacemente le proprietà di indipendenza dei dati.

L'affermazione del modello relazionale è stata abbastanza lenta a causa del suo elevato livello di astrazione; esso, infatti, si basava su strutture completamente diverse da quelle realizzate all'epoca.

Nonostante i primi prototipi di sistemi relazionali siano stati realizzati già nei primi anni Settanta, i primi sistemi relazionali sono apparsi nel mercato nel 1981, acquisendo una frazione significativa dello stesso solo a metà degli anni Ottanta.

Il modello relazionale si basa sui concetti di *relazione* e *tabella*, di natura diversa ma riconducibile l'uno all'altro. La nozione di relazione proviene dalla teoria degli insiemi mentre il concetto di tabella è semplice e intuitivo. La presenza di questi due concetti, l'uno formale e l'altro intuitivo, è responsabile del grande successo ottenuto dal modello relazionale. Infatti le tabelle risultano naturali e comprensibili anche per gli utenti finali, mentre la disponibilità di una formalizzazione al tempo stesso semplice e chiara ha permesso anche uno sviluppo teorico a supporto del modello con risultati di interesse concreto.

Il modello relazionale risponde al requisito dell'indipendenza dei dati che prevede una distinzione, nella descrizione dei dati, fra livello fisico e livello logico; gli utenti che accedono ai dati e i programmatori che sviluppano le applicazioni fanno riferimento solo al livello logico; i dati descritti al livello logico sono poi realizzati per mezzo di opportune strutture fisiche; tuttavia, per accedere ai dati non è necessario conoscere le strutture fisiche stesse.

I modelli precedentemente proposti, ovvero quello reticolare e quello gerarchico, includevano, invece, espliciti riferimenti alla sottostante struttura realizzativa, attraverso l'uso dei puntatori e l'ordinamento fisico dei dati.

Progettazione Fisica

In questa fase lo schema logico viene completato con la specifica dei parametri fisici di memorizzazione dei dati. Il prodotto di questa fase viene denominato schema fisico e fa riferimento a un modello fisico dei dati, che dipende dal DBMS prescelto e che tiene conto dei criteri di organizzazione fisica dei dati in quel sistema.

Nella progettazione fisica si fa uso dello schema logico e delle specifiche sulle operazioni per ottimizzare le prestazioni del sistema. In questa fase è necessario anche tener conto delle caratteristiche del particolare DBMS utilizzato.

La progettazione fisica di una base di dati riceve in ingresso lo schema relazionale della realtà di interesse, insieme alla documentazione di supporto, e si occupa di adattare tale schema al DBMS e alla piattaforma software che si ha a disposizione.

Come sappiamo, le varie tabelle dello schema logico, a livello fisico verranno memorizzati in file. Tuttavia, esistono svariati modi e svariate strutture secondo cui le informazioni contenute in questi file possono essere organizzate. A complicare ulteriormente le cose vi è il fatto che alcune strutture dati risultano efficienti per inserire, rimuovere e modificare dati ma diventano inefficienti durante la consultazione degli stessi; altre strutture dati, al contrario, risultano efficienti per la consultazione dei dati ma sono inefficienti per l'inserimento, la rimozione e la modifica degli stessi. Per tale motivo si deve anche preventivare la possibilità di utilizzare sugli stessi dati più strutture contemporaneamente.

Le tipologie di organizzazione dei dati disponibili variano al variare dei DBMS. E' estremamente importante che il progettista sappia quali sono le strutture di memorizzazione disponibili nel DBMS prescelto e come quest'ultimo gestisce ed utilizza tali strutture. Ciò può richiedere che egli debba conoscere come funziona l'ottimizzatore di query del DBMS prescelto. Infatti, se il progettista definisce delle strutture complesse sui dati ma l'ottimizzatore non le utilizza allora non solo non viene migliorata la performance del sistema ma, addirittura, viene peggiorata in quanto a tutte le attività di prima si devono aggiungere quelle legate alla gestione delle nuove strutture complesse sui dati che sono state create.

La progettazione fisica deve essere guidata dalla natura dei dati e dall'uso che è stato pensato per essi. In particolare, il progettista deve capire qual è il tipico carico di lavoro che il database dovrà sopportare. Durante l'analisi dei requisiti, infatti, vi possono essere richieste riguardanti la velocità di specifiche transazioni oppure il numero di transazioni che devono essere processate in ogni secondo.

Da quanto detto finora emerge chiaramente che durante la progettazione fisica il progettista deve conoscere in modo dettagliato le caratteristiche del DBMS a disposizione nonché quelle della piattaforma hardware e software su cui quest'ultimo opera.

La progettazione fisica non è un'attività isolata in quanto influenza, ed è a sua volta influenzata, dalla progettazione concettuale, dalla progettazione logica e dalla progettazione delle applicazioni.

La progettazione fisica può essere suddivisa in vari passi. Quelli più specifici ed importanti sono:

- l'adattamento dello schema logico al DBMS prescelto;
- l'analisi delle transazioni;
- la scelta dell'organizzazione dei file;
- la scelta degli indici;
- la stima delle richieste di spazio su disco.

Linguaggi per basi di dati

Ad un DBMS possono essere associate *due diverse tipologie di linguaggi*: una tipologia viene utilizzata per definire lo schema della base di dati mentre l'altra viene utilizzata per gestire l'aggiornamento dei dati e la loro interrogazione.

Data Definition Language

Uno schema di basi di dati viene specificato mediante un insieme di definizioni espresso mediante uno speciale linguaggio denominato *Data Definition Language (DDL).*

Il risultato della compilazione delle istruzioni DDL è un insieme di tabelle che viene memorizzato in un file speciale denominato *dizionario dei dati* o *directory dei dati*. Un dizionario dei dati è un file che contiene *metadati*, ovvero dati sui dati. Tale file deve essere consultato dalle applicazioni prima che esse leggano o modifichino i dati effettivi del database.

Data Manipulation Language

Un Data Manipulation Language (DML) è un linguaggio che permette agli utenti di accedere e manipolare i dati. Per manipolazione dei dati *intendiamo*:

- l’estrazione delle informazioni memorizzate nel database;
- l’inserimento di nuove informazioni nel database;
- la cancellazione di informazioni dal database;
- la modifica di informazioni precedentemente memorizzate nel database.

Esistono fondamentalmente due tipologie di DML:

- *I DML procedurali* che richiedono ad un utente di specificare non solo quali sono i dati desiderati ma anche le modalità tramite cui recuperarli.
- *I DML non procedurali* che richiedono ad un utente di specificare quali sono i dati desiderati senza dover indicare le modalità tramite cui recuperarli.

I DML non procedurali *sono generalmente più facili* da imparare e da utilizzare rispetto a quelli procedurali. Tuttavia, dal momento che un utente non deve specificare come recuperare i dati, essi possono generare codice che non è così efficiente come quello prodotto dai linguaggi procedurali.

Una query è un’istruzione che richiede l’estrazione di informazioni.

La porzione di un DML che si occupa dell’estrazione delle informazioni viene denominata *Query Language*.

Sebbene non sia tecnicamente corretto, è pratica comune utilizzare i termini *Query Language e Data Manipulation Language* come sinonimi.

SQL

I DBMS relazionali più comuni utilizzano, sia per la definizione che per la manipolazione dei dati, un linguaggio denominato *SQL*. SQL sta per “*Structured Query Language*”. Esso include sia istruzioni per dichiarare la struttura di un database che istruzioni per manipolare il suo contenuto.

Pertanto, SQL si comporta sia come *Data Definition Language* che come *Data Manipulation Language*. In aggiunta a ciò tale linguaggio è dotato di una vastissima gamma di altri comandi.

I comandi DML esprimono azioni da effettuare sui dati identificate dalla parola iniziale dell’istruzione, che quasi sempre è un verbo. Nel caso di SQL, i verbi utilizzati sono SELECT per la ricerca, INSERT per l’inserimento, UPDATE per l’aggiornamento e DELETE per la cancellazione.

Le istruzioni DML dell’SQL sono state standardizzate dall’ANSI, ma molti produttori di DBMS forniscono estensioni proprietarie che garantiscono funzionalità aggiuntive.

Vi sono *molti diversi dialetti di SQL*. Innanzitutto vi sono tre standard principali. C’è un *SQL ANSI* (American National Standard Institute) e uno standard aggiornato adottato nel 1992, denominato *SQL-92* o *SQL2*. Il recente *SQL-99* (precedentemente denominato *SQL*}) estende *SQL2* con caratteristiche tipiche dei sistemi relazionali ad oggetti ed una serie di altre nuove capacità.

Accanto alle tre versioni standard, vi sono le versioni di SQL prodotte dai principali venditori di DBMS. Tutte queste includono le capacità tipiche dello standard ANSI originale; inoltre, sono largamente conformi a gran parte di SQL2, sebbene ciascuno ha le sue variazioni e le sue estensioni rispetto a questo linguaggio; infine, alcune di esse includono alcune delle caratteristiche dello standard SQL-99.

Il Query Language di SQL

SQL esprime le interrogazioni in modo dichiarativo, ovvero richiede al programmatore di specificare l’obiettivo dell’interrogazione e non il modo in cui ottenerlo.

In ciò esso si contrappone ai linguaggi di interrogazione procedurali in cui l'interrogazione specifica i passi da compiere per estrarre le informazioni dalla base di dati.

L'interrogazione SQL per essere eseguita viene passata all'ottimizzatore di interrogazioni, un componente del DBMS che analizza l'interrogazione e formula, a partire da essa, un'interrogazione equivalente nel linguaggio procedurale interno del sistema di gestione di basi di dati. Questo linguaggio procedurale è nascosto all'utente.

Per questo, chiunque scrive interrogazioni in SQL può trascurare gli aspetti di traduzione e ottimizzazione. Il grande sforzo dedicato allo sviluppo di tecniche di ottimizzazione ha permesso di costruire strumenti che sono in grado di produrre traduzioni molto efficienti per la maggior parte dei DBMS relazionali.

Esistono, in generale, molti modi diversi per esprimere la stessa interrogazione in SQL: il programmatore dovrà effettuare una scelta basandosi non solo sull'efficienza, ma anche su caratteristiche come la leggibilità e la modificabilità dell'interrogazione.

SQL agevola il lavoro del programmatore permettendogli di descrivere le interrogazioni in un modo astratto e di alto livello.

Le interrogazioni in SQL vengono specificate per mezzo dell'istruzione *SELECT*. La sua *struttura di base* è la seguente:

SELECT ListaAttributi
FROM ListaTabelle
WHERE Condizione

Le tre parti} di cui si compone un'istruzione SELECT vengono spesso denominate clausola SELECT (detta anche target list), clausola FROM e clausola WHERE.

ListaAttributi rappresenta l'elenco degli attributi che l'utente desidera conoscere; al posto di tale lista possono comparire generiche espressioni sul valore degli attributi.

ListaTabelle rappresenta la lista di tutte le tabelle coinvolte nell'interrogazione, tanto nella clausola SELECT quanto in quella WHERE.

Condizione rappresenta la condizione che una tupla deve soddisfare per essere inserita nel risultato finale.

Il risultato dell'esecuzione di un'interrogazione SQL è una tabella con una riga per ogni riga prodotta dalla clausola *FROM* e filtrata dalla clausola WHERE, le cui colonne si ottengono dalla valutazione delle espressioni che appaiono nella clausola SELECT.

<u>FISICA</u>

A cura di
prof. Giacomo Messina

Si dichiara che il presente elaborato è originale e che è stato predisposto in funzione dell'attività formativa relativa ai Percorsi di potenziamento delle competenze di base anno 2009.

1. Introduzione

La Fisica è una scienza sperimentale che studia i fenomeni che avvengono nel mondo esterno per giungere ad una accurata descrizione e interpretazione di essi e dei loro legami. L'obiettivo principale è quello di sviluppare delle teorie o dei modelli (basati su leggi fondamentali) che siano in grado di predire i risultati degli esperimenti. E' sufficiente un numero limitato di leggi fondamentali per spiegare un grandissimo numero di fenomeni fisici anche apparentemente scorrelati. Ad esempio le quattro equazioni di Maxwell descrivono tutti i fenomeni elettromagnetici, dall'elettrostatica alla magnetostatica alla propagazione di onde elettromagnetiche. Esse racchiudono in sostanza tutto l'elettromagnetismo.

Le leggi della fisica nascono come generalizzazioni tratte da osservazioni e risultati sperimentali. Basti pensare alla legge di Newton della gravitazione universale, che è stata sviluppata mettendo insieme, grazie alla intuizione e alla genialità di Newton, una serie di osservazioni quali la forma delle traiettorie dei pianeti nel loro moto intorno al sole, l'accelerazione dei corpi in prossimità della superficie terrestre, l'accelerazione della luna nella sua orbita. Newton comprese che si trattava di aspetti differenti dello stesso problema.

Le leggi fisiche sono espresse di solito sotto forma di equazioni matematiche. Alcune leggi sono invece espresse sotto forma di disuguaglianza, come il secondo principio della Termodinamica.[1]

Ogni volta che sorgono discrepanze fra teoria ed esperimento occorre formulare nuove teorie o introdurre nuovi concetti. Un esempio classico di questo modo di procedere in fisica è quello della Meccanica Relativistica. La teoria di Newton, basata sulle trasformazioni di Galileo, predice che se un corpo ha velocità v' rispetto ad un sistema di riferimento O'x'y'z' e u è la velocità di questo sistema rispetto ad un altro Oxyz allora la velocità del corpo misurata da un osservatore posto nel sistema Oxyz è semplicemente v= v'+u (legge di addizione delle velocità di Galileo).Tuttavia, se si tratta di luce, l'osservatore in Oxyz misura lo stesso valore c che misurerebbe un osservatore in O'x'y'z'. Questo risultato sperimentale venne preso da Einstein come postulato della teoria della relatività ristretta: "La velocità della luce è la stessa per tutti gli osservatori inerziali, qualunque sia il moto della sorgente". Questo postulato, insieme al principio di omogeneità e di isotropia dello spazio (tutti i punti e tutte le direzioni dello spazio sono equivalenti) permise di trovare le corrette relazioni di trasformazione tra due sistemi inerziali in moto relativo con velocità costante, le cosiddette "trasformazioni di Lorentz". Tali relazioni si riducono a quelle di Galileo per velocità "piccole" rispetto a quella della luce.

2. Grandezze fisiche

Gli elementi fondamentali della fisica sono le "grandezze fisiche" in termini delle quali vengono espresse le sue leggi. Tra le grandezze fisiche annoveriamo lunghezza, intervalli di tempo, forza, velocità, temperatura, intensità di campo magnetico, intensità luminosa ecc.. Molti di questi termini, come lunghezza e forza, fanno parte del linguaggio quotidiano. In fisica però i termini associati alle grandezze fisiche vanno definiti in modo chiaro e preciso, evitando di confonderli con il loro significato nel linguaggio quotidiano. Per esempio in meccanica si parla di lavoro fatto da una forza che non ha nulla a che fare con il concetto quotidiano di lavoro, sinonimo di sforzo. Per il fisico, se un uomo tiene sulle spalle un grosso peso restando fermo non compie alcun lavoro, però sicuramente farà uno sforzo notevole.

Pertanto, prima di ricavare le relazioni esistenti tra grandezze fisiche, occorre definire tali grandezze in maniera univoca. Per questo motivo in fisica occorre dare una "definizione operativa" di una grandezza, una definizione che indichi l'insieme delle operazioni o dei

[1] Tale principio può essere così enunciato: "L'Entropia di un sistema isolato non può mai diminuire; essa aumenta se la trasformazione è irreversibile, rimane costante se la trasformazione è reversibile". La sua formulazione matematica è: $\Delta S \geq 0$ in un sistema isolato.

.

procedimenti necessari alla sua misura. Una definizione non può essere considerata operativa se non indica un procedimento sperimentale tale da poter essere effettivamente eseguito. La "lunghezza" potrebbe essere definita in termini teorici come "estensione spaziale". Ma questa non sarebbe certo una definizione operativa. Viceversa la definizione operativa deve specificare un procedimento di conteggio. In termini operativi, per lunghezza di una determinata distanza lineare *l*, si intende il numero di volte, comprese le frazioni, che una determinata unità di lunghezza *u* è compresa nella distanza *l* che si vuole misurare.

Una definizione operativa può includere concetti fisici o matematici, purchè accuratamente specificati. Oltre al procedimento operativo del contare, la definizione di lunghezza implica, ad esempio, il concetto di corpo rigido, con il quale si intende un oggetto nel quale le reciproche distanze tra i suoi punti rimangono invariate in qualsiasi condizione. Chiaramente un corpo perfettamente rigido non esiste, è solo un'astrazione teorica, ma a tutti gli effetti pratici i solidi possono essere pensati come corpi rigidi.

3. Grandezze fondamentali e grandezze derivate

Molte grandezze fisiche non sono indipendenti tra loro, ma sono legate da relazioni che sono caratteristiche dei processi fisici nei quali sono coinvolte. Per esempio la velocità è il rapporto fra lo spazio percorso e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo; la pressione è il rapporto fra la forza applicata perpendicolarmente a una superficie S e l'area della superficie stessa.

Tra tutte le grandezze fisiche ne viene scelto un piccolo numero che costituisce l'insieme delle "grandezze fondamentali". Per tali grandezze si fissa un'unità di misura, mediante un campione opportunamente definito. Le corrispondenti unità si chiamano "unità fondamentali". Le altre grandezze, le cui unità sono dedotte per mezzo delle relazioni che intercorrono con le grandezze fondamentali, si chiamano "grandezze derivate" e così le corrispondenti unità saranno chiamate "unità derivate". Tali unità possono restare così come sono, oppure si può dare loro un nome particolare. Per esempio la velocità e l'accelerazione sono grandezze derivate e le loro unità (nel Sistema Internazionale, definito più avanti) sono m/s e m/s^2. La forza è anch'essa una grandezza derivata e la sua unità è il Newton (N) dove $1\ N = 1\ kg*m/s^2$. L'insieme delle grandezze fondamentali e delle corrispondenti unità di misura costituisce un Sistema di Unità di Misura.

E' importante sfruttare le relazioni che intercorrono fra le grandezze fisiche in modo tale da ridurre al massimo il numero di unità da definire mediante un campione e in modo tale da semplificare certi fattori di proporzionalità che altrimenti rendono più complesse le formule che descrivono i processi fisici. [2]

[2] L'esempio più semplice è quello della forza di interazione fra cariche elettriche. Sperimentalmente si trova che la forza di interazione fra due cariche elettriche è proporzionale al prodotto delle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra le cariche: $F \propto q_1q_2/r^2$ (legge di Coulomb). La grandezza fisica "carica elettrica" è legata alle grandezze fisiche "forza" e "lunghezza" dalla relazione di Coulomb. La cosa più semplice sarebbe quella di definire l'unità di carica come quella carica che posta a distanza unitaria da un'altra uguale dà luogo a una forza unitaria. Questo è proprio quello che si fa nel sistema C.G.S. (Centimetro, Grammo, Secondo o di Gauss). Si definisce la cosiddetta unità elettrostatica (detta u.e.s.) dalla relazione

$$1\ \text{dine} = (\text{u.e.s.})^2/\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \text{u.e.s.} = (1\ \text{dina}*\text{cm}^2)^{1/2}.$$

In questo sistema l'unità di intensità di corrente elettrica si misura in u.e.s./secondo. Nel Sistema Internazionale (S.I.) invece si fissa come grandezza fondamentale l'intensità di corrente, la cui unità è l'Ampere. L'unità di carica è invece il Coulomb (1C= 1A*1sec). La forza, come già detto, si misura in Newton e quindi nella relazione di Coulomb $F = K\ q_1q_2/r^2$ è tutto fissato; si deduce pertanto che la costante di proporzionalità K non può essere adimensionata, ma deve avere le dimensioni di $N*m^2/C^2$ e il suo valore numerico, misurato sperimentalmente, è $K = 8.9875*10^9$.

4. Il Sistema Internazionale (S.I.)

Per mettere ordine sulle delicate questioni riguardanti le grandezze fondamentali e la scelta dei campioni, nel 1875 diciassette paesi firmarono un trattato internazionale che istituiva l'Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure con sede a Sèvres, vicino Parigi. In questo ufficio, finanziato da più di 40 governi, sono depositati diversi campioni (il chilogrammo campione, il metro campione) e i prototipi internazionali dei diversi standard di misura (primari e secondari). Esso ha il compito di coordinare a livello internazionale la definizione delle tecniche di misura ed è in contatto con i laboratori di campionatura di tutto il mondo. Un ente internazionale, la Conferenza Generale di Pesi e Misure (CGPM) si riunisce periodicamente per proporre aggiornamenti e raccomandazioni. Il suo primo congresso si è tenuto nel 1889 mentre il 17^{mo} si è tenuto a Parigi nel 1983, in occasione del quale è stata data una nuova definizione del "metro", l'unità di misura della grandezza fondamentale "lunghezza" (nel S.I.).

Come già detto, ad ogni grandezza fondamentale viene assegnato un campione che, per essere accettato, deve essere:

1) "accessibile" e facilmente "riproducibile" in modo che per confronto possano essere costruiti altri;
2) "invariabile" cioè le sue caratteristiche non devono variare nel tempo. E'necessario quindi proteggerlo, a scapito però dell'accessibilità, che viene compromessa.

Tali requisiti (accessibilità e invariabilità) sono in contrasto fra loro ed è quindi necessario trovare un compromesso tra le varie esigenze.

Esistono numerosi sistemi di unità di misura. Oggi il più diffuso è il Sistema Internazionale (S.I.) fissato nella XI CGPM, tenutasi a Parigi nel 1960. Negli anni sono tuttavia state apportate alcune modifiche nelle definizioni delle unità (nel 1971, 1975, nel 1976 e nel 1983). IL S.I. è stato adottato ufficialmente dall'Italia con decreto legge del 14/4/1978 n.122, con entrata in vigore in tutti i campi entro il 31/12/1978.

Il S.I. è raccomandato per ogni uso scientifico e tecnologico. Questo sistema comprende (vedi tabella 1) 7 unità fondamentali e 2 supplementari (che sono in realtà grandezze derivate dalla lunghezza).

Tabella 1

Grandezze Fondamentali	**Unità**	**Simbolo**	**Definizione**
Lunghezza	Metro	m	Spazio percorso nel vuoto dalla luce in un tempo 1/c (c velocità della luce nel vuoto)
Massa	Chilogrammo	kg	Massa del prototipo di Platino-Iridio conservato a Sèvres
Tempo	Secondo	s	Tempo pari a 9.192.631.770 periodi di una particolare transizione dell'atomo di Cesio
Temperatura	Grado Kelvin	°K	1 °K= 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua
Intensità di Corrente	Ampere	A	Corrente elettrica costante che percorrendo due fili conduttori paralleli indefiniti distanti 1 metro fra loro e posti nel vuoto causa tra essi una forza di $2*10^{-7}$ N*m
Intensità Luminosa	Candela	cd	Intensità luminosa emessa da un corpo nero, a 2045 °K e sotto una pressione di 101325Pascal, in direzione perpendicolare al foro di uscita di sezione $1/6*10^{-5}m^2$
Quantità di Materia	Mole	mol	Quantità di materia che contiene tante unità elementari quanti sono gli atomi in 12 grammi di ^{12}C (numero di Avogadro pari a $6.02213674*10^{23}$)
Grandezze Supplementari	**Unità adimensionali**	**Simbolo**	**Definizione**
Angolo Piano	Radiante	rad	Data una circonferenza, il radiante è la misura dell'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza pari al raggio
Angolo Solido	Steradiante	sr	Data una superficie sferica, lo steradiante è la misura dell'angolo solido, con vertice nel centro della superficie sferica, che sottende una calotta sferica di raggio R^2

La conferenza del 1971 ha definito anche un particolare sistema di prefissi (vedi tabella 2) per i multipli e i sottomultipli delle unità delle grandezze fondamentali secondo potenze di 10. I prefissi che si riferiscono a potenze positive sono presi dal greco, quelli che si riferiscono a potenze negative dal latino, tranne “femto-“ e “atto-“ che derivano invece dal danese.

Tabella 2

Prefisso	Abbr.	Fattore	Prefisso	Abbr.	Fattore
Deca-	da	10^{1}	Deci-	d	10-^{1}
Etto-	h	10^{2}	Centi-	c	10^{-2}
Kilo-	k	10^{3}	Milli-	m	10^{-3}
Mega-	M	10^{6}	Micro-	μ	10^{-6}
Giga	G	10^{9}	Nano	n	10^{-9}
Tera	T	10^{12}	Pico-	p	10^{-12}
Peta	P	10^{15}	Femto-	f	10^{-15}
Exa	E	10^{18}	Atto-	a	10^{-18}

Altri due importanti sistemi di misura sono in competizione con il S.I.; il sistema C.G.S. o di Gauss, in termini del quale è espressa la maggior parte della letteratura in fisica e il sistema britannico, tuttora in uso negli Stati Uniti e in Inghilterra, le cui grandezze fondamentali sono: la lunghezza (il piede), la forza (libbra) e il tempo (secondo).

Le grandezze fondamentali della Meccanica sono lunghezza, massa, tempo.

1) Lunghezza.
   L’unità di misura della lunghezza è il metro. Originariamente il metro fu definito dall’Accademia delle Scienze francese come la 40.000.000^{ma} parte della lunghezza del meridiano terrestre passante per Parigi. Venne realizzato, ai tempi della rivoluzione francese, un campione di platino-iridio, lega particolarmente stabile, con sezione ad x (inflessione trascurabile). Tuttavia ci si accorse più tardi che la relazione fra il meridiano terrestre e il metro campione differiva leggermente da quella assunta come vera (oggi si sa che la lunghezza del meridiano è 40.007.476 metri). Si poteva pertanto cambiare il campione oppure la definizione. Si scelse di cambiare la definizione di metro-campione, che non era più la 40.000.000^{ma} parte della lunghezza del meridiano terrestre, ma semplicemente la lunghezza di quella sbarra di platino-iridio. Successivamente alla XI CGPM fu adottato un nuovo campione di lunghezza prendendo come riferimento la lunghezza d’onda, nel vuoto, della radiazione rossa-arancione, corrispondente alla transizione tra i livelli $^{2}p_{10}$ e $^{5}d_{5}$ dell’atomo Kripton 86 (Kr^{86}).Gli atomi di Kr^{86} sono universalmente disponibili, sono identici ed emettono luce della stessa lunghezza d’onda. Questo isotopo può essere ottenuto con grande purezza in modo relativamente facile nei laboratori di campionatura di tutto il mondo. Un metro fu esattamente definito come 1.650.763,73 volte la lunghezza d’onda di tale radiazione rosso-arancione. Infine nel 1983 è stata data una nuova definizione di metro, basata sul principio di relatività ristretta secondo il quale la velocità della luce nel vuoto è una costante universale immutabile. Secondo questa nuova definizione (tabella 1) il metro è lo spazio percorso nel vuoto dalla luce in un tempo 1/c (c=velocità della luce nel vuoto=299.792.458 m/s).

2) Massa.
   L’unità di misura della massa è il chilogrammo. E’ ancora valida la definizione data nel 1901: vale un chilogrammo la massa del prototipo di platino-iridio conservato a Sevres (cilindretto di diametro3.9 cm e altezza 3.9 cm, conservato sottovuoto). Le

masse di altri corpi si possono determinare per confronto con il chilogrammo campione, per esempio con la bilancia a bracci uguali.

3) Tempo.
   L'unità di misura degli intervalli di tempo è il "secondo" Prima del 1960, il secondo era definito in termini del "giorno solare medio". Un secondo solare medio era alla 86400^{ma} parte del giorno solare medio (1s= giorno solare medio/ (60*60*24)).[3] A causa di una lieve variazione della durata dell'anno tropico, questa definizione non è adatta agli usi scientifici, perché si avrebbe un campione di tempo non invariabile. Una definizione molto più precisa si può dare facendo riferimento alle transizioni atomiche, utilizzando il fatto che il passaggio di un elettrone atomico da un livello energetico ad un altro di energia inferiore (transizione atomica) è accompagnato dall'emissione di radiazione elettromagnetica di frequenza proporzionale alla differenza di energia fra i livelli interessati. Lo stato fondamentale (di energia minima) degli atomi dell'isotopo 133 del Cesio (Cs^{133}) è, in realtà, diviso in due livelli molto vicini fra loro a causa della interazione magnetica fra gli elettroni e il nucleo (struttura iperfine). La radiazione emessa durante la transizione fra questi due livelli ha una frequenza che cade nella regione delle microonde (circa 9.193 GHz). Il secondo campione è stato allora opportunamente ridefinito. Un secondo è l'intervallo di tempo pari a 9.192.631.770 periodi della radiazione elettromagnetica emessa dagli atomi di Cs^{133} quando transitano fra i livelli iperfini dello stato fondamentale (uguale al secondo solare medio quale era nel 1900).

La tendenza è di riferirsi a fenomeni atomici per la costruzione di campioni migliori in quanto, oltre ad essere molto precisi, permettono di conciliare i requisiti di riproducibilità e invariabilità.

[3] Il giorno solare medio si ottiene, come è noto dalla geografia astronomica, dividendo l'intervallo di tempo compreso fra due equinozi di primavera (chiamato "anno tropico"), in 365,242201 intervalli di tempo uguali.

Analisi Dimensionale

Per la meccanica le grandezze fisiche fondamentali nel S.I. sono, come già detto, la lunghezza, la massa e l'intervallo di tempo, indicate rispettivamente con L, M, T. Si è visto prima che le unità di misura delle grandezze derivate sono ricavate attraverso quelle delle grandezze fondamentali sulla base della relazione fisica che intercorre fra la grandezza derivata e le grandezze fondamentali. Per esempio, la velocità media in un intervallo di tempo Δt in un moto unidimensionale è il rapporto fra lo spazio Δx percorso e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo, cioè

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Cosa bisogna fare per determinare "le dimensioni" di questa grandezza derivata? Bisogna guardare alla relazione fisica che lega la grandezza derivata alle grandezze fondamentali, in questo caso lunghezza e tempo. La velocità è il rapporto fra una lunghezza e un intervallo di tempo, quindi le sue dimensioni saranno quelle di una lunghezza diviso per un tempo, cioè

$$[\bar{v}] = \left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right] = \frac{L}{T} = L * T^{-1}$$

La parentesi quadra indica che si stanno calcolando le dimensioni di quella grandezza.

Si badi che questo risultato è indipendente dalle unità di misura scelte per le grandezze fondamentali (m/s nel S.I., cm/s nel sistema di Gauss o piedi/s in quello britannico).

ESEMPI

1) Accelerazione.

$$[\bar{a}] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right] = \frac{L * T^{-1}}{T} = L * T^{-2}$$

2) Forza.

$$[F] = [m * a] = M * L * T^{-2}$$

3) Energia Cinetica.

$$[E_c] = \left[\frac{1}{2} m v^2\right] = M\left(L * T^{-1}\right)^2 = M * L^2 * T^{-2}$$

4) Lavoro

$$[W] = [F.\Delta x] = MLT^{-2} * L = M * L^2 * T^{-2}$$

Il lavoro ha le stesse dimensioni dell'energia cinetica.

Queste relazioni prendono il nome di "Equazioni Dimensionali".

Ad ogni grandezza fisica è possibile pertanto associare le "dimensioni" che esprimono il legame fra questa grandezza e quelle fondamentali. L'utilità delle equazioni dimensionali risiede nel fatto che esse consentono di fare un'analisi dimensionale delle relazioni fisiche. Data una relazione fisica, se si sostituisce ad ogni grandezza fisica che compare nella relazione le sue dimensioni e si trattano i simboli delle grandezze fondamentali come quantità algebriche, ciascun membro della relazione deve avere le medesime dimensioni affinchè la relazione sia corretta. Per esempio, nello studio del moto rettilineo uniformemente accelerato ricaveremo che lo spazio percorso è legato all'accelerazione e al tempo dalla relazione $x=½at^2$.

Da un punto di vista dimensionale:

$$[x]=\left[\frac{1}{2}at^2\right]=\frac{L}{T^2}*T^2=L$$

Questa è un'equazione dimensionalmente corretta, dato che le dimensioni del primo membro sono uguali a quelle del secondo. Naturalmente il fatto che i due membri siano dimensionalmente omogenei è condizione necessaria ma non sufficiente per la correttezza dell'equazione. Per esempio se avessimo ricavato che il legame fra spazio percorso, accelerazione e tempo in un moto uniformemente accelerato è dato dalla relazione $x=3at^2$, per l'analisi dimensionale il risultato sarebbe "dimensionalmente consistente", mentre esso è sbagliato per un fattore moltiplicativo (3 invece di ½).

Se le dimensioni del 1° membro di un'equazione che abbiamo ricavato non sono le stesse di quelle del secondo membro, allora l'equazione è sicuramente sbagliata. Un esempio di equazione non corretta può essere il seguente:

$$a=h/mt$$

$$\left[\frac{h}{m*t}\right]=L*M^{-1}*T^{-1}$$

Tali dimensioni risultano diverse da quelle di a ($L*T^{-2}$), quindi l'equazione è sicuramente non corretta. Si commetterebbe un grave errore se non ci si accorgesse di un'inconsistenza di questo tipo.

L'analisi dimensionale ha un'altra utile applicazione che consiste nel ricavare le dimensioni, e quindi le unità di misura, di certe costanti che compaiono nelle leggi fisiche. Per esempio:

1) $F= -\gamma v$ (forza di attrito viscoso);

$$M*L*T^{-2}=[\gamma]*L*T^{-1}$$

da cui si ricava che le dimensioni di γ sono $M\,T^{-1}$ e la corrispondente unità è $kg\,s^{-1}$.

2) $F= -k*x$ (forza di richiamo di una molla (legge di Hooke))

$$M*L*T^{-2}=[k]*L$$

da cui si ricava che le dimensioni di k sono $M*T^{-2}$ e la sua unità è $kg*s^{-2}$.

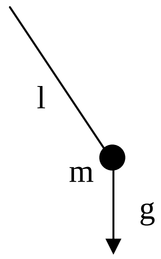
3) $F=G*m_1*m_2/r^2$ (legge di gravitazione universale di Newton)

$$M*L*T^{-2}=[G]*M^2*L^{-2}$$

da cui si ricava che le dimensioni di G sono $L^3*M^{-1}*T^{-2}$ e la sua unità è $m^3*kg^{-1}*s^{-2}$.

Infine mediante considerazioni dimensionali è possibile dedurre informazioni sulla <u>forma algebrica</u> di alcune leggi fisiche:

1) Periodo pendolo.
   Un pendolo semplice può essere considerato come un filo di lunghezza l, fissato ad un estremo,e che porta all'altro estremo una massa m, soggetta alla forza di gravità. Il suo periodo τ di oscillazione deve dipendere necessariamente dalle grandezze in gioco e cioè dalla lunghezza l del filo, dal valore della massa m attaccata e dall'accelerazione di gravità g.



   Si ipotizza pertanto una legge del tipo: $\tau= K*l^x*m^y*g^z$ dove K è una costante adimensionale e gli esponenti x, y e z, incogniti, sono da determinare con l'ausilio dell'analisi dimensionale. Confrontando le dimensioni dei due membri della precedente relazione si ha (τ è un tempo e g una accelerazione):

$$[\tau]= L^x\, M^y\, (LT^{-2})^z$$

da cui $$T= L^x\, M^y\, L^zT^{-2z}$$

e $$L^0\, M^0\, T^1 = L^{x+z}\; M^y\, T^{-2z}$$

e, infine, uguagliando gli esponenti (a primo membro L e M hanno esponente 0) si ha il sistema:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ -2z=1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x=1/2 \\ y=0 \\ z=-1/2 \end{cases}$$

sostituendo tali valori nell'espressione di τ si ha:

$$\tau = K*l^{\frac{1}{2}}*g^{-\frac{1}{2}} = K\sqrt{\frac{l}{g}}$$

che è l'espressione effettiva di τ, ricavabile per altra via dalla teoria del pendolo semplice.

Si noti che K non può essere ricavata con l'analisi dimensionale, ma solo per via teorica ($K=2\pi$) e questo vale per tutte le costanti.

2) Velocità di propagazione di un'onda trasversale su una corda.
   Si consideri una corda di lunghezza l e massa m, a cui è applicata una forza F (tensione della fune), su cui si propaga un'onda con velocità v. In maniera analoga al caso precedente possiamo ipotizzare che v dipenda dalla tensione della corda, dalla sua lunghezza l e dalla sua massa m secondo una legge del tipo

$$v = K\ F^x\ l^y\ m^z$$

   Utilizzando sempre l'analisi dimensionale, possiamo scrivere:

$$L\,T^{-1} = (M\,L\,T^{-2})^x\ \ L^y\ \ M^z$$

   da cui si ha $\quad L\,T^{-1} = T^{-2x}\ \ L^{x+y}\ \ M^{x+z}$

   e quindi il sistema:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ x+y=1 \\ -2x=-1 \end{cases} \qquad \text{cioè } x=½;\ y=½;\ z=-1/2$$

   questi coefficienti sostituiti nella relazione iniziale, permettono di ritrovare l'effettiva legge con cui varia v, cioè

$$v = k\sqrt{\frac{F\ l}{m}} = \sqrt{\frac{F}{\frac{m}{l}}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

   essendo $\mu = m/l$ la densità lineare. La teoria mostra infine che K=1.

3) Legge di Stokes..
   Un corpo sferico di massa m e raggio R che cade con velocità v in un fluido avente coefficiente di viscosità η è sottoposto ad una forza di attrito viscoso (forza di Stokes). Tale forza deve dipendere dalla viscosità del mezzo, dalle dimensioni geometriche del corpo, e dalla sua velocità. Ipotizziamo pertanto una legge del tipo: $F = -K\ \eta^x\ R^y\ \ v^z$.
   Dalla teoria dei fluidi reali, si può ricavare che le dimensioni del coefficiente di viscosità η sono $M\ L^{-1}\ \ T^{-1}$. Pertanto, procedendo come descritto nei due esempi precedenti, si trova che:

$$M\,L\,T^{-2} = (M\,L^{-1}\,T^{-1})^x\,L^y\ \ (LT^{-1})^z$$

   da cui si ha $\quad M\,L\,T^{-2} = M^x\ \ L^{-x+y+z}\ \ \ T^{-x-z}$

   Uguagliando gli esponenti del primo e del secondo membro si ha:

$$\begin{cases} x = 1 \\ -x+y+z = 1 \\ -x-z = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

   Da cui segue la legge:

$$F = k\ \eta R v$$

   La teoria mostra che $K=6\pi$. Pertanto la legge di Stokes, molto utilizzata nella meccanica dei fluidi, si può esprimere come:

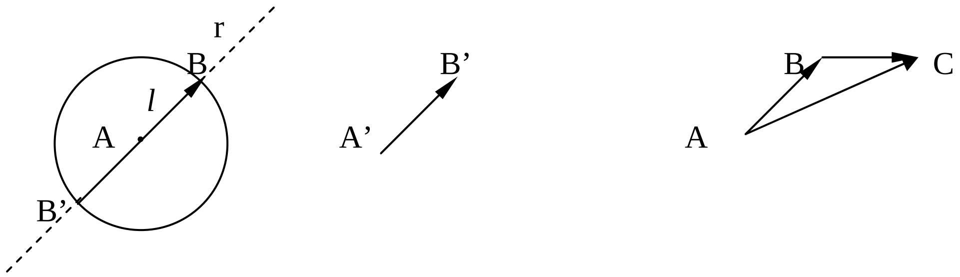
$$F = -6\pi\ \eta R v$$

   Il segno negativo esprime il fatto che tale forza di attrito è diretta in verso opposto al moto del corpo.

VETTORI

Introduzione

Le leggi della Fisica sono espresse da equazioni matematiche nelle quali compaiono *quantità* che descrivono le grandezze fisiche considerate. Alcune di queste grandezze possono essere rappresentante da un solo numero che dà il valore della grandezza rispetto ad una assegnata unità di misura. Questo numero è in generale una funzione delle coordinate spaziali e del tempo. Queste grandezze sono chiamate grandezze scalari o semplicemente scalari. Esempio: la temperatura dell'aria in un dato luogo T=T(x,y,z,t). Altri esempi sono la massa e il volume di un corpo, gli intervalli di tempo, la densità di un materiale, l'energia.
Ci sono però situazioni in cui un solo numero non è sufficiente a descrivere completamente una grandezza fisica. L'esempio più semplice è quello spostamento di una particella nello spazio. Per *spostamento* intendiamo il *cambiamento di posizione* della particella. Supponiamo che la particella sia nella posizione A. Se diciamo di volere compiere uno spostamento rettilineo di lunghezza *l*, abbiamo specificato di quanto ci siamo allontanati da A, ma non possiamo determinare dove arriviamo: tutti i punti che stanno su una superficie sferica di centro A e raggio *l* sono possibili punti di arrivo. Se precisiamo la direzione r dello spostamento possiamo ancora arrivare in due punti diametralmente opposti sulla superficie sferica (B e B'); solo se indichiamo il verso di percorrenza lungo r il risultato è univoco. Uno spostamento è quindi caratterizzato da un numero, il *modulo*, che ne dà il valore in assoluto, da una *direzione* e da un *verso*. Graficamente possiamo rappresentare lo spostamento da A a B con segmento che unisce A e B munito di freccia per indicare il verso di percorrenza sulla retta che congiunge A e B.



Si noti che uno spostamento della particella da A' a B', avente la stessa lunghezza dello spostamento AB, la stessa direzione e lo stesso verso, rappresenta il <u>medesimo spostamento</u>, in quanto rappresenta lo stesso cambiamento di posizione. (Questa constatazione porterà alla definizione di uguaglianza di vettori).
Possiamo immaginare di fare un ulteriore spostamento da B a C. L'effetto complessivo dei due spostamenti è equivalente allo spostamento da A a C. Diamo allora che AC è somma o risultante degli spostamenti AB e BC. Si noti che questa non è una somma algebrica e che un numero da solo non è sufficiente per specificarla.

Le grandezze che si comportano come gli spostamenti sono chiamate vettori. Diamo quindi la seguente definizione:
i vettori sono grandezze caratterizzate da una direzione, da un verso e da un valore numerico chiamato ampiezza (o modulo), e che si combinano secondo determinate regole di addizione che specificheremo fra breve.
Le grandezze che sono completamente determinate da un numero che ne rappresenta la misura rispetto ad una assegnata unità di misura sono invece chiamate "scalari" (grandezze scalari).

Due sono le proprietà fondamentali della notazione vettoriale:

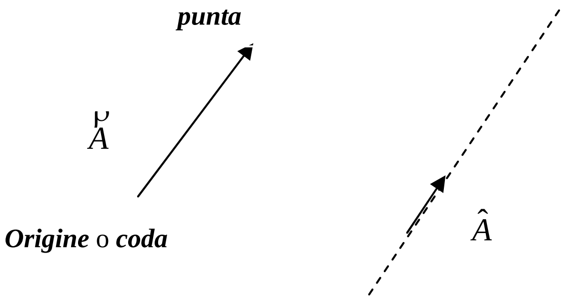
1. la formulazione delle leggi fisiche in forma vettoriale è indipendente dalla scelta del sistema di assi coordinati. La notazione vettoriale offre un linguaggio in cui le espressioni hanno un significato fisico intrinseco, indipendente dal sistema di coordinate.

2. il simbolismo vettoriale è conciso. Molte leggi fisiche hanno un aspetto più semplice in notazione vettoriale rispetto a quando sono espresse relativamente ad un particolare sistema di coordinate.

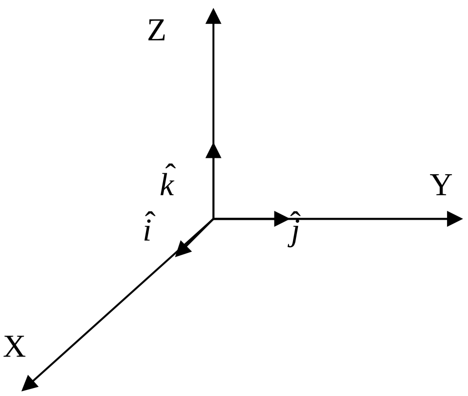
Per segnalare la natura vettoriale di una grandezza viene usata una lettera stampata in neretto **A** (grassetto) oppure una lettera con una freccetta sopra $\vec{A}$. Il modulo del vettore viene indicato con $|\vec{A}|$ oppure semplicemente con *A*. Per rappresentare un vettore su un diagramma si usa una freccia la cui lunghezza è proporzionale all'ampiezza del vettore, la cui direzione è coincidente con quella del vettore e la cui punta dà il verso del vettore.

Versori

Un vettore di modulo 1 con la direzione ed il verso di $\vec{A}$ viene chiamato"*versore* di $\vec{A}$ " ed è indicato con $\hat{A}$.

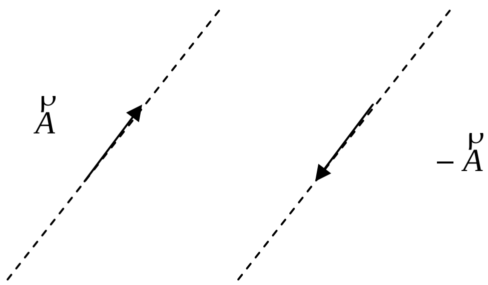


I versori degli assi coordinati vengono solitamente indicati con $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ oppure con $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$



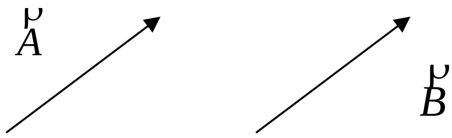
Opposto di un vettore

Un vettore $\vec{A}'$ che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\vec{A}$, ma verso opposto è indicato con $-\vec{A}$. Il segno “-“ davanti a un vettore ne cambia semplicemente il verso.



Uguaglianza fra due vettori

Due vettori si dicono uguali se hanno stesso modulo, stessa direzione e stesso verso.



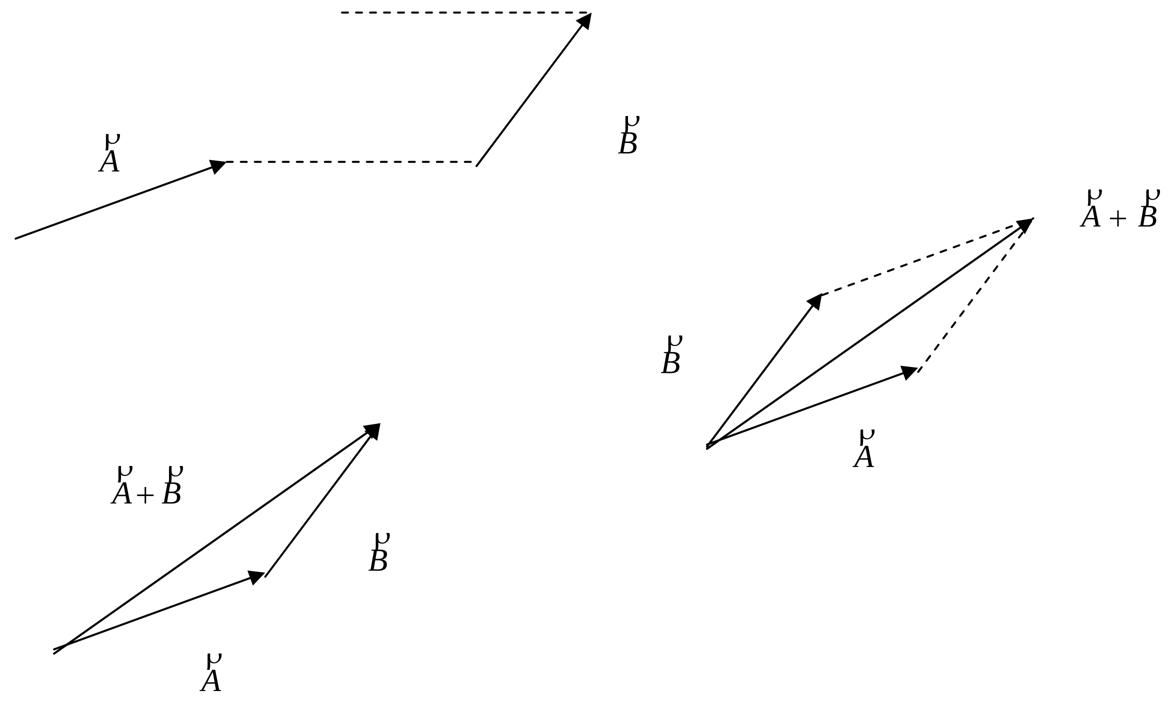
Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Il prodotto di uno scalare K per un vettore $\vec{A}$ è un nuovo vettore il cui modulo è |K| volte il modulo del vettore $\vec{A}$, la cui direzione coincide con quella di $\vec{A}$, e il cui verso è uguale a quello di $\vec{A}$ se K>0 oppure è opposto a quello di $\vec{A}$ se K<0.
Ovviamente dividere un vettore per uno scalare K significa moltiplicare il vettore per il reciproco dello scalare (moltiplicare per 1/K).
Il vettore $\vec{A}$ può essere espresso tramite il versore $\hat{A}$ attraverso la relazione:

$$\vec{A} = A\hat{A}$$

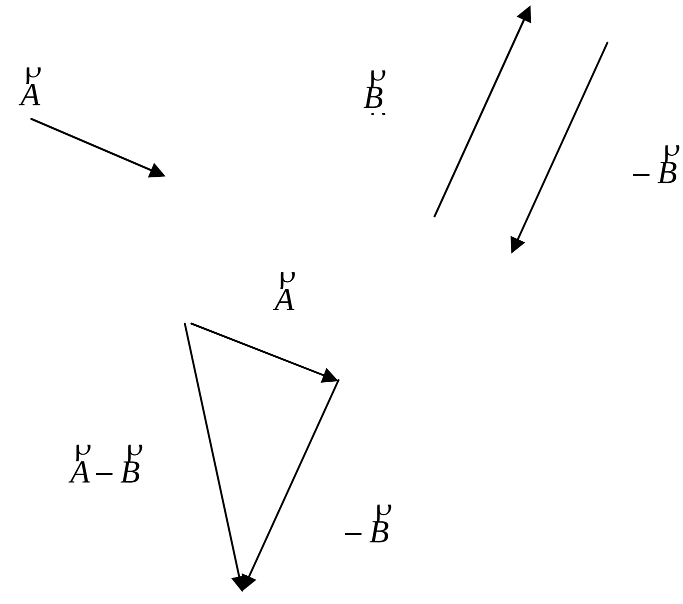
Somma e differenza di vettori

La somma di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si definisce tramite la costruzione geometrica in figura.
Si trasporta $\vec{B}$ parallelamente a se stesso fino a fare coincidere l'origine (la “coda”) di $\vec{B}$ con la punta di $\vec{A}$. Il vettore che ha per direzione quella della congiungente la coda di $\vec{A}$ con la punta di $\vec{B}$ che ha per modulo la lunghezza del segmento che ha questi due punti per estremi, e verso dalla coda del primo alla punta del secondo è per definizione $\vec{A}+\vec{B}$.

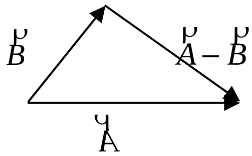


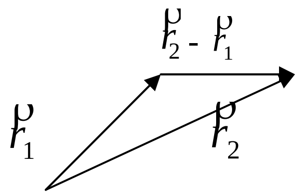
La *sottrazione* fra i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ è definita come la somma di $\vec{A}$ con il vettore $-\vec{B}$.

$$\vec{A}-\vec{B} \equiv \vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$$



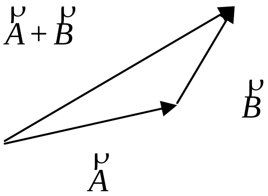
Se i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ hanno l'origine in comune, il vettore $\vec{A}-\vec{B}$ va dalla punta di $\vec{B}$ alla punta di $\vec{A}$ e rappresenta una diagonale del parallelogramma formato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$.
Se $\vec{r}_1$ rappresenta la posizione di una particella ad un istante di tempo t_1 ed $\vec{r}_2$ la sua posizione ad un istante t_2, il vettore $\vec{r}_2$ - $\vec{r}_1$ rappresenta il vettore spostamento della particella e va dalla punta di $\vec{r}_1$ alla punta di $\vec{r}_2$.

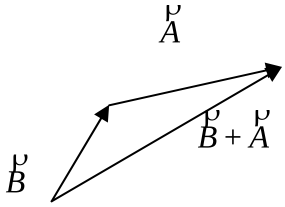




La somma vettoriale gode della *proprietà commutativa*:

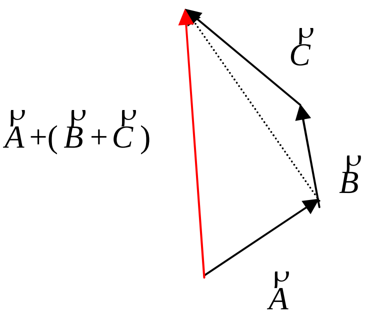
$$\vec{A}+\vec{B} \equiv \vec{B}+\vec{A}$$

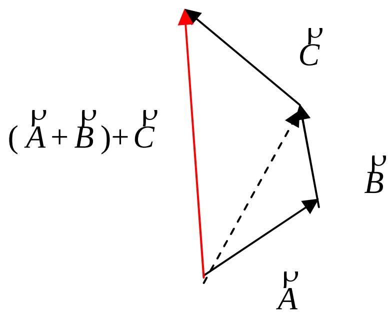




La somma vettoriale gode della *propritá associativa*:

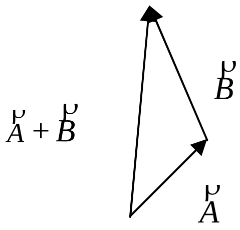
$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

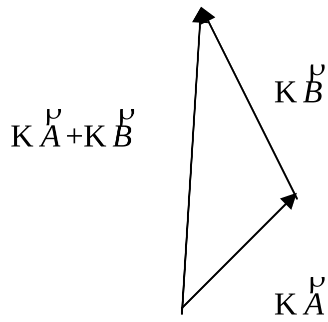




La somma vettoriale gode della *proprietà distributiva* rispetto al prodotto con uno scalare:

$$\mathrm{K}(\vec{A}+\vec{B})=\mathrm{K}\,\vec{A}+\mathrm{K}\,\vec{B}$$





I triangoli sono simili. La lunghezza di K$\vec{A}$+K$\vec{B}$ è K-volte la lunghezza di $\vec{A}+\vec{B}$. Quindi K$\vec{A}$+K$\vec{B}$ ha la stessa direzione e verso di $\vec{A}+\vec{B}$ e modulo:

$$\left|K\vec{A}+K\vec{B}\right| = K\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$$

dimostrando così l'uguaglianza.

Vettori e grandezze fisiche

Affinché una grandezza fisica sia rappresentabile come un vettore deve:

- avere modulo, direzione e verso indipendenti dalla scelta del sistema di coordinate;
- soddisfare la legge della somma dei vettori (*regola del parallelogramma*).

Scomposizione e addizione dei vettori: metodo analitico

Il metodo geometrico per la somma di due o più vettori non è utile per vettori in 3 dimensioni. Si usa allora il metodo analitico che conporta la scomposizione di un vettore nelle sue componenti rispetto ad un particolare sistema di coordinate. Il vettore $\vec{A}$ può essere pensato come la risultante di due vettori uno lungo x ($\overrightarrow{OX}$) ed uno lungo y ($\overrightarrow{OY}$) :

$$\vec{A}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}$$

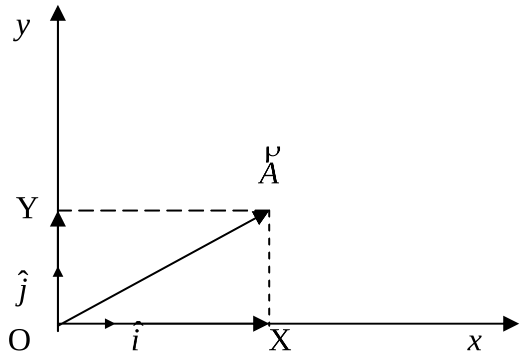
I vettori $\overrightarrow{OX}$ ed $\overrightarrow{OY}$ possono essere espressi attraverso i versori $\hat{i}$ e $\hat{j}$ degli assi x ed y attraverso le relazioni:

$$\overrightarrow{OX}=A_X\,\hat{i}$$
$$\overrightarrow{OY}=A_Y\,\hat{j}$$

I numeri A_x e A_y sono detti *le componenti* di $\vec{A}$ lungo x e lungo y (A_x e A_y sono numeri con segno). Le relazioni che legano A_x ed A_y ad A e θ sono le stesse di quelle che legano le coordinate cartesiane e le coordinate polari, cioè:

$A_x=A\cos\theta$ $\qquad$ $A=\sqrt{A_X^2+A_Y^2}$

$A_y = A \operatorname{sen}\theta$ $\qquad\qquad$ $\operatorname{tg}\theta = A_y/A_x$



Il vettore A può quindi essere espresso come

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

I vettori $A_x\hat{i}$ e $A_y\hat{j}$ sono detti *i vettori componenti* di $\vec{A}$ o semplicemente i *componenti* di $\vec{A}$.

Consideriamo allora due vettori

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad\qquad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

il vettore somma sarà

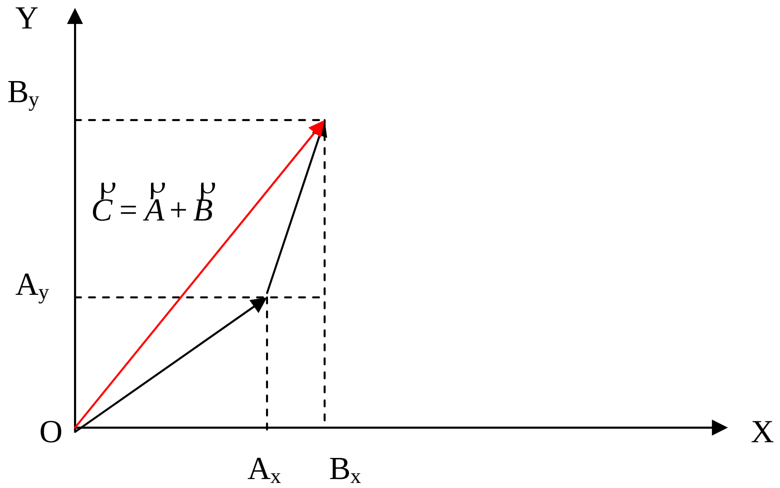
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) =$$
$$= A_x\hat{i} + B_x\hat{i} + A_y\hat{j} + B_y\hat{j} =$$
$$= (A_x + B_x)\ \hat{i}\ \ (A_y + B_y)\ \hat{j} =$$
$$= C_x\hat{i} + C_y\hat{j}$$

dove

$$C_x = A_x + B_x$$

$$C_y = A_y + B_y$$

In altre parole la componente del vettore somma lungo un determinato asse è data dalla somma algebrica delle singole componenti dei vettori di partenza lungo quell'asse.



$$|C|=\sqrt{C_X^2+C_Y^2}=\sqrt{(A_X+B_X)^2+(A_Y+B_Y)^2}$$

$$tg\theta=\frac{C_y}{C_x}=\frac{A_y+B_y}{A_x+B_x}$$

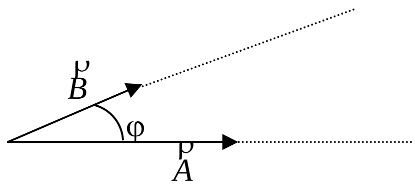
Moltiplicazione fra vettori

Risulta utile definire due diversi tipi di moltiplicazione tra vettori:

1. moltiplicazione tra vettori che dà origine a uno scalare (prodotto scalare)
2. moltiplicazione tra vettori che dà origine a un vettore (prodotto vettoriale)

Prodotto scalare

Si definisce prodotto scalare di $\vec{A}$ e $\vec{B}$, e si indica col simbolo $\vec{A}\bullet\vec{B}$, quel numero che si ottiene moltiplicando moduli di $\vec{A}$ e di $\vec{B}$ per il coseno dell'angolo fra essi compreso.



$\vec{A}\bullet\vec{B}$ =ABcosφ=A(Bcosφ)=(Acosφ)B=BAcosφ

Prodotto del modulo di $\vec{B}$ per la componente di $\vec{A}$ nella direzione di $\vec{B}$

Prodotto del modulo di $\vec{A}$ per la componente di $\vec{B}$ nella direzione di $\vec{A}$

Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$$

dato che l'angolo formato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$ è lo stesso di quello formato da $\vec{B}$ ed $\vec{A}$.

Il prodotto scalare è:

- positivo se i due vettori formano un angolo acuto $0<\varphi<\pi/2$;
- negativo se i due vettori formano un angolo ottuso;

Se $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$ con $A \neq 0$ e $B \neq 0$ $\Longrightarrow$ $\cos\varphi = 0$ cioè $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono ortogonali ($\varphi=\pi/2$)

Se i due vettori hanno stessa direzione e verso allora $\vec{A} \bullet \vec{B}$ = AB (in particolare $\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2$)

Non esiste "l'operazione inversa" del prodotto scalare:

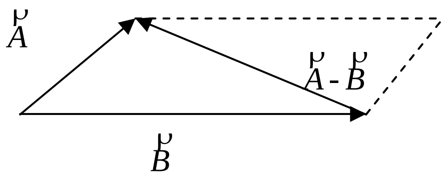
se $\vec{A} \bullet \vec{X} = b$ $\Longrightarrow$ $\vec{X}$ non è univocamente determinato.

Chiaramente non ha senso parlare di proprietà associativa.

Vale la proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$$

Esempio:



$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$\vec{D} \bullet \vec{D} = (\vec{A} - \vec{B}) \bullet (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{A} \bullet \vec{A} - \vec{A} \bullet \vec{B} - \vec{B} \bullet \vec{A} + \vec{B} \bullet \vec{B} =$$

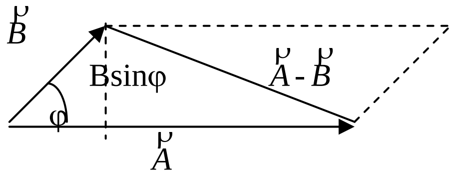
$$D^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\varphi$$

Questa relazione è nota in trigonometria come "legge del coseno o di Carnot", e si riduce al teorema di Pitagora per $\phi=\pi/2$.

Ci si potrebbe chiedere il perchè di una definizione così "strana" di prodotto. Non sarebbe stato più semplice utilizzare il semplice prodotto dei moduli? E' facile vedere che, se il prodotto scalare fosse definito semplicemente come il prodotto dei moduli dei due vettori, non varrebbe la proprietà distributiva. Indichiamo infatti con $\otimes$ questa operazione $\vec{A} \otimes \vec{B}$ =AB. Se $\vec{D} = \vec{B} + \vec{C}$, allora $\vec{A} \otimes (\vec{B} + \vec{C}) = |\vec{A}|\,|\vec{B} + \vec{C}|$ che in generale è diverso da $|\vec{A}|\,|\vec{B}| + |\vec{A}|\,|\vec{C}|$. Per esempio se $\vec{B}$ e $\vec{C}$ sono l'uno l'opposto dell'altro allora $(\vec{B} + \vec{C}) = 0$ e quindi $|\vec{A}|\,|\vec{B} + \vec{C}|=0$, mentre $|\vec{A}|\,|\vec{B}| + |\vec{A}|\,|\vec{C}|$ è sicuramente positivo.

Prodotto vettoriale

Si definisce prodotto vettoriale $\vec{A}\times\vec{B}$ (indicato anche come $\vec{A}\wedge\vec{B}$) di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ un vettore il cui modulo è dato dal prodotto del modulo di $\vec{A}$ per il modulo di $\vec{B}$ per il seno dell'angolo formato da $\vec{A}$ e $\vec{B}$, la cui direzione è quella della normale al piano individuato da $\vec{A}$ e da $\vec{B}$ e il cui verso è quello indicato dal pollice della mano destra quando il vettore $\vec{A}$ va verso $\vec{B}$ nel senso dell'angolo minore (regola della mano destra).



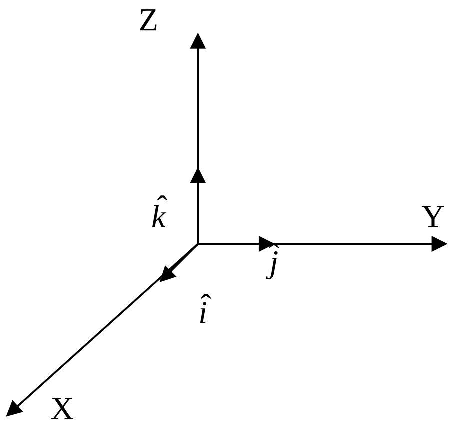
$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\,\text{sen}\,\varphi = \text{A(Bsen}\varphi)$$

Il modulo del prodotto vettoriale di $\vec{A}$ e $\vec{B}$ rappresenta l'area del parallelogramma i cui lati non paralleli sono i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$.
L'area del triangolo che ha per lati i due vettori ed il vettore differenza $\vec{A}-\vec{B}$ sarà allora pari a ½$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$

Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo. E' invece massimo quando i due vettori sono ortogonali (senφ=1).

Per il prodotto vettoriale vale la proprietà distributiva: $\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

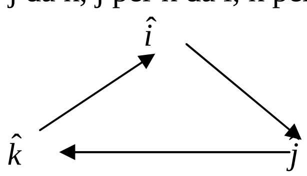
Valgono le seguenti relazioni fra i versori:



$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$$
$$\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$$
$$\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{i}\times\hat{i}=0$$
$$\hat{j}\times\hat{j}=0$$
$$\hat{k}\times\hat{k}=0$$

Le relazioni di sopra possono essere facilmente ricordate utilizzando il seguente "triangolo" da percorrere in senso orario (i per j dà k, j per k dà i, k per i dà)



Possiamo esprimere il prodotto vettoriale $\vec{A}\times\vec{B}$ attraverso le componenti di $\vec{A}$ e $\vec{B}$:

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_X\ \hat{i}+A_Y\ \hat{j}+A_Z\ \hat{k})\times(B_X\ \hat{i}+B_Y\ \hat{j}+B_Z\ \hat{k})=$$

$$\begin{aligned}&= A_X\ B_X\ \hat{i}\times\hat{i}+A_X\ B_Y\ \hat{i}\times\hat{j}+A_X\ B_Z\ \hat{i}\times\hat{k}+\\ &A_Y\ B_X\ \hat{j}\times\hat{i}+A_Y\ B_Y\ \hat{j}\times\hat{j}+A_Y\ B_Z\ \hat{j}\times\hat{k}+\\ &A_Z\ B_X\ \hat{k}\times\hat{i}+A_Z\ B_Y\ \hat{k}\times\hat{j}+A_Z\ B_Z\ \hat{k}\times\hat{k}=\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=(A_X\ B_Y - A_Y\ B_X)\,\hat{k}+\\ &(A_Z\ B_X - A_X\ B_Z)\,\hat{j}+\\ &(A_Y\ B_Z - A_Z\ B_Y)\,\hat{i}\end{aligned}$$

I termini che moltiplicano i versori coincidono con gli sviluppi di determinanti del secondo ordine

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_X & A_Y & A_Z\\ B_X & B_Y & B_Z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_Y & A_Z\\ B_Y & B_Z\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}A_X & A_Z\\ B_X & B_Z\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}A_X & A_Y\\ B_X & B_Y\end{vmatrix}\hat{k}$$

Per il prodotto vettoriale non vale la *proprietà associativa*:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

Per verificare ciò basta calcolare il primo e il secondo membro per $\vec{A}=\hat{i}\ \vec{B}=\hat{j}\ \vec{C}=\hat{j}+\hat{k}$.

Si dimostra che per il *doppio prodotto vettore* valgono le relazioni:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\bullet\vec{C})\,\vec{B}-(\vec{A}\bullet\vec{B})\,\vec{C}$$

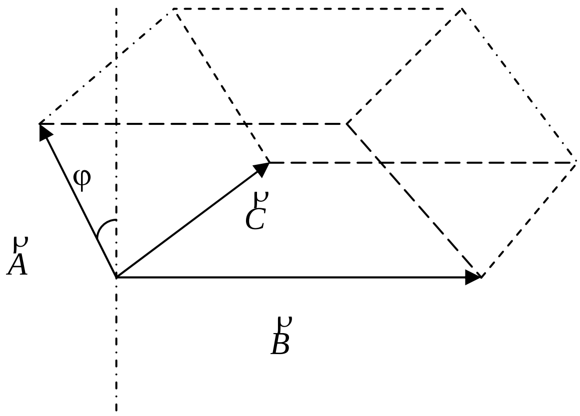
$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\bullet\vec{C})\,\vec{B}-(\vec{B}\bullet\vec{C})\,\vec{A}$$

Prodotto misto

L'espressione

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C})$$

si indica come *prodotto misto* e si dimostra essere uguale al volume del parallelepipedo formato dai tre vettori.



Essendo il volume pari all'area della base per l'altezza,

$$\text{area della base} = \left|\vec{B} \times \vec{C}\right|$$

$$\text{altezza} = A \cos\varphi$$

$$\text{volume} = A\left|\vec{B} \times \vec{C}\right| \cos\varphi = \vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C})$$

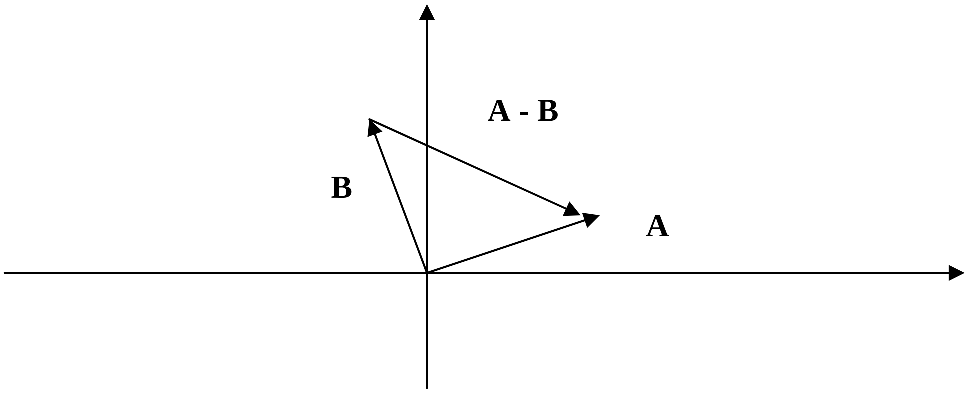
Si dimostra che un prodotto misto non cambia permutando ciclicamente l'ordine dei vettori:

$$\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet (\vec{C} \times \vec{A})$$

tali uguaglianze sono concettualmente banali in quanto rappresentano tutte il volume del parallelepipedo formato da $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$.

Esercizio N. 1

Due punti in un piano hanno coordinate polari P_1=(2.50*m*, 30°) e P_2=(3.80*m*, 120°). Determinare (a) le coordinate cartesiane dei due punti e (b) la distanza fra loro.



(a)

Le coordinate cartesiane dei due punti sono:

$$x_1 = 2.5m \cdot \cos(30°) = 2.17m$$
$$y_1 = 2.5m \cdot sin(30°) = 1.25m$$
$$x_2 = 3.8m \cdot \cos(120°) = -1.9m$$
$$y_2 = 3.8m \cdot sin(120°) = 3.29m$$

(b)

La distanza fra i due punti è data dal modulo del vettore **A-B**

A=2.17**i** +1.25**j**

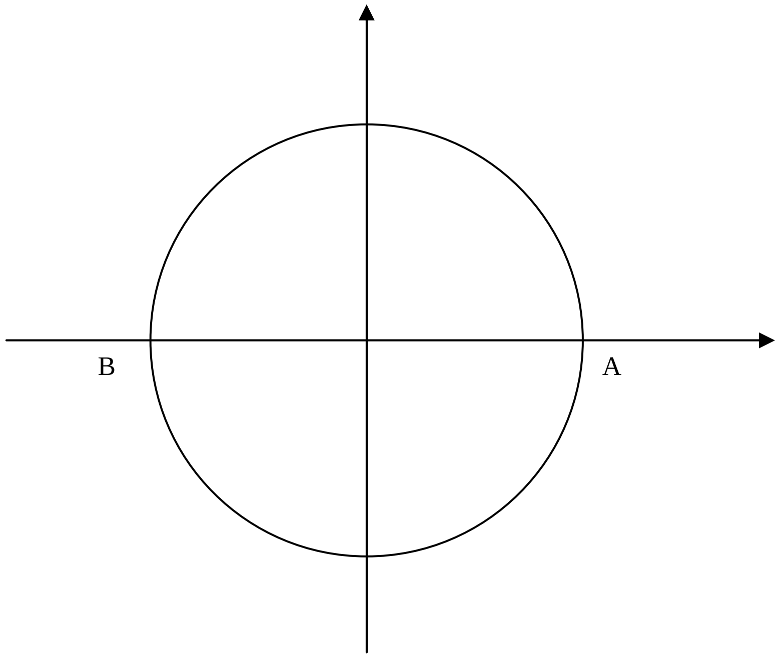
B= -1.90**i** +3.29**j**

A – B = (2.17+1.90)**i** +(1.25-3.29)**j** = 4.07**i** – 2.04**j**

$$|\mathbf{A - B}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 4.55m$$

Esercizio N. 2

Una persona cammina lungo un percorso circolare di raggio 5*m*, per una mezza circonferenza. Trovare (a) il modulo del vettore spostamento, (b) la effettiva distanza percorsa, (c) qual è il modulo dello spostamento se si completa la circonferenza?



Il punto iniziale ha coordinate A=(5m,0) mentre il punto finale ha coordinate B=(-5m,0), quindi il vettore spostamento avrà componenti:

$\mathbf{AB} = (B_x-A_x)\mathbf{i}+(B_y-A_y)\mathbf{j} = (-5m-5m)\mathbf{i}+(0-0)\mathbf{j} = -10m\mathbf{i}+0\mathbf{j}$

il modulo del vettore spostamento quindi sarà:

$|\mathbf{AB}|=\sqrt{(-10)^2+0^2}=10\text{m}$

la effettiva distanza percorsa S è uguale alla metà della lunghezza della circonferenza, quindi:

$S = (2\pi R)/2 = (2\pi\cdot 5m)/2 = 15.7m$.

Se si completa la circonferenza il punto finale coincide con il punto iniziale, quindi il vettore spostamento sarà il vettore nullo che ha modulo uguale a zero.

Esercizio N. 3

Due vettori sono dati da **A**= 3**i** -2**j** e **B**= -**i** –4**j** calcolare (a) **A**+**B**, (b) **A**-**B**, (c) |**A**+**B**|, (d) | **A**-**B**|, (e) la direzione di **A**+**B** e **A**-**B** .

(a)

A+**B** = (3-1)**i** + (-2-4)**j**=2**i** - 6**j**

(b)

A-**B** = (3+1)**i** + (-2+4)**j**=4**i** +2**j**

(c)

|**A**+**B**| = $[2^2 + (-6)^2]^{1/2} = 6.32$

(d)
|**A**-**B**| = $[4^2 + 2^2]^{1/2} = 4.47$

(e)

Per trovare la direzione occorre valutare l'angolo che un vettore forma col semiasse positivo delle ascisse. Ricordando che
$tg\theta = y/x$ si ha:

$\theta_{A+B} = arctg(-6/2) = -71.6° + k\ 180°$

dove k è un numero intero. Per determinare il valore di k basta tener conto del segno delle componenti: dato che la componente y è negativa mentre la componente x è positiva, il vettore giace nel IV quadrante, e quindi k =0.

$\theta_{A-B} = arctg(2/4) = 26.6° + k\ 180°$

Per quanto detto sopra, il vettore, avendo entrambe le componenti positive, giace nel primo quadrante, pertanto anche in questo caso si ha k=0.

Esercizio N. 4

Una particella è soggetta a due spostamenti, **A** e **B**. Il primo ha un modulo di 150cm e forma un angolo di 120° con l'asse x positivo. Lo spostamento risultante **R** ha un modulo di 140cm ed è diretto con un angolo di 35° rispetto all'asse x positivo. Trovare il modulo e la direzione del secondo spostamento.

A_x=150cm cos(120°)= -75cm

A_y=150cm sin(120°)= 130cm

R_x=140cm cos(35°)= 114.6cm

R_y=140cm sin(35°)= 80.3cm

Poiché **R**= **A**+**B** possiamo ottenere:

B=**R-A=**[(114.6+75)**i**+(80.3-130)**j**]cm = (189.6**i** – 49.7**j**)cm

|**B**|=$[(189.6)^2+(-49.7)^2]^{1/2}$cm = 196 cm

θ = arctg(-49.7/189.6)= -14.7°+ k180°

dove k=0 dato che il vettore **B** giace nel IV quadrante.

Esercizio N. 5

Assegnato il vettore **R**=2**i**+**j**+3**k**, trovare (a) le componenti lungo gli assi x, y e z, (b) il modulo di **R**, (c) gli angoli fra **R** e gli assi x, y e z.

(a)

Ovviamente, $R_x=2$, $R_y=1$, $R_z=3$

(b)

|**R**|=$(4+1+9)^{1/2}=(14)^{1/2}$

(c)

Gli angoli che il **R** forma con gli assi cartesiani si ricavano dai coseni direttori:

$$\mathbf{cos}\alpha = \frac{R_x}{|\mathbf{R}|} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\mathbf{cos}\beta = \frac{R_y}{|\mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{1}{14}}$$

$$\mathbf{cos}\gamma = \frac{R_z}{|\mathbf{R}|} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{9}{14}}$$

ottenendo che:

α=arccos $(2/7)^{1/2}$=57.68

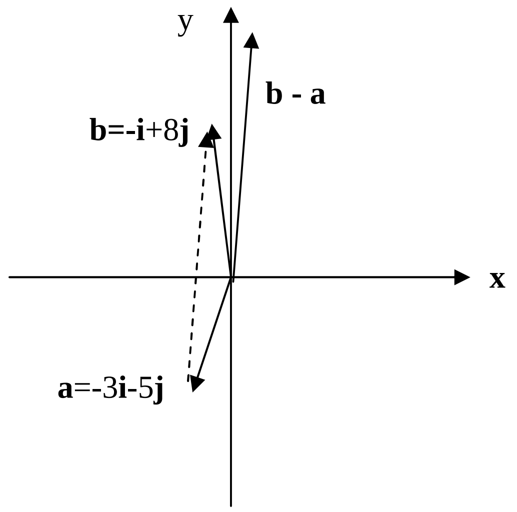
β=arccos $(1/14)^{1/2}$=74.49

γ=arccos $(9/14)^{1/2}$=36.69

Esercizio N. 6

Una particella si muove da un punto nel piano xy avente le coordinate cartesiane (-3,-5)*m* ad un punto di coordinate (-1,8)*m*. (a) Scrivere le espressioni vettoriali per i vettori posizione, nella notazione dei vettori unitari (versori), per questi due punti. (b) Qual è il vettore spostamento?

(a)



(b)

Rappresentando i vettori **a** e **b** nel piano cartesiano si vede immediatamente che il vettore spostamento sarà dato da **b-a**:

b-**a** = (-1+3)**i** + (8+5)**j** = 2**i** + 13**j**

Si noti che per poter chiudere la poligonale nel disegno occorre traslare il vettore **b-a** parallelamente a se stesso fino a portare la sua origine sulla punta di **a** e la sua punta sulla punta di **b.**

Esercizio N. 7

Dimostrare che i vettori **u** = 6**i** - 4**j** + 2**k**, **v =** 2**i** - 6**j** + 10**k**, **z** = 4**i** + 2**j** - 8**k** formano un triangolo rettangolo.

Perché tre vettori formino un triangolo occorre che sia soddisfatta una delle seguenti due condizioni:

(a) uno di essi sia uguale alla somma degli altri due;
(b) i tre vettori abbiano somma nulla.

Verifichiamo che nel nostro caso è soddisfatta la condizione (a). Infatti è:

$v_x + z_x = \ \ 6 = u_x$

$v_y + z_y = -4 = u_y$

$v_z + z_z = \ \ 2 = u_z$

perciò **v** + **z** = **u**

Per vedere se il triangolo formato è rettangolo, calcoliamo i prodotti scalari fra i tre vettori, ovviamente a due a due (poiché non ha senso definire il prodotto scalare di tre vettori): se un prodotto scalare è nullo, allora il triangolo è rettangolo.

u•v = (6)(2)+(-4)(-6)+(2)(10)=56≠0

v•z = (2)(4)+(-6)(2)+(10)(-8)=-84≠0

z•u = (4)(6)+(2)(-4)+(-8)(2)=0

Da quest'ultima espressione si vede come **z** e **u** siano perpendicolari, e come perciò **u**, **v**, **z** formino un triangolo rettangolo.

Esercizio N. 8

Se **u** = **i**+2**j**–**k**, **v** = -**i**+**j**-2**k**, **z**=**i**+**j**-**k**, trovare (a) **u** x **v**, (b) **v** x **u**, (c) (**u+v**) x (**u-v**), (d) (**u** x **v**) x **z**.

Il prodotto vettoriale, note le componenti dei vettori, è dato dal determinante simbolico:

(a)

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

(b)
Invertendo l'ordine dei vettori il prodotto vettoriale cambia segno, poiché si invertono due righe nel determinante simbolico:

v x **u** = 3**i**-3**j**-3**k**.

(c)
E' **u+v**=3**j**-3**k** e **u-v**=2**i**+**j**+**k** quindi

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

(d)
Si dimostra che il triplo prodotto vettoriale è dato da:

(u x **v)** x **z=(u•z)v – (v•z)u**

cosicchè otteniamo

(u x **v)** x **z**= (1+2+1)**v**-(-1+1+2)**u**= 4**v**-2**u**= -6**i**-6**k**.
Esercizio N. 9

Se **u** = 3**i**+**j**-3**k**, **v** = **i**-2**j**+**k**, trovare un vettore **w**, di modulo w=5 che sia perpendicolare sia a **u** che a **v**.

Quando due vettori sono perpendicolari il loro prodotto scalare deve essere nullo, cioè:

$$\mathbf{w}\bullet\mathbf{u} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w}\bullet\mathbf{v} = 0,$$

quindi indicando con (x,y,z) le componenti del vettore **w** possiamo scrivere:

$$\begin{cases} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \bullet (2\mathbf{i} + 1\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = 0 \\ (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \bullet (1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}) = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5 \end{cases}$$

(l'ultima equazione ovviamente deriva dalla condizione sul modulo del vettore).
Sviluppando i prodotti otteniamo:

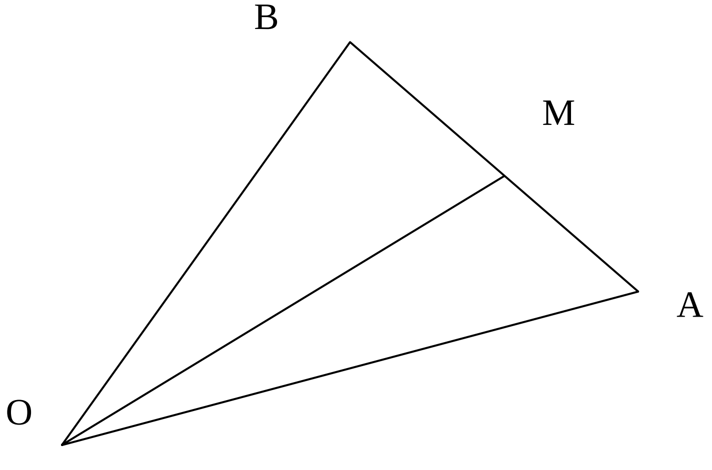
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni del sistema si ottiene che x=z e y=z; sostituendo questi valori nella terza equazione otteniamo che z=2.89.
Il nostro vettore quindi sarà:

$$\mathbf{w}=2.89\mathbf{i}+2.89\mathbf{j}+2.89\mathbf{k}.$$

Esercizio N. 10

Se due lati di un triangolo sono formati dai vettori **OA** e **OB** quale è la distanza da O del punto medio M del terzo lato?



La distanza del punto O dal punto medio M è data dal modulo del vettore **OM**; ma questo vettore può essere espresso come somma dei vettori **OA** e **AM**:

OM= OA+ AM ;

ricordando che M è il punto medio fra A e B possiamo anche scrivere:

AM = AB/2 = (**OB – OA)**/2

quindi per il vettore **OM** otteniamo:

OM= OA+(**OB – OA)**/2=(2**OA +OB – OA)**/2= (**OB** + **OA)**/2,

per cui la distanza che stiamo cercando vale :

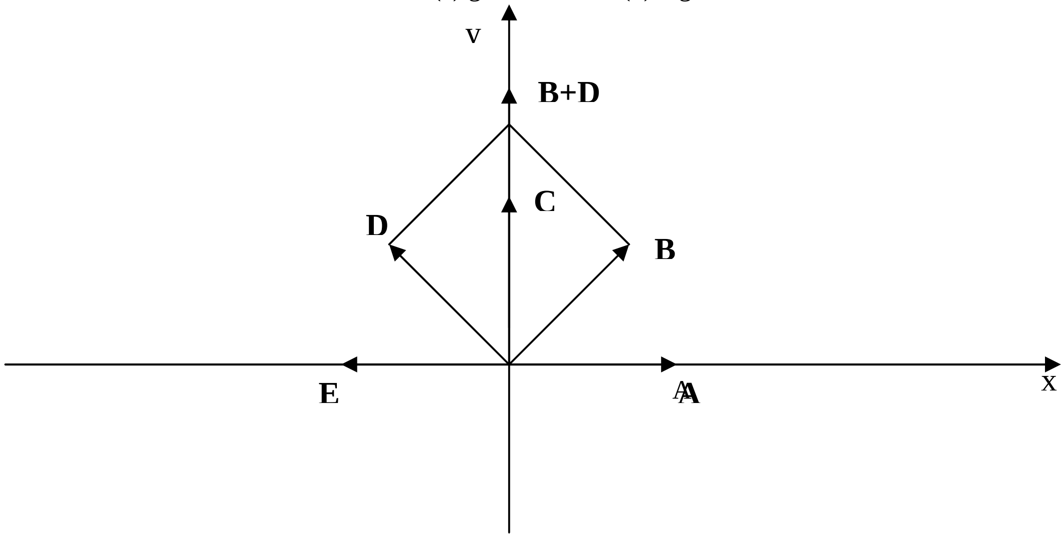
|(**OB** + **OA)**/2|

risultato ben noto in geometria.

Esercizio N. 11

Dati cinque vettori unitari uscenti dall'origine delle coordinate, le cui rispettive direzioni formano angoli di 45° compresi fra θ=0° e θ=180°, determinare la somma: (a) graficamente; (b) algebricamente.

(a)



Il vettore somma **V** può essere espresso come segue:

V = **A**+**B**+**C**+**D**+**E** = (**A**+**E**) + (**D**+**B**) + **C** ;

osservando la figura si vede subito che **A**= **-E** per cui (**A**+**E**)=0 ;

i vettori **D** e **B** formano fra di loro un angolo di 90°, quindi la loro somma sarà data dalla diagonale (parallela all'asse y) del quadrato che essi definiscono, per cui ricordando che essi hanno modulo unitario possiamo scrivere:

(**D**+**B**) = $\sqrt{2}$ **j** .

Il vettore somma quindi sarà:

V = (**D**+**B**) + **C** = $\sqrt{2}$ **j** +1**j** = (1+ $\sqrt{2}$)**j**.

(b)
Gli angoli che i vettori **A, B**, **C, D**, ed **E**, formano con l'asse x sono rispettivamente 0°, 45°, 90°, 135° e 180°; i vettori quindi possono essere espressi come segue:

$\mathbf{A}=1\cdot\cos(0°)\mathbf{i}+1\cdot\sin(0°)\mathbf{j} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$
$\mathbf{B}=1\cdot\cos(45°)\mathbf{i}+1\cdot\sin(45°)\mathbf{j} = \sqrt{2}/2\ \mathbf{i} + \sqrt{2}/2\,\mathbf{j}$
$\mathbf{C}=1\cdot\cos(90°)\mathbf{i}+1\cdot\sin(90°)\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$
$\mathbf{D}=1\cdot\cos(135°)\mathbf{i}+1\cdot\sin(135°)\mathbf{j} = -\sqrt{2}/2\ \mathbf{i} + \sqrt{2}/2\,\mathbf{j}$
$\mathbf{E}=1\cdot\cos(180°)\mathbf{i}+1\cdot\sin(180°)\mathbf{j} = -1\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$

Le componenti del vettore somma saranno dati dalla somma delle componenti dei singoli vettori:
$\mathbf{V} = (1+ \sqrt{2}/2 + 0 - \sqrt{2}/2 -1)\mathbf{i} + (0 + \sqrt{2}/2 + 1 + \sqrt{2}/2 + 0)\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + (1+\sqrt{2})\mathbf{j} = (1+\sqrt{2})\mathbf{j}$.

Esercizio N. 12

Quali fra i seguenti vettori sono mutuamente perpendicolare? Le terne di numeri indicano le componenti del vettore.

A(2,3,1); **B**(0,0,2); **C**(1,-2,0); **D**(1,1,-3); **E**(9,5,3)

Quando due vettori sono perpendicolari il loro prodotto scalare è nullo, quindi basta verificare tale condizione:

$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = 2\cdot0+ 1\cdot0+1\cdot2 = 2$ $\Rightarrow$ **A** e **B** non sono perpendicolari;

$\mathbf{A}\bullet\mathbf{C} = 2\cdot1+ 1\cdot(-2)+1\cdot0 = 0$ $\Rightarrow$ **A** e **C** sono perpendicolari;

$\mathbf{A}\bullet\mathbf{D} = 2\cdot1+ 1\cdot1+1\cdot(-3) = 0$ $\Rightarrow$ **A** e **D** sono perpendicolari;

$\mathbf{A}\bullet\mathbf{E} = 2\cdot9+ 1\cdot5+1\cdot3 = 26$ $\Rightarrow$ **A** e **E** non sono perpendicolari;

$\mathbf{B}\bullet\mathbf{C} = 0\cdot1+ 0\cdot(-2)+2\cdot0 = 0$ $\Rightarrow$ **B** e **C** sono perpendicolari;

$\mathbf{B}\bullet\mathbf{D} = 0\cdot1+ 0\cdot1+2\cdot(-3) = -6$ $\Rightarrow$ **B** e **C** non sono perpendicolari;

$\mathbf{B}\bullet\mathbf{E} = 0\cdot9+ 0\cdot5+2\cdot3 = 6$ $\Rightarrow$ **B** e **E** non sono perpendicolari;

$\mathbf{C}\bullet\mathbf{D} = 1\cdot1+ (-2)\cdot1+0\cdot(-3) = -5$ $\Rightarrow$ **C** e **D** non sono perpendicolari;

$\mathbf{C}\bullet\mathbf{E} = 1\cdot9+ (-2)\cdot5+0\cdot3 = -1$ $\Rightarrow$ **C** e **E** non sono perpendicolari;

$\mathbf{D}\bullet\mathbf{E} = 1\cdot9+ 1\cdot5+(-3)\cdot3 = 5$ $\Rightarrow$ **D** e **E** non sono perpendicolari.

Esercizio N. 13

Dimostrare che se uno dei vettori del prodotto scalare **A•B** viene moltiplicato per uno scalare c, l'angolo ϕ compreso fra **A** e **B** resta invariato.

Per definizione di prodotto scalare:

$\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = AB\cos\phi$;

ma il prodotto scalare può essere anche espresso tramite la somma dei prodotti delle componenti omonime dei due vettori, quindi possiamo scrivere:

$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = AB\cos\phi$

da cui segue che l'angolo ϕ è dato dalla seguente relazione:

$$\phi = \mathrm{ar}\cos\left(\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}\right).$$

Se adesso moltiplichiamo il vettore A **per lo scalare c avremo:**

$(c\mathbf{A})\bullet\mathbf{B} = (cA)B\cos\phi_1$

dove

$(c\mathbf{A}) = cA_x\mathbf{i} + cA_y\mathbf{j} + cA_z\mathbf{k}$ e ϕ_1 indica l'angolo fra i vettori $c\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Esprimendo il prodotto scalare come somma dei prodotti delle componenti omonime otteniamo:

$cA_xB_x + cA_yB_y + cA_zB_z = (cA)B\cos\phi_1$

per cui il nuovo angolo vale:

$$\phi_1 = \mathrm{ar}\cos\left(\frac{cA_xB_x + cA_yB_y + cA_zB_z}{cAB}\right) = \mathrm{ar}\cos\left(\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}\right).$$

L'angolo ϕ_1 quindi coincide con l'angolo ϕ.

Esercizio N. 14

Si consideri il vettore A=**3**x+y**+2**z**. 1) Determinare il modulo di** A**. 2) Costruire il vettore** B **giacente nel piano xy e perpendicolare ad** A**. 3) Costruire il versore** *vers*(B)**. 4) eseguire il prodotto scalare del vettore** C **= 2**x **per** A**.**

1)

$|\mathbf{A}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14} = 3.74$

2)

Quando due vettori sono perpendicolare il loro prodotto scalare deve essere nullo, quindi indicando le generiche componenti del vettore B con (B_x,B_y,0) (la terza componente è nulla poiché il vettore giace sul piano xy), possiamo scrivere:

A•B=0

cioè

$3\,B_x + 1\,B_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_y = -3\,B_x$

quindi il vettore **B** (k, -3k, 0), dove k è un qualunque numero reale, è perpendicolare ad **A** e giace nel piano xy.

3)

Per costruire *vers*(**B**) basta calcolare il parametro k che rende unitario il modulo del vettore **B** calcolato al punto 2):

$\sqrt{k^2 + (-3k)^2} = 1$

$\sqrt{10k^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad k^2 = \frac{1}{10} \qquad \Rightarrow \qquad k = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

quindi abbiamo ottenuto due valori del parametro k a cui corrispondono i due diversi versori

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right) \ ;$$

i due versori ovviamente hanno la stessa direzione (dovendo essere entrambi perpendicolari ad **A** e giacenti sul piano xy) ma verso opposto.

4)

A•C=(3**x+y+**2**z**)**•**(2**x**)=3·2+1·0+2·0=6

Esercizio N. 15

Dati du vettori, **A** = 3**i**+4**j**-5**k** e **B** = -**i**+2**j**+6**k**, calcolare: a) il modulo di entrambi; b) il prodotto scalare **A•B**; c) l'angolo ϕ formato fra essi; d) i coseni direttori di entrambi; e) il vettore somma ed il vettore differenza; f) il prodotto vettoriale.

a)

$$A=\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=7.07$$

$$B=\sqrt{(-1)^2+2^2+6^2}=\sqrt{41}=6.40$$

b)

A•B = $3\cdot(-1)+4\cdot2+(-5)\cdot6=-25$

c)

A•B = $AB\cos\phi$

$-25=7.07\cdot6.40\cdot\cos\phi$

$\cos\phi=-0.55$

$\phi=123.5°$

d)

Per trovare i coseni direttori (definiti come i coseni degli angoli che il vettore forma con gli assi coordinati) basta moltiplicare scalarmente il vettore per ciascuno dei versori del sistema di riferimento:

A•i = $A\cdot1\cdot\cos\alpha$

D'altronde il prodotto scalare si può anche esprimere come somma dei prodotti delle componenti omonime, quindi possiamo scrivere:

A•i = A_x quindi otteniamo:

$A_x=A\cdot1\cdot\cos\alpha$

cosicchè il coseno direttore rispetto all'asse x vale:

$\cos\alpha=A_x/A=\dfrac{3}{\sqrt{50}}$;

per gli altri coseni direttori otteniamo:

$\cos\beta=A_y/A=\dfrac{4}{\sqrt{50}}$; $\cos\gamma=A_z/A=\dfrac{-5}{\sqrt{50}}$;

Analogamente per i coseni direttori del vettore **B** avremo:

cosα = B_x / B = $\dfrac{-1}{\sqrt{41}}$; cosβ = B_y / B = $\dfrac{2}{\sqrt{41}}$; cosγ = B_z / B = $\dfrac{6}{\sqrt{41}}$;

e)

A + **B** = (3-1)**i** + (4+2)**j** + (-5+6)**k** = 2**i**+6**j**+**k**

A - **B** = (3+1)**i** + (4-2)**j** + (-5-6)**k** = 4**i**+2**j**-11**k**

f)

Per calcolare il prodotto vettroriale **A^B** utilizziamo il determinante simbolico sviluppato rispetto alla prima riga con il teorema di Laplace:

$$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (24+10)\mathbf{i} - (18-5)\mathbf{j} + (6+4)\mathbf{k} = 34\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

Esercizio N. 16

Trovare il volume del parallelepipedo i cui spigoli sono descritti dai vettori: **A**=**i**+2**j**, **B**=4j, **C** = **j**+3**k** uscenti dall'origine.

Il volume V del parallelepipedo può essere calcolato come valore assoluto del prodotto misto fra i tre vettori:

$$V = |\mathbf{A}*(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1*(4*3-0*1) - 2*(0*3-0*0) + 0*(0*1-4*0) = 12$$

Esercizio N. 17

Dati due vettori tali che **A+B** = 11**i**-**j**+5**k** ed **A-B** = -5**i**+11**j**+9**k**, determinare (a) **A** e **B**, (b) l'angolo compreso tra **A** e **A+B**.

(a)

A+B = (A_x+B_x)**i**+(A_y+B_y)**j**+(A_z+B_z)**k** = 11**i**-**j**+5**k**

A - B = (A_x-B_x)**i**+(A_y-B_y)**j**+(A_z-B_z)**k** = -5**i**+11**j**+9**k**

quindi eguagliando le singole componenti otteniamo:

$$\begin{cases} A_x + B_x = 11 \\ A_x - B_x = -5 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} A_y + B_y = -1 \\ A_y - B_y = 11 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} A_z + B_z = 5 \\ A_z - B_z = 9 \end{cases} ;$$

Sommando e sottraendo membro a membro le due equazioni di ciascun sistema si ottiene:

$$\begin{cases} A_x = 3 \\ B_x = 8 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} A_y = 5 \\ B_y = -6 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} A_z = 7 \\ B_z = -2 \end{cases} ;$$

cosicchè

A = 3**i**+5**j**+7**k** ; **B** = 8**i**-6**j**-2**k** .

(b)

|**A**| = $\sqrt{9+25+49} = 9.11$

|A+B| = $\sqrt{121+1+25} = 12.12$

A•(A+B)= 9.11*12.12*cosϕ

dove ϕ è l'angolo fra i vettori **A** ed (**A+B**);

d'altronde

A• (**A+B**)=3*11+5*(-1)+7*5=63

quindi

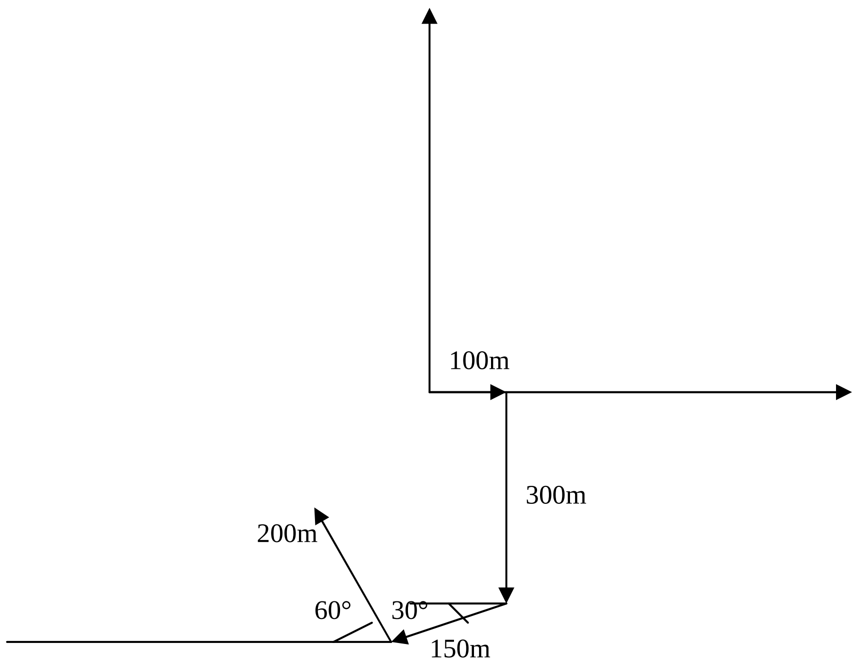
9.11*12.12*cosϕ = 63

cosϕ = 63/110.4 = 0.57

ϕ = 55.2°

ESERCIZIO (Serway pag 35 n°39)

Una persona che va a fare una passeggiata segue l'itinerario mostrato in figura:



L'escursione totale consta di quattro tratti rettilinei. Alla fine della passeggiata, qual è lo spostamento risultante misurato a partire dall'origine?

$A_x=100$ $\quad$ $A_y=0$
$B_x=0$ $\quad$ $B_y=-300$
$C_x=-150\ (3)^{1/2}/2$ $\quad$ $C_y=-150/2 = -75$
$D_x=-100$ $\quad$ $D_y=100(3)^{1/2}$

$R_x= 100 + 0 - 150(3)^{1/2}/2 – 100 = -150(3)^{1/2}/2 = -129.9$ m
$R_y= 0 – 300 – 75 + 100(3)^{1/2} = -375+100(3)^{1/2} = -201.8$ m

$R= (R_x^2 + R_y^2)^{1/2} = 240$

$tg\theta = R_y/R_x = 1.553$

$\theta = arctg(1.553) = 57° + k\ 180°$

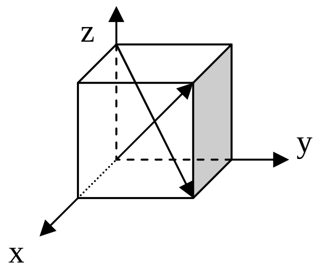
Poiché entrambe le componenti del vettore **R** sono negative, tale vettore si trova nel III quadrante cosicché in questo caso dobbiamo scegliere k=1 dal che segue:

$\theta = 57° + 180° = 237°$

Ecco perché, negli esercizi di fisica, non ci può limitare ad utilizzare brutalmente il risultato fornitoci dalla calcolatrice!

ESERCIZIO
Qual è l'angolo d'intersezione tra due diagonali interne di un cubo?

Se consideriamo un cubo di spigolo unitario i cui lati si incontrano nell'origine O di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Possiamo individuare, ad esempio, la diagonale d_1 che unisce l'origine O=(0,0,0) con il vertice opposto V=(1,1,1) e la diagonale d_2 che invece congiunge il punto di coordinate (0,0,1) con il punto di coordinate (1,1,0).



Vettorialmente avremo:

$\mathbf{d_1} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{d_2} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

dove il segno – nella componente z di $\mathbf{d_2}$ deriva dal fatto che tale componente è diretta in verso opposto all'asse z positivo.

Chiaramente, entrambe le diagonali avranno modulo pari a $(3)^{1/2}$ cosicché:

$\mathbf{d_1} \bullet \mathbf{d_2} = d_1\, d_2 \cos\phi = (3)^{1/2}\,(3)^{1/2} \cos\phi = 3 \cos\phi$

D'altronde il prodotto scalare si può anche eseguire come somma dei prodotti delle componenti dello stesso nome:

$\mathbf{d_1} \bullet \mathbf{d_2} = 1{*}1 + 1{*}1 + 1{*}(-1) = 1$

Confrontando le ultime due espressioni si ottiene che

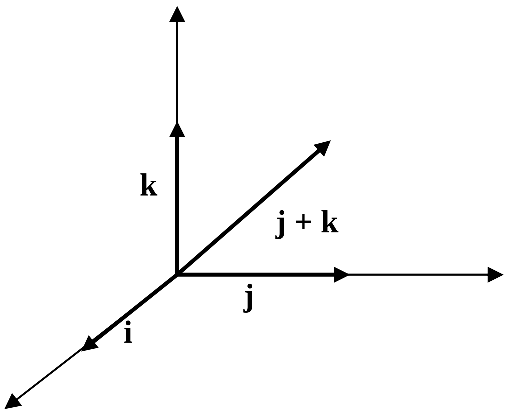
$3 \cos \phi = 1$ cioè

$\cos \phi = 1/3$ da cui si ricava l'angolo d'intersezione cercato $\phi = 70.5°$

Chiaramente avremmo potuto scegliere per $\mathbf{d_2}$ il vettore
$\mathbf{d_2} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
In questo caso $\cos \phi' = -1/3$ da cui $\phi' = 109.5°$, che è ovviamente il supplementare di ϕ.

ESERCIZIO

Dimostrare, utilizzando i vettori **a** = **i**, **b** = **j** e **c** = **j** + **k** che per il prodotto vettoriale non vale la proprietà associativa.



Per rispondere al quesito occorre dimostrare che **a^(b^c)** ≠ **(a^b)^c**.

Ora, i vettori **b** e **c** non hanno componenti lungo l'asse X e pertanto giacciono entrambi sul piano YZ; pertanto, il loro prodotto vettoriale **(b^c)** darà luogo ad un vettore ortogonale al piano YZ che, come tale, avrà componenti solo lungo l'asse X, cioè sarà del tipo k**i** dove k è uno scalare. Appare dunque evidente che tale vettore è parallelo al vettore **a** cosicchè **a^(b^c)**=0.

Analogamente i vettori **a** e **b** individuano il piano XY e pertanto il vettore **(a^b)** sarà ortogonale a tale piano e cioè sarà un vettore parallelo all'asse Z; **c** invece si trova lungo la bisettrice del piano YZ e come tale non è certamente parallelo al vettore **(a^b).** Cosicché **(a^b)^c**≠0 e quindi ovviamente **a^(b^c)** ≠ **(a^b)^c**. Analogo risultato si sarebbe ottenuto svolgendo esplicitamente il calcolo dei prodotti vettoriali ad esempio col metodo del determinante simbolico.

ESERCIZIO

Si faccia uso della definizione di prodotto scalare **a•b**=abcosϕ e della relazione **a•b**=$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$ per calcolare l'angolo tra i due vettori seguenti:

a=3**i**+3**j**-3**k**

b=2**i**+**j**+3**k**

Per utilizzare la definizione di prodotto scalare occorre calcolare i moduli dei due vettori:

$a=(9+9+9)^{1/2} = 3\ (3)^{1/2}$

$b=(4+1+9)^{1/2} = (14)^{1/2}$

mentre il calcolo della somma dei prodotti delle componenti omologhe fornisce:

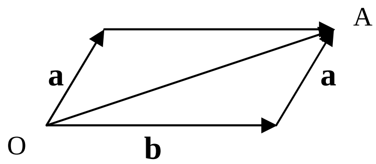
a*b=3*2 + 3*1 – 3*3=0

da cui segue che

$3\,(3)^{1/2}\,(14)^{1/2}\cos\phi = 0$ cioè

$\cos\phi = 0$ $\phi=\pi/2$

ESERCIZIO
Due vettori **a** e **b** si sommano; dimostrare che il modulo del vettore risultante non può essere maggiore di **a+b** né minore di |**a-b**|.



La lunghezza del segmento OA è il modulo del vettore **a+b**. Ma i tre vettori **a**, **b** ed **OA** formano un triangolo e, in ogni triangolo, ciascun lato ha ampiezza minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. Cosicché dalla geometria segue l'asserto:

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}| < |\mathbf{a}+\mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

ESERCIZIO
Quali sono le proprietà di due vettori **a** e **b** tali che:

1) **a + b = c** ed a + b = c

2) **a + b = a - b**

3) **a + b =c** ed $a^2 + b^2 = c^2$

1) i vettori **a** e **b** hanno stessa direzione e stesso verso
2) il vettore **b** è nullo
3) i vettori **a** e **b** sono ortogonali.

ESERCIZIO

Il momento di una forza **F**, applicata nel punto P, calcolato rispetto ad un polo O, è dato da:

$$\mathbf{M_o} = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}.$$

Se il polo O coincide con l'origine di un riferimento cartesiano ortogonale, e il punto P ha coordinate (3, -1, 0), sapendo che è **F=**(2,1,0), trovare il vettore $\mathbf{M_o}$.

Per la definizione stessa di momento di una forza rispetto ad un polo tale vettore sarà ortogonale al piano individuato da **OP** ed **F** (che è il piano XY) e sarà rivolto verso l'alto. In formule si ha che:

$$\vec{M}o = OP \text{ x } \vec{F} = \vec{r} \text{ x } \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\,\hat{k}$$

e dunque $\mathbf{M_o} = 5\mathbf{k}$.

Gli angoli θ misurati con la consueta regola (>0 in senso antiorario e <0 in senso orario) non costituiscono dei vettori perché la somma di angoli finiti non è commutativa come si evince dalla figura (da scannerizzare).

OSSERVAZIONI

Non ha senso iterare il prodotto scalare e pertanto non ha senso parlare di proprietà associativa riferita al prodotto scalare. Infatti la scrittura **a*b*c** è priva di significato poiché **a*b** dà come risultato uno scalare ma il prodotto scalare è definito tra due vettori e ciò dunque ci impedisce di andare avanti: ciò che otterremmo infatti sarebbe il prodotto semplice tra lo scalare **a*b** ed il vettore **c** ma non il prodotto scalare **a*b*c**.

Dati due vettori **a** e **b** che formano rispettivamente un angolo ϕ_a e ϕ_b col semiasse positivo delle ascisse, l'angolo tra essi sarà ovviamente dato dalla differenza ϕ_a-ϕ_b e pertanto il prodotto scalare tra i due vettori sarà dato per definizione dal prodotto dei rispettivi moduli per il coseno dell'angolo compreso cioè

$$a*b = \mathbf{ab\ \cos(\phi_a-\phi_b) = ab\cos\phi_a\ \cos\phi_b + ab\sin\phi_a\ \sin\phi_b = a\cos\phi_a\ b\cos\phi_b + a\sin\phi_a\ b\sin\phi_b = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}$$

col che si è dimostrato (per semplicità con vettori nel piano) che, dalla definizione di prodotto scalare si ricava la relazione **a*b** = $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

PERCORSI AZZERAMENTO 2009-2010

TEST DI FISICA

1) Indicare quale delle seguenti relazioni tra le grandezze fisiche è CORRETTA:
A) (lavoro)/(spostamento) = (forza)
B) (massa) · (velocità) = (forza)
C) (massa) · (spostamento) = (forza)
D) (potenza) · (velocità) = (forza)
E) (massa) · (velocità) = forza

2) Un punto si muove alla velocità v = 100 m/s. A quale valore in km/h tale velocità corrisponde?
A) 0,36 km/h
B) 36.000 km/h
C) 360 km/h
D) 10 km/h
E) 98 km/h

3) L'equazione $s = \frac{1}{2} a t^2$ permette di calcolare lo spazio percorso da un corpo. Essa è valida:
A) per qualunque moto accelerato
B) per qualunque moto uniformemente accelerato
C) per un moto uniformemente accelerato a velocità iniziale nulla
D) per qualunque moto

4) Una forza costante è applicata a corpi di massa diversa. L'accelerazione impressa ad ognuno di essi è:
A) proporzionale alla massa
B) inversamente proporzionale alla massa
C) proporzionale al quadrato della massa
D) non dipende dalla massa
E) non dipende mai dalla forza applicata

5) Un corpo è soggetto contemporaneamente a due forze di 10 Newton. A quale forza risultante è soggetto il corpo?
A) 20 N
B) 10 $\sqrt{2}$ N
C) 0 N
D) I dati non sono sufficienti per consentire una risposta
E) Bisogna tener conto del 3° principio della dinamica (azione e reazione)

6) Un wattora (1W x 1h) è equivalente a:
A) 3.600 watt
B) 1.000 calorie
C) 1.000 watt
D) 3.600.000 joule
E) 3.600 joule

7) Due automobili di uguale massa viaggiano a velocità rispettivamente uguali a 150 e 100 km/h. In quale rapporto stanno le loro energie cinetiche?
A) $(150/100)^2$
B) $(150/100)^{1/2}$
C) (150/100)
D) (150/100)/150
E) Non si può calcolare perché non è specificata la massa

8) Un corpo ha una massa di 80 g e un volume di 100 cm^3. Ponendolo in acqua, cosa succede?
A) Galleggia sulla superficie
B) Affonda, ma non è possibile prevedere a quale profondità
C) Resta sospeso in prossimità della superficie
D) Resta sospeso in un punto intermedio tra superficie e fondo
E) Va ad adagiarsi sul fondo

9) Nella dinamica dei fluidi ideali:
A) la densità è nulla
B) si trascurano le forze di superficie
C) si trascurano le forze di volume
D) la viscosità è supposta nulla
E) la portata è costante

10) La pressione P esercitata da una colonna di liquido di densità ρ avente altezza h e sezione di area A, è data da:
A) $P = \rho gh$
B) $P = \rho gh/A$ dove A è l'area della selezione della colonna
C) $P = \rho g$
D) per rispondere occorre conoscere la massa della colonna di liquido
E) per rispondere occorre conoscere la temperatura del liquido

11) Come varia la velocità di un liquido che scorre, con flusso stazionario, in un condotto a sezione variabile? La velocità:
A) aumenta dove la sezione si restringe
B) aumenta dove la sezione si allarga
C) resta immutata in quanto si è fatta l'ipotesi che il flusso sia stazionario
D) diminuisce sempre per effetto della viscosità
E) aumenta sempre con il diminuire dell'altezza

12) Con una trasformazione isobara un gas ideale, inizialmente a 27 °C, è portato a 327 °C; se il volume iniziale era di 2 litri, quello finale è:
A) 4 dm^3
B) 6 litri
C) 4 m^3
D) 2,1 litri
E) 300 litri

13) In quale processo di propagazione del calore vi è trasferimento di materia?
A) Conduzione
B) Convezione
C) Irraggiamento
D) Evaporazione
E) In nessuno dei casi precedenti

14) Se un gas perfetto subisce una compressione adiabatica allora la sua temperatura:
A) aumenta
B) sale o scende a seconda del tipo di gas
C) rimane costante
D) sale o scende a seconda del grado di isolamento termico raggiunto
E) diminuisce

15) Il ciclo di Carnot è costituito da una serie di trasformazioni di stato che, fissate le temperature dei serbatoi di calore:
A) possono essere compiute soltanto da un gas perfetto
B) consentono di calcolare con una formula molto semplice il rendimento di macchine ideali
C) possono essere percorse soltanto in verso orario
D) portano il sistema da una condizione di minore ad una di maggiore entropia
E) possono essere effettuate solo cambiando la pressione, ma non il volume

16) Fra le seguenti, tre sono grandezze fisiche fondamentali nel Sistema Internazionale:
A) massa, energia, potenziale
B) tempo, temperatura, potenziale
C) lunghezza, forza, intensità luminosa
D) lunghezza, tempo, energia
E) lunghezza, tempo, corrente elettrica

17) Una slitta di massa m si sta muovendo con accelerazione di 12 m/s^2, sotto l'azione di una forza costante F. Un corpo di massa 2 m viene posto sulla slitta mentre la forza F rimane costante. Che cosa succede all'accelerazione della slitta?
A) diventa la metà
B) raddoppia
C) triplica
D) diventa un terzo

18) Un carrello inizialmente fermo, raggiunge la velocità di 6 m/s in 2s. Se la forza applicata è di 60N, quale è la massa del carrello?
A) 10 kg
B) 20 kg
C) 5 kg
D) 120 kg

19) Un corpo di massa m al variare del tempo si sposta senza attrito a velocità costante v. La risultante F delle forze applicate sarà:
A) F = mv
B) F = 0
C) F = m/v
D) F = mg
E) non si può rispondere perché non è dato l'intervallo di tempo

20) Un corpo di massa 100 grammi si trova a 1 metro dal suolo. La sua energia potenziale vale:
A) 0.98 joule
B) 980 watt
C) 0.098 joule
D) 9800 joule
E) 9800 calorie

21) L'energia potenziale di una palla lanciata verso l'alto è massima:
A) nel punto più alto raggiunto
B) al momento del lancio
C) durante la salita
D) nell'istante dell'impatto con il suolo
E) a metà altezza

22) Calcolare il lavoro che bisogna compiere per far variare la velocità di un corpo di massa m = 2 kg da 2 m/s a 8 m/s.
A) 60 J
B) 24 J
C) 48 N
D) 20 J
E) 12 J

23) Due corpi aventi lo stesso volume e la stessa densità hanno:
A) la stessa superficie
B) la stessa capacità termica
C) la stessa carica elettrica
D) la stessa massa
E) lo stesso numero di atomi

24) Un recipiente ha lo stesso peso sia quando contiene 20 litri di acqua sia quando contiene 15.8 litri di glicerina. Sapendo che la densità dell'acqua è 1000 kg/m^3, qual'é la densità della glicerina?
A) 316 kg/m^3
B) 1265 kg/m^3
C) 2532 kg/m^3
D) 31600 kg/m^3
E) 397 kg/L

25) In un liquido in condizioni statiche la pressione idrostatica dipende da varie grandezze. Tuttavia essa NON dipende:
A) dal peso specifico del liquido
B) dalla densità del liquido
C) dalla profondità alla quale si misura la pressione
D) dalla accelerazione di gravità
E) dalla viscosità del liquido

26) La portata Q=S*V di un condotto:
A) è il volume di liquido che attraversa una sezione nell'unità di tempo
B) è la massa di liquido che esce dal condotto
C) si misura in litri · minuti
D) dipende dalla quota del condotto
E) si misura in litri metri

27) Mescolando 1 kg d'acqua avente una temperatura di 80 °C con una eguale massa d'acqua a 20 °C, quale temperatura assumerà la miscela (supponendo che il calore specifico non dipenda dalla temperatura stessa)?
A) Bisogna conoscere il valore di tale calore specifico
B) 26,67 °C
C) 60 °C
D) 50 °C
E) 40 °C

28) Un gas si espande a pressione costante. Durante l'espansione è sempre vero che il sistema:
A) compie un lavoro
B) riceve lavoro
C) cede calore
D) si raffredda
E) fa una trasformazione isocora

29) In un gas ideale il prodotto della pressione per il volume:
A) è proporzionale alla temperatura assoluta
B) è indipendente dalla densità
C) raddoppia passando da 10 a 20 °C
D) è sempre costante
E) dipende dalla costante R dei gas perfetti, variabile da gas a gas.

30) Si vuole realizzare una trasformazione ciclica il cui unico risultato sia quello di convertire in lavoro il calore sottratto ad un'unica sorgente termica. È possibile?
A) È senz'altro possibile
B) È possibile solo nel caso in cui la trasformazione è una trasformazione isotermica
C) È possibile solo nel caso in cui la trasformazione è una trasformazione isocora
D) È possibile solo nel caso in cui la trasformazione è una trasformazione adiabatica
E) È impossibile

31) Un'accelerazione dal punto di vista dimensionale, è:
A) $(\text{lunghezza})^{-2}/\text{tempo}$
B) lunghezza/tempo
C) $(\text{lunghezza})^{2}/\text{tempo}$
D) $\text{lunghezza}/(\text{tempo})^{2}$
E) $(\text{lunghezza})^{2}/(\text{tempo})^{2}$

32) Due grandezze fisiche si dicono omogenee se:
A) si possono moltiplicare tra loro
B) si possono dividere tra loro
C) si possono sommare tra loro
D) sono divisibili per uno stesso numero
E) nessuna delle risposte è corretta

33) Un punto si muove alla velocità v = 72 km/h. A quale valore in m/s tale velocità corrisponde?
A) 72 m/s
B) 720 m/s
C) 20 m/s
D) 259.2 m/s
E) 7.2 m/s

34) Una pietra è lanciata verso l'alto; nel punto più alto raggiunto dalla pietra:
A) la velocità è massima
B) la velocità è minima
C) l'accelerazione è massima
D) l'accelerazione è nulla
E) l'accelerazione di gravità è nulla

35) L'energia cinetica si conserva:
A) in ogni urto elastico
B) in ogni processo d'urto centrale
C) in ogni urto totalmente anelastico
D) se i corpi si muovono di moto accelerato sopra una retta
E) se una parte dell'energia si trasforma in calore

36) Un corpo di massa m, posto nel vuoto ad un'altezza h dal suolo, inizia a cadere e raggiunge il suolo con una energia cinetica pari a:
A) E = mgh
B) E = mh/2
C) manca il dato velocità per la valutazione dell'energia cinetica
D) E = 0
E) $E = 1/2\ mgh^2$

39) Un corpo ha una massa di 20 grammi e un volume di 50 cm^3. Ponendolo in acqua, che cosa succede?

A) Galleggia
B) Affonda
C) Resta sospeso in prossimità della superficie
D) Viene sommerso in profondità
E) Rimane sempre adagiato sul fondo

40) Due corpi solidi omogenei di uguale densità ma volume diverso sono totalmente immersi nell'acqua:

A) il corpo con volume maggiore riceve una maggior spinta di Archimede.
B) ricevono entrambi la stessa spinta di Archimede.
C) la spinta di Archimede che ricevono dipende dalla forma dei due oggetti.
D) il corpo che pesa di più riceve una spinta di Archimede minore.
E) dipende dall'attrito dell'acqua con la superficie del corpo.

41) La costante R dell'equazione di stato dei gas (PV = nRT) è:

A) un numero adimensionale
B) un numero variabile con T
C) un numero che dipende dal tipo di unità di misura prescelto
D) un numero variabile con P, T e V
E) un numero intero

42) Il rendimento di una macchina termica si esprime:

A) in calorie
B) con un numero puro
C) in chilowattora
D) in joule
E) in erg

43) La temperatura assoluta si misura:

A) in gradi Celsius
B) in Kelvin
C) in gradi Fahrenheit
D) in chilocalorie
E) in joule

44) A pressione costante la relazione esistente tra il volume e la temperatura in un gas è:

A) $V \cdot T$ = costante
B) V = T
C) V = R/T
D) V = costante T
E) V = costante (sempre)

45) Comprimendo reversibilmente e adiabaticamente un gas perfetto la sua temperatura:
A) rimane costante, perché non c'è scambio di calore con l'esterno
B) aumenta, perché aumenta la sua energia interna
C) diminuisce, perché diminuisce il volume
D) rimane costante perché in un gas perfetto l'energia potenziale è nulla
E) cresce in modo inversamente proporzionale alla pressione

46). La forza che si esercita tra due cariche elettriche statiche:
A) si misura in volt
B) si misura in newton
C) si misura in farad/metro
D) è inversamente proporzionale alla distanza tra le due cariche
E) si misura in watt

47. Il campo elettrostatico prodotto da una carica puntiforme positiva nello spazio vuoto:
A) ha le linee di forza di forma circolare col centro nella carica
B) è uniforme
C) ha un'intensità direttamente proporzionale al quadrato della distanza dalla carica
D) ha un'intensità inversamente proporzionale alla distanza dalla carica
E) ha le linee di forza rettilinee uscenti dalla carica

48. Il potenziale elettrico è:
A) la forza con cui viene attratta una carica
B) il lavoro fatto da una carica in un'unità di tempo
C) una grandezza fisica che si misura in joule/coulomb
D) nullo per carica ferma
E) il lavoro fatto da una carica sull'unità di superficie

49. Una lampada ad incandescenza da 120 watt ed uno scaldabagno elettrico da 1.500 watt sono alimentati dalla stessa tensione. Segue che:
A) le resistenze elettriche dei due apparecchi sono le stesse
B) è più elevata la resistenza dello scaldabagno elettrico
C) è più elevata la resistenza della lampada ad incandescenza
D) non si può rispondere senza conoscere le correnti
E) tutte le precedenti risposte sono errate

50. Attraverso un filo di rame lungo 10 m passa una corrente di 8 A. Dimezzando la lunghezza del filo e mantenendo costante la differenza di potenziale ai suoi capi, l'intensità di corrente:
A) diventa di 16 A
B) diventa di 2 A
C) rimane invariata
D) diventa di 4 A
E) diventa di 64 A

51. Due resistenze di 10 ohm ciascuna, sono collegate in parallelo e la differenza di potenziale ai loro capi è di 200 V. La resistenza equivalente vale:
A) 0,2 ohm
B) 2 ohm
C) 20 ohm
D) 2000 ohm
E) 5 ohm

52. Alcuni conduttori sono collegati in parallelo. La corrente che attraversa ciascuno di essi è:
A) la stessa
B) proporzionale alla rispettiva resistenza
C) inversamente proporzionale alla rispettiva resistenza
D) inversamente proporzionale al quadrato della rispettiva resistenza
E) direttamente proporzionale al quadrato della rispettiva resistenza

53. Il campo elettrico è dimensionalmente:
A) un lavoro per unità di carica elettrica
B) una forza per unità di carica elettrica
C) una forza per unità di intensità di corrente
D) una forza funzione della posizione
E) una carica diviso una forza

54. Due cariche elettriche uguali, poste a una distanza R, si respingono con una forza F. Se R raddoppia, F:
A) raddoppia
B) si dimezza
C) diventa 1/4 del valore iniziale
D) diventa 4 volte il valore iniziale
E) diventa 1/8 del valore iniziale

55. Il potenziale elettrico:
A) è la forza coulombiana in un punto
B) si misura in ampere
C) ha le dimensioni di un lavoro diviso per una carica
D) è il lavoro fatto per spostare una carica
E) è la potenza elettrica di un generatore

56. Una corrente elettrica I passa, per un tempo t, in un conduttore ai cui estremi esiste una differenza di potenziale V. L'energia dissipata è:
A) VIt
B) VI
C) V/I
D) It
E) VIt^2

57. Tra due morsetti A e B di un circuito elettrico sono collegate IN PARALLELO tre resistenze: due da 200 ohm e una da 100 ohm. La resistenza equivalente tra A e B è:
A) uguale alla media delle resistenze
B) uguale alla resistenza più piccola
C) minore di ciascuna delle resistenze
D) uguale alle resistenze più numerose
E) uguale alla somma delle resistenze.

58. La resistenza di un conduttore ohmico di forma cilindrica è direttamente proporzionale:
A) alla sezione
B) al quadrato della sezione
C) al cubo della sezione
D) alla lunghezza
E) al quadrato della lunghezza

59) Tre lampade sono collegate in parallelo a una d.d.p. costante. Se il filamento di una di esse si interrompe:
A) si spengono anche le altre
B) aumenta la luminosità delle altre
C) diminuisce l'intensità di corrente nelle altre
D) l'intensità di corrente nelle altre rimane invariata
E) aumenta il consumo di energia delle altre

60. Se r è la distanza tra due cariche puntiformi la forza elettrostatica è proporzionale a:
A) r
B) r^2
C) r^{-2}
D) r^{-1}
E) r^{-3}

61. Se le intensità di due cariche vengono raddoppiate e contemporaneamente si raddoppia anche la loro distanza, la forza di attrazione delle cariche:
A) si raddoppia
B) si dimezza
C) si quadruplica
D) diventa otto volte maggiore
E) rimane inalterata

62. Una carica di + 8 Coulomb si muove da un punto a potenziale di 6 V ad un punto a potenziale di 2 V. Il lavoro fatto dalla forza del campo è pari a:
A) +32 J
B) +6 J
C) - 2 J
D) - 32 J
E) 16 J

63. Indicando con R la resistenza elettrica di un conduttore, con V la differenza di potenziale applicata agli estremi e con I la corrente che lo percorre, la potenza dissipata per "effetto Joule" è:
A) $P = V \cdot R$
B) $P = V \cdot R \cdot I$
C) $P = V \cdot I$
D) $P = I \cdot R^2$
E) $P = V \cdot R^2$

64. All'aumentare della lunghezza, la resistenza elettrica di un conduttore di sezione costante:
A) aumenta
B) diminuisce
C) non varia
D) aumenta o diminuisce a seconda della resistività del materiale
E) aumenta nel rame e diminuisce nell'alluminio

65. Il valore della resistenza da aggiungere in parallelo alla resistenza di carico R di un circuito elettrico per ridurne il valore a 1/3 è:
A) R
B) $2 \cdot R$
C) R/2
D) R/4
E) $3 \cdot R$

66. Alcune lampadine sono collegate in serie. Cosa succede quando il filamento di una di esse si interrompe?
A) L'intensità di corrente aumenta
B) Le lampadine si spengono tutte
C) Si spengono solo le due lampadine vicino alla lampadina rotta
D) La potenza dissipata aumenta
E) La potenza dissipata diminuisce (di una lampada su tutte)

67. Se la distanza tra due cariche elettriche di segno opposto viene raddoppiata, la forza di attrazione:
A) aumenta di un fattore 2
B) aumenta di un fattore 4
C) non varia
D) diminuisce di un fattore 2
E) diminuisce di un fattore 4

68. Se una carica elettrica positiva q è immersa in un campo elettrico E, subisce una forza:
A) $F = q/E$
B) $F = 0$
C) $F = q^2E$
D) $F = qE$
E) E/q

69. L'energia potenziale di una carica elettrica q coulomb, posta in una posizione dove il potenziale vale V volt è:
A) 0
B) qV
C) q/V
D) V
E) V/q

70. Una batteria ideale fornisce una differenza di potenziale di 6 V. Se tra i terminali viene collegata una resistenza di 24 ohm, quale sarà la potenza dissipata per effetto Joule?
A) 3 W
B) 0,3 W
C) 9 W
D) 1,5 W
E) 84 W

71. La resistenza equivalente a due resistenze in parallelo è:
A) uguale alla più grande delle due
B) uguale alla più piccola delle due
C) maggiore della più grande
D) minore della più piccola
E) uguale alla media tra i valori delle due resistenze

72. Ai capi di una resistenza di 50 ohm si applica una differenza di potenziale di 100 V; l'intensità della corrente prodotta è:
A) 500 A
B) 2 A
C) 0,5 A
D) 150 A
E) 50 A

73. Indicando con Q la carica elettrica che attraversa nel tempo t la sezione di area A di un conduttore, si definisce intensità di corrente I:
A) $I = Q \cdot A/t$
B) $I = Q \cdot t$
C) $I = Q/t$
D) $I = Q \cdot A \cdot t$
E) $I = Q/(A \cdot t)$

74. La relazione fra la capacità C di un condensatore, la carica Q presente sulle armature e la d.d.p. V tra queste, è:
A) $C = Q/V$
B) $C = Q \cdot V$
C) $C = V/Q$
D) $C = 1/2 \cdot Q \cdot V^2$
E) $C = Q^2/V^2$

75. Una spira di filo conduttore immersa in un campo magnetico è percorsa da corrente quando:
A) il flusso del campo magnetico attraverso la spira varia
B) la resistenza del conduttore è molto piccola
C) l'intensità del campo magnetico è molto grande
D) la spira è schermata da influssi esterni
E) la spira è riscaldata

76. Il modulo del campo di induzione magnetica B generato da un filo rettilineo indefinito ha una dipendenza dalla distanza D dal filo proporzionale a:
A) D^{-1}
B) D
C) D^2
D) $D^{1/2}$
E) Log D

77. Quattro condensatori uguali ciascuno di tre nanofarad collegati in parallelo costituiscono un unico condensatore di capacità:
A) 12 microfarad
B) 12 farad
C) 7 farad
D) 7 nanofarad
E) 12.000 picofarad

78. Due conduttori rettilinei paralleli percorsi da corrente continua nello stesso verso:
A) si attraggono
B) si respingono
C) non esercitano alcuna forza reciproca
D) interagiscono con forze che dipendono dal materiale dei conduttori
E) esercitano tra loro forze parallele ai conduttori

79. In generale una calamita non subisce alcuna azione:
A) dal campo magnetico terrestre
B) dalla presenza di un'altra calamita
C) dalla presenza di un filo percorso da corrente
D) dalla presenza di cariche elettriche fisse
E) all'interno di un solenoide percorso da corrente

80. Due condensatori, rispettivamente di capacità C_1 e C_2, collegati in parallelo, equivalgono ad un unico condensatore di capacità C tale che:
A) $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$
B) $C = C_1 \cdot C_2$
C) $C = C_1 - C_2$
D) $C = C_1 + C_2$
E) nessuna delle risposte precedenti

81. Per generare un campo magnetico:
A) si possono usare solo magneti permanenti
B) è necessario sfruttare il campo magnetico terrestre
C) si possono usare opportune distribuzioni statiche di cariche positive e negative
D) si può usare un filo percorso da corrente
E) si deve arrivare oltre alla temperatura di transizione

82. La forza che si esercita tra due fili conduttori rettilinei e paralleli percorsi da correnti uguali ed equiverse è:
A) ortogonale ai fili e attrattiva
B) ortogonale ai fili e repulsiva
C) nulla
D) parallela ai fili
E) dipende dal diametro dei fili

83. La capacità di un condensatore elettrico si può misurare in:
A) Farad
B) Coulomb Volt
C) Millivolt
D) Ampere · Volt
E) Joule

85. Una particella carica ferma in un campo magnetico uniforme e stazionario, e libera di muoversi:
A) inizia a muoversi con un moto circolare
B) inizia a muoversi con un moto parabolico
C) inizia a muoversi con un moto rettilineo
D) non inizia a muoversi
E) inizia a muoversi di moto ellittico

CHIMICA

A cura di
Prof. Andrea Donato, prof. ssa Maria Grazia Musolino

Si dichiara che il presente elaborato è originale e che è stato predisposto in funzione dell'attività formativa relativa ai Percorsi di potenziamento delle competenze di base anno 2009.

1.- Introduzione

La chimica è la scienza che studia la **struttura**, la **composizione** e le **proprietà** della materia e le sue **trasformazioni**. Le trasformazioni che interessano la chimica sono in modo particolare quelle che avvengono nel corso delle reazioni chimiche, in cui si assiste a variazioni nella composizione e nella struttura della materia.

STRUTTURA DELLA MATERIA

Come vedremo meglio in seguito, la materia è costituita da atomi. I concetti di atomo, molecola e composto sono più o meno familiari, ma lo studente di chimica deve imparare a definirli in maniera precisa e univoca. Una porzione omogenea di materia formata da atomi della stessa specie costituisce una sostanza elementare, o **elemento**. Una porzione omogenea di materia formata da due o più specie di atomi costituisce invece un **composto**.
L'**atomo** è la più piccola parte di un elemento che entra come parte intera e indivisibile nella costituzione della materia.
La **molecola** è la più piccola parte di un elemento o di un composto che può esistere in natura. Le molecole possono essere costituite da un solo atomo, da due o più atomi uguali, o da atomi diversi in rapporti ben definiti (composti).
Lo **ione** è un atomo o un gruppo di atomi che porta cariche positive o negative.

Stati fisici della materia

La materia si può presentare in diversi stati fisici, o stati di aggregazione. Essi sono il risultato di due proprietà caratteristiche delle particelle che costituiscono la materia:

a) il movimento (moto rettilineo uniforme), detto anche moto di traslazione, espressione dell'energia cinetica di cui le particelle sono dotate;

b) le forze di reciproca interazione, che conferiscono alle particelle una energia potenziale, da mettere in relazione con la natura stessa delle particelle e con la loro distanza. Tali forze possono essere di natura elettrostatica, legami a ponte di idrogeno, forze di Van der Waals, etc.

L'energia cinetica è in relazione diretta con la temperatura; le forze di attrazione, oltre a dipendere da diversi parametri (struttura, composizione, etc), sono spesso correlate con la pressione. A seconda del tipo di energia che prevale (cinetica o potenziale), la materia si può presentare in tre diversi stati di aggregazione: gassoso, liquido, solido. Modificando opportunamente i parametri che agiscono su un sistema, si può avere la trasformazione fisica del suo stato di aggregazione (passaggio di stato).

- **GAS**: Allo stato gassoso la materia è presente in forma di **molecole**. L'energia cinetica è tale da vincere le forze di interazione intermolecolari e quindi esse sono in grado di muoversi liberamente in tutto lo spazio a disposizione. Un gas non ha né forma, né volume propri.
- **LIQUIDO**: Allo stato liquido le interazioni fra le particelle (**molecole** o **ioni**) hanno un energia tale da limitare i movimenti traslazionali. Restano tuttavia possibili i moti rotazionali. Un liquido ha un volume proprio, ma non una forma propria e infatti tende ad assumere la forma del recipiente che lo contiene. I liquidi sono virtualmente incomprimibili.
- **SOLIDO**: Allo stato solido le interazioni sono piuttosto forti, tanto che i moti traslazionali e rotazionali sono impediti. Le particelle (**molecole**, **ioni** o **atomi**) occupano posizioni fisse nello spazio (es. reticolo cristallino) e gli unici movimenti consentiti sono piccole oscillazioni (vibrazioni) intorno a queste posizioni. I solidi hanno sia un volume che una forma definiti.

Le definizioni appena date offrono anche l'opportunità di ampliare il nostro glossario chimico. Un termine di uso frequente, specialmente in termodinamica, è quello di **sistema**. Si definisce così una porzione delimitata dell'universo, alla quale ci riferiamo per le nostre osservazioni o le nostre considerazioni. Un sistema può avere dimensioni assai variabili, dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande. Tutto ciò che circonda il sistema si definisce **ambiente**: sistema e ambiente costituiscono l'universo. È dall'ambiente che si effettuano osservazioni sul sistema. Ogni sistema può essere costituito da una o più fasi. Si definisce **fase** un sistema uniforme, sia chimicamente che fisicamente. Una fase è distinta da limiti netti, ben definiti. Quando un sistema è costituito da un'unica fase, si dice **omogeneo**; quando è costituito da due o più fasi, si definisce **eterogeneo**.

Le leggi fondamentali della chimica

Sono quelle leggi empiriche che governano i rapporti ponderali delle sostanze che reagiscono.

1. Legge di LAVOISIER o della conservazione della massa. (fine'700): "In una reazione chimica la massa dei reagenti è uguale a quella dei prodotti." In altre parole la materia non può essere né creata né distrutta. Ad esempio, 2 g di H reagiscono sempre con 16 g di O per formare 18 g di H_2O.
2. Legge di PROUST o delle proporzioni definite. (1799): "Il rapporto fra le quantità in peso di due elementi che reagiscono per formare un composto è costante." Si può anche dire che un dato composto ha una composizione ben precisa ed invariabile. Ad esempio, per formare il cloruro di sodio (NaCl), 23 g di Na reagiscono con 35.5 g di Cl, 4.6 g di Na reagiscono con 7.1 g di Cl, 11.5 g di Na reagiscono con 17.75 g di Cl etc., ma il rapporto in peso Na/Cl è sempre 1/1.54.
3. Legge di DALTON o delle proporzioni multiple. (1803): "Quando due elementi si combinano tra loro per formare composti diversi, le quantità di uno di essi che si combinano con una quantità fissa dell'altro, stanno fra loro in rapporti semplici, esprimibili mediante numeri interi, generalmente piccoli."

Ad esempio:

composto	g di N	g di O	g di O/g di O in N_2O
N_2O	28	16	1
N_2O_2	28	32	2
N_2O_3	28	48	3
N_2O_4	28	64	4
N_2O_5	28	80	5

LA TEORIA ATOMICA

Le stesse leggi fondamentali della chimica fornirono le basi per la formulazione della teoria atomica della materia. Fu proprio Dalton, intorno al 1805, che per spiegare le sue osservazioni, avanzò l'ipotesi che le sostanze fossero costituite da piccole particelle indivisibili, dette "atomi" (dal greco "*a-tomae"*, termine introdotto per la prima volta da Democrito nel IV secolo a.C). Dalton suggerì che gli atomi di un dato elemento fossero tutti uguali, mentre elementi diversi sarebbero costituiti da atomi diversi, indicando peraltro nella diversità delle masse, l'essenza della diversità degli atomi. Tuttavia Dalton non si pose il problema dei **motivi** di tale diversità : in sostanza accettava in maniera acritica il concetto di atomo, così come era stato proposto originariamente dagli antichi filosofi greci. Per tutto il 19 secolo, l'atomo fu considerato come la particella ultima (oggi diremmo

particella elementare o fondamentale), priva quindi di una struttura interna, della quale i chimici non si erano neppure posti il problema. Oggi sappiamo che la diversità degli atomi deriva dal fatto di essere composti di particelle elementari (**elettroni**, **protoni** e **neutroni**) aggregate in proporzioni diverse. Dal punto di vista chimico, i componenti fondamentali dell'atomo "restano" elettrone, protone e neutrone. In un estremo tentativo riduzionista, adeguato tuttavia per le nostre finalità, potremmo addirittura concepire l'atomo come costituito da un dato numero di elettroni (particelle cariche negativamente) e da un nucleo contenente un numero di cariche positive pari a quello degli elettroni.
Peraltro, possiamo osservare che, sotto l'aspetto chimico, conserva validità anche il concetto di indivisibilità dell'atomo. Anche se può perdere o acquistare elettroni attraverso reazioni chimiche, o unirsi con altri atomi per formare composti, un atomo resta sempre quell'atomo.

Numero atomico, numero di massa e massa degli atomi

L'identità di un atomo è determinata dal numero di protoni contenuti nel nucleo. Questo numero viene definito numero atomico (Z) e si indica ponendo il numero in basso a sinistra del simbolo dell'elemento. Ad esempio $_{6}C$, indica che il carbonio ha numero atomico 6 e contiene quindi 6 protoni nel nucleo. In modo analogo, con un numero posto in alto a sinistra del simbolo elementare si indica il numero di massa (A), che è dato dalla somma del numero di protoni (Z) e di neutroni (che generalmente si indica con N) contenuti nel nucleo. Il simbolo $^{12}_{6}C$ indica il cosiddetto nuclide del carbonio. Gli elementi che hanno lo stesso numero atomico, ma diverso numero di massa si dicono **isotopi**. Un particolare isotopo di un elemento si indica utilizzando solo il numero di massa, dando per sottinteso il numero atomico. Così, ^{14}C indica l'isotopo del carbonio che contiene 8 neutroni, anziché i 6 dell'isotopo più stabile, che è appunto il ^{12}C. Negli elementi con numero atomico piccolo ($Z<20$), il numero dei neutroni nell'isotopo più stabile è generalmente uguale a quello dei protoni o vi differisce per una unità in eccesso. Al crescere di Z, il rapporto fra N e Z aumenta progressivamente. È probabile che i neutroni abbiano un ruolo importante nel dare stabilità ai nuclei. I nuclei degli elementi più pesanti sono in genere instabili e tendono a decadere emettendo particelle per raggiungere una condizione di maggior stabilità nucleare.
Il numero di massa non deve essere in alcun modo confuso con la massa effettiva di un atomo. Per indicare le masse degli atomi (o dei composti chimici) sarebbe oltremodo scomodo usare l'unità di misura ordinaria della massa, il kg o il g. Per questo motivo i chimici hanno ideato una unità di misura relativa, prendendo come riferimento la massa del nuclide ^{12}C, al quale si assegna il valore 12. L'unita di massa atomica relativa, abbreviazione u.m.a. (o meglio *u*), è quindi 1/12 (un dodicesimo) della massa del ^{12}C.

Il legame chimico

Lo studio del legame chimico e la sua natura è di fondamentale importanza per comprendere la differenza sostanziale fra composti ionici e covalenti. Da tale comprensione dipende anche la capacità di prevedere le proprietà chimico-fisiche dei composti e il loro comportamento chimico (reattività).
L'obiettivo principale da raggiungere è quello di acquisire la capacità di rappresentare i composti attraverso le loro **formule di struttura**. È importante tener presente fin dall'inizio che alla base della formazione del legame chimico vi è il tentativo di raggiungere una condizione di stabilità: un composto o una molecola sono sempre più stabili degli atomi isolati che li costituiscono. Il concetto di stabilità, in chimica come in fisica, è sempre associato ad un *minor contenuto di energia potenziale*. Sappiamo già che fra gli elementi vi è un gruppo (lo zero) i cui componenti, i gas nobili, sono caratterizzati da una configurazione elettronica eccezionalmente stabile: questa configurazione elettronica, in cui il guscio esterno contiene otto elettroni, è definita **ottetto.** È proprio la ricerca del raggiungimento di tale configurazione elettronica che spinge gli atomi a formare il legame chimico.

Il legame ionico

Il concetto di legame ionico è *storicamente antecedente* a quello di legame covalente e addirittura rappresentò quella visione "univoca" del legame che dominò tutta la chimica dei primi anni del novecento.

"Il legame ionico è il legame che si instaura tra ioni di carica opposta per effetto della forza di attrazione colombiana". È il legame tipico che si stabilisce tra elementi con basso potenziale di ionizzazione ed elementi con alta affinità elettronica. Ricordando quello è l'andamento di queste due proprietà periodiche, possiamo aspettarci che i più semplici composti **ionici binari** siano costituiti quasi esclusivamente dagli elementi dei primi tre gruppi e dei metalli di transizione (che posseggono basso potenziale di ionizzazione) e da elementi del 6° e 7° gruppo (caratterizzati da alta affinità elettronica).

• Cationi più comuni dei composti ionici (I, II e III gruppo):
Li^+, Na^+. K^+, Mg^{2+}, Ca^{2+}, Ba^{2+}, Al^{3+}
• Metalli di transizione: Cr^{3+}, Mn^{2+}, Fe^{2+}, Fe^{3+}, Cu^+, Cu^{2+}, Zn^{2+}, Ag^+, Cd^{2+}
• Anioni VII e Vi gruppo: F^-, Cl^-, Br^-, I^-, S^{2-}, Se^{2-}

Molto spesso il legame ionico può interessare **ioni molecolari**, ovvero gruppi di atomi legati covalentemente che acquistando o perdendo ioni H^+ formano specie ioniche. Come vedremo, si tratta frequentemente di anioni derivati dalla dissociazione di ossiacidi: CO_3^{2-}, NO_2^-, NO_3^-, SO_3^{2-}, SO_4^{2-}, etc. Nella scrittura della formula bruta di un sale ionico, si deve fare molta attenzione al *bilancio delle cariche totali*: ovvero si deve prendere un determinato numero di ioni positivi e un determinato numero di ioni negativi, in modo che la somma algebrica delle cariche risulti **zero**.

Ad esempio: $NaCl$, K_2S, $CaCl_2$, $BaSO_4$, Al_2S_3, $MgBr_2$, Na_2CO_3, $Zn(NO_3)_2$

Si tenga presente inoltre che quando si scrivono queste formule, **non si rappresentano molecole**, ma si indica semplicemente *il rapporto numerico fra gli ioni di segno opposto* nel solido cristallino. Ad esempio, $NaCl$ indica che nel cloruro di sodio il rapporto fra Na^+ e Cl^- è 1:1; $MgBr_2$ indica che nel bromuro di magnesio il rapporto fra Mg^{2+} e Br^- è 1:2.

Allo stato solido, i composti ionici hanno una struttura ordinata ben definita, il **reticolo cristallino**, tale che ogni catione è circondato da un certo numero di anioni e viceversa. Questo numero si definisce **numero di coordinazione** (*n*) dello ione. La configurazione spaziale di un composto ionico (ad esempio, un sale) dipende dal raggio ionico degli ioni che lo costituiscono. Più esattamente, dipende dal rapporto fra il raggio dello ione positivo e il raggio ione dello ione negativo (r^+/r^-). Il reticolo cristallino presenta una geometria **cubica** se questo rapporto è alto; **ottaedrica** se è intermedio; **tetraedrica** se è basso.

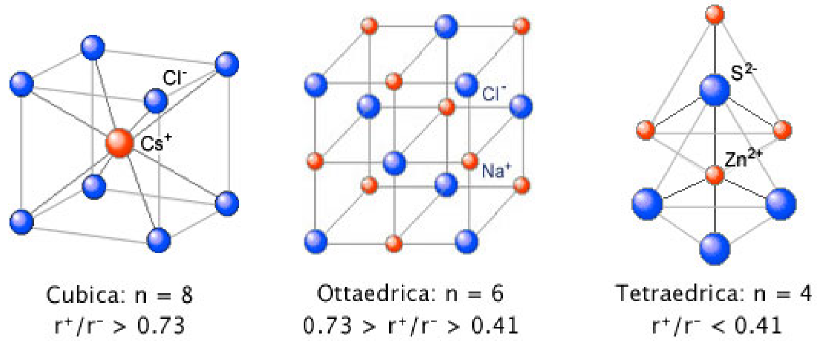


Fig.1 – Esempi di configurazione spaziale di composti ionici

Reticoli cristallini ionici

Le linee che uniscono gli ioni non rappresentano legami, ma servono a caratterizzare la cella cristallina. Per comprendere l'organizzazione del solido cristallino, si deve immaginare che la cella elementare si ripeta per tutta l'estensione del cristallo e che ciascuno ione sia circondato da un numero di "controioni" pari a *n*. La forza di attrazione fra coppie di ioni isolati è espressa dalla legge di Coulomb:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon\, r^2}$$

in cui, q_1 e q_2 sono le cariche degli ioni, r è la distanza fra di loro ed ε è una costante, detta *costante dielettrica del mezzo*. Nel vuoto, il termine $4\pi\varepsilon$ vale circa 10^{-10} C^2 N^{-1} m^{-2} (C, Coulomb; N, Newton).

Per ciascuna coppia ionica presente nel reticolo cristallino, questa formula deve essere modificata per tener conto del fatto che ciascuno ione risente delle interazioni di tutti gli ioni che lo circondano. L'energia associata a tutte queste interazioni prende il nome di **energia reticolare**. I composti ionici sono solubili in solventi polari, questo è comprensibile considerando che la forza del legame ionico è comunque inversamente proporzionale alla costante dielettrica del solvente. Alla luce di queste considerazioni si spiega quindi perché l'acqua (che ha un valore di ε 80 volte maggiore di quello del vuoto) sia un ottimo solvente per le sostanze ioniche. Ponendo un sale in acqua, infatti, le interazioni elettrostatiche interioniche si riducono di quasi due ordini di grandezza, cosicché gli ioni non possono più rimanere aggregati in forma cristallina: in soluzione acquosa il cristallo ionico viene "distrutto" e gli ioni si trovano *"solvatati"* dalle molecole del solvente. Immaginando la formazione di un composto ionico, ad esempio cloruro di sodio, a partire dagli atomi Na e Cl, potremmo schematizzare l'evento supponendo che l'atomo con affinità elettronica più elevata (Cl) "sottragga" un elettrone all'atomo con basso potenziale di ionizzazione (Na).

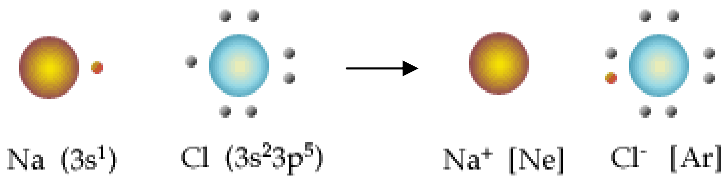


Fig.2 – Formazione del cloruro di sodio

In questo modo entrambi gli atomi - in forma ionica- raggiungerebbero la configurazione elettronica ad **ottetto** stabile del gas nobile ad essi più vicino: *neon* per il sodio e *argo* per il cloro.

Il legame covalente

Quando si incontrano due atomi uguali o con potenziale di ionizzazione e affinità elettronica simili, non vi può essere ovviamente un trasferimento completo di elettroni dall'uno all'altro, come avviene nella formazione del legame ionico. In questo caso i due atomi possono tuttavia raggiungere la configurazione elettronica stabile del gas nobile, *mettendo in compartecipazione i propri elettroni spaiati*. Questo è quanto avviene nella formazione del legame covalente. *Il legame covalente è formato da una coppia di elettroni condivisa fra due atomi.*
È attraverso questo tipo di legame che si formano le **molecole**, aggregati atomici stabili, capaci di esistere come unità indipendenti in tutti gli stati di aggregazione della materia.
Prendiamo la molecola più semplice, quella dell'idrogeno (H_2) e usiamola come modello per descrivere la formazione del legame covalente (vedi figura). L'idrogeno (configurazione elettronica 1s) è costituito da un protone e un unico elettrone. Quando due atomi di idrogeno si avvicinano l'uno all'altro, le forze di attrazione che il nucleo di un atomo esercita sulla nuvola elettronica

dell'altro, vanno via via aumentando man mano che diminuisce la distanza fra di loro. Giunti ad una distanza di 0.74 Å (distanza o *lunghezza di legame*), l'attrazione è massima, mentre la repulsione fra i due nuclei è ancora relativamente debole.

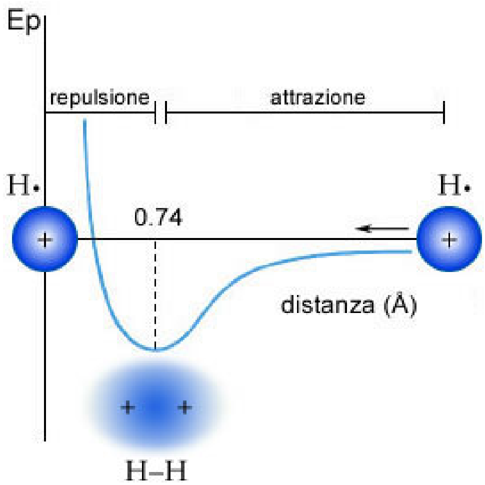


Fig. 3 *- Energia potenziale (Ep) in funzione della distanza internucleare nella formazione della molecola di idrogeno.*

In queste condizioni, le nuvole elettroniche dei due atomi si fondono in modo che i due orbitali atomici danno origine ad un nuovo orbitale – che possiamo definire **orbitale di legame** –, che ospita entrambi gli elettroni e occupa una regione dello spazio comprendente i due nuclei. Al di sotto di questa distanza, la repulsione internucleare prenderebbe a crescere rapidamente, per cui i due nuclei tendono a rimanere alla distanza di minima energia potenziale (*distanza di equilibrio)*. Il legame covalente si rappresenta con un trattino (notazione di Lewis), che indica una coppia di elettroni. La molecola di idrogeno è quindi rappresentata come H–H.

Ogni trattino che compare in una formula di struttura rappresenta una coppia di elettroni: questa può essere una **coppia di legame**, quando è in compartecipazione tra due atomi, o un **doppietto solitario**. Quello che avviene nella formazione della molecola di idrogeno può essere esteso, con le opportune precisazioni, a molte altre molecole biatomiche. Gli alogeni ad esempio, che hanno configurazione elettronica esterna ns^2 np^5, possono mettere in compartecipazione l'elettrone spaiato di uno degli orbitali *p* e raggiungere la configurazione elettronica stabile del gas nobile successivo.

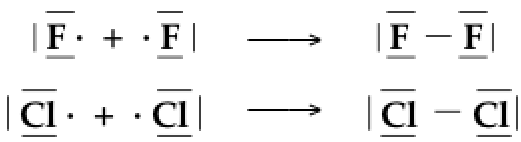
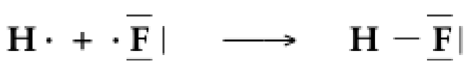
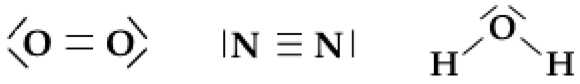


Fig. 4 - Formazione del legame covalente nelle molecole del fluoro e del cloro.

Nella molecola F_2, entrambi gli atomi raggiungono la configurazione elettronica del neon; nella molecola Cl_2, entrambi gli atomi raggiungono la configurazione elettronica dell'argo.Il legame covalente non è esclusivo di molecole formate da atomi uguali (omonucleari). Idrogeno e fluoro, ad esempio, possono mettere in compartecipazione una coppia di elettroni (1s dell'H e 2p del F), raggiungendo entrambi la configurazione elettronica stabile dell'He e del Ne, rispettivamente.



Inoltre, come vedremo più avanti, la configurazione elettronica ad ottetto può essere raggiunta attraverso la formazione di *legami multipli* (doppi o tripli) o di più di un legame semplice.



La polarità del legame

Quando ad essere legati sono due atomi uguali, la coppia di elettroni risulta equamente condivisa fra di essi: si parla in questo caso di legame *covalente puro* o **omopolare**. Quando invece il legame si stabilisce fra due atomi diversi, la coppia elettronica risulta spostata (mediamente nel tempo) verso quello che ha maggior affinità elettronica e maggior potenziale di ionizzazione. In tal caso il legame è definito **eteropolare** (Fig.5). È possibile avere tutta una gamma di polarità del legame covalente, che va dal legame omopolare fino al massimo grado del legame ionico (CsF). Il legame ionico in effetti può essere considerato un caso limite del legame eteropolare, che si realizza quando la coppia di elettroni è trasferita completamente ad uno dei due atomi.

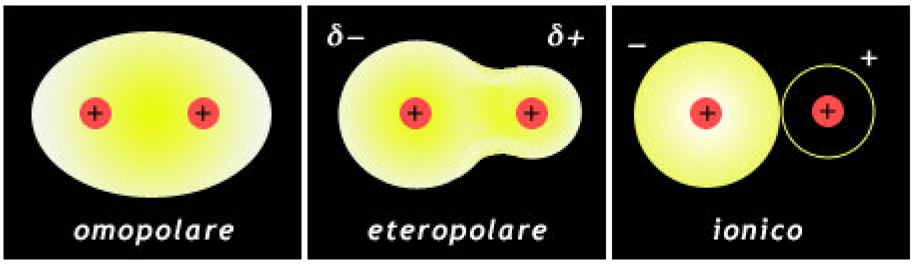


Fig. 5 : *Rappresentazione schematica del legame omopolare, eteropolare e ionico*

Nel caso del legame eteropolare, una molecola biatomica si comporta come un *dipolo elettrico*, ***in quanto il baricentro delle cariche negative non coincide con quello delle cariche positive. La molecola è polare e presenta un'estremità con parziale carica negativa e un'estremità con parziale carica positiva, come è indicato nella Fig. 4.4, al centro. Per dipolo si intende un sistema costituito da due cariche elettriche dello stesso valore assoluto e di segno contrario, poste a distanza*** r ***fra di loro. Ogni dipolo è caratterizzato da un*** *momento dipolare*, ***definito da*** $\mu = qr$, ***dove* q *indica l'intensità della carica. Il momento dipolare è una grandezza vettoriale, il cui verso è per convenzione dalla carica negativa a quella positiva. Nel caso delle molecole poliatomiche, per valutarne la polarità occorre considerare la* geometria molecolare.** La molecola della CO_2, nonostante i legami C-O siano polari, ha $\mu = 0$ D (non è quindi polare). Poiché la sua struttura è lineare, i due dipoli presenti nella molecola, avendo verso opposto, si annullano a vicenda. Nell'acqua il momento dipolare risultante è invece diverso da zero, poiché la molecola ha struttura "angolare".

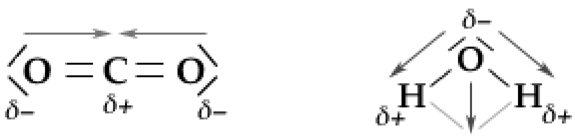


Fig. 6 - Il momento di dipolo: Confronto fra le strutture dell'anidride carbonica e dell'acqua.

L'Elettronegatività

Il grado di polarità del legame è correlato ad una proprietà degli atomi, detta **elettronegatività**; più esattamente, esso è in relazione con la differenza di elettronegatività dei due atomi impegnati nel legame. L'elettronegatività può essere definita concettualmente come ***"la tendenza di un atomo ad attrarre verso di sé gli elettroni di legame"***. Secondo Mulliken, l'elettronegatività può essere espressa come *la semisomma (la media) del Potenziale di ionizzazione e dell'Affinità elettronica*. Purtroppo la formula di Mulliken consente di calcolare l'elettronegatività solo per quegli elementi di cui sia nota l'affinità elettronica e che, come abbiamo osservato, sono piuttosto pochi, a causa della difficoltà della misura sperimentale di questa grandezza. Linus Pauling propose per il calcolo dell'elettronegatività un metodo di più ampia applicabilità, basato sul confronto delle energie di legame in molecole biatomiche. Nella Tabella 2 sono riportati i valori di elettronegatività di alcuni elementi, calcolati secondo questo procedimento.

Tabella 2 – Elettronegatività degli elementi.

Elettronegatività di alcuni elementi, secondo Pauling							
H 2.1							
Li 1.0	Be 1.5		B 2.0	C 2.5	N 3.0	O 3.5	F 4.0
Na 0.9	Mg 1.2		Al 1.5	Si 1.8	P 2.1	S 2.5	Cl 3.0
K 0.8	Ca 1.0				As 2.0	Se 2.4	Br 2.8
						Te 2.1	I 2.5

L'elettronegatività è una proprietà periodica degli elementi, proporzionale all'A.E. e al P.I. Come si può osservare dalla tabella 2, essa tende a ***diminuire*** *all'interno di un gruppo procedendo dall'alto in basso e lungo un periodo procedendo da destra a sinistra.*

L'elettronegatività è un concetto estremamente importante in chimica, in quanto permette di fare diverse considerazioni sulla struttura, le proprietà e la reattività delle molecole. Dalla differenza di elettronegatività, ΔEN, dei due atomi impegnati in un legame, è possibile risalire alla *% di carattere ionico del legame*.

Le molecole omonucleari

Fluoro, ossigeno e azoto possono formare molecole biatomiche omonucleari, mettendo in compartecipazione due, quattro, sei elettroni, rispettivamente.

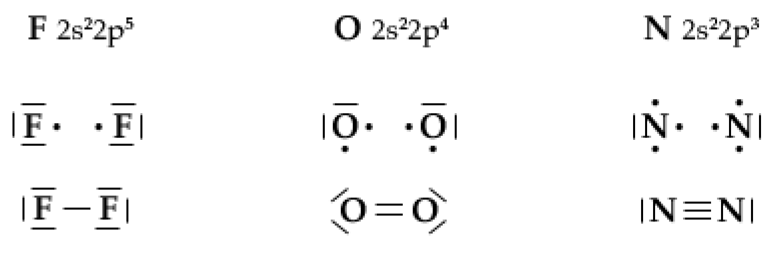


Fig.7 - Esempi di molecole omonucleari

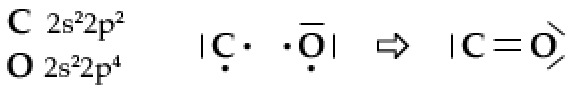
Come si può capire, una volta scritto il simbolo elettronico a partire dalla configurazione elettronica esterna, si tratta di unire con un trattino una coppia di elettroni spaiati tra due elementi: una nel caso del fluoro, due nel caso dell'ossigeno e tre nel caso dell'azoto. Si deve fare in modo, finché sia possibile e consentito, di **completare gli ottetti** di tutti gli atomi. Ciascun atomo nella figura è circondato da quattro coppie (un ottetto) di elettroni. Si definisce **covalenza** il numero di legami covalenti che un elemento può formare. In pratica, è il numero di *coppie elettroniche che un atomo condivide* con altri atomi: possiamo così osservare che in queste strutture il fluoro ha covalenza uno, l'ossigeno due e l'azoto tre. L'**ordine di legame** è invece il numero di coppie elettroniche condivise in un legame. È 1 nella molecola di F_2, 2 in quella di O_2 e 3 in quella di N_2. Covalenza e ordine di legame sono due concetti diversi, ben distinti, che *possono* coincidere solo nel caso di molecole biatomiche.

Le Molecole eteronucleari

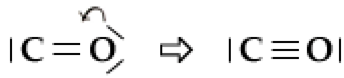
F, O, N, C possono formare molecole biatomiche eteronucleari. Il fluoro ad esempio può combinarsi con l'idrogeno per formare acido fluoridrico:

Ovviamente, l'H non può avere un ottetto elettronico; per questo elemento, la configurazione elettronica stabile è quella isoelettronica con l'He, quindi con **due** elettroni nell'unico livello disponibile (1s).

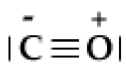
L'ossigeno può combinarsi con il carbonio per formare il monossido di carbonio:



In questa formula, costruita mettendo in compartecipazione gli elettroni spaiati, il carbonio **non completa l'ottetto**. Tuttavia, se utilizziamo uno dei due doppietti liberi dell'ossigeno per *formare* un ulteriore legame, otteniamo una struttura in cui **entrambi gli atomi hanno un proprio ottetto completo**:



Questa struttura, in cui carbonio e ossigeno mostrano un'insolita tricovalenza (come vedremo il carbonio è praticamente sempre tetracovalente, mentre l'ossigeno quasi sempre dicovalente), è in accordo con i dati sperimentali relativi alla lunghezza del legame carbonio–ossigeno, molto prossima a quella prevista per un triplo legame. In questo modo, tuttavia, è *"come se"* il C avesse 5 elettroni di sua pertinenza (anziché i 4 dello stato fondamentale) e lo stesso l'O (anziché i 6 dello stato fondamentale). Quindi, una rappresentazione più coerente della formula è quella in cui ai due atomi sono attribuite **cariche formali**. La polarità misurata sperimentalmente corrisponde effettivamente alla formula a cariche separate.



Il legame sigma

Alcune delle più comuni sovrapposizioni degli O.A. che portano alla formazione di un legame, sono riportate nella figura che segue. In tutti questi casi, l'orbitale di legame risultante viene definito *orbitale σ* e il legame si indica come **legame σ** (è anche comunemente detto *legame semplice* o *legame singolo*).

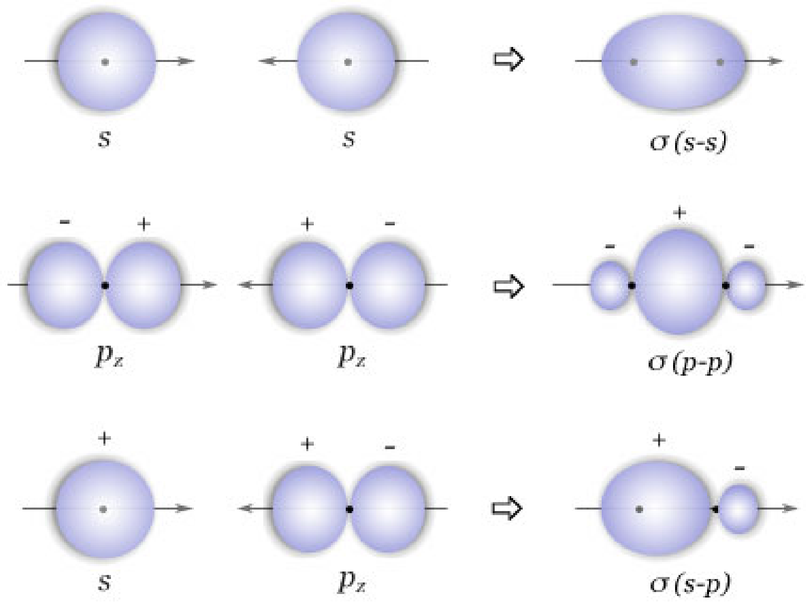


Fig. 8 - Orbitali di legame che derivano dalla combinazione lineare degli orbitali atomici *s-s*, *p-p* e *s-p*. Risultati simili si ottengono quando ad essere coinvolti nel legame sono *orbitali ibridi*, anziché orbitali *p* puri. I segni + e - indicano il segno della funzione d'onda e non cariche elettriche.

Come si può vedere, il legame σ è un legame *direzionale*: gli orbitali atomici si sovrappongono lungo l'asse che unisce i due nuclei (convenzionalmente, l'asse *z*). Di conseguenza, esso è *simmetrico* per rotazione intorno all'asse di legame e permette la *massima sovrapposizione* degli O.A. coinvolti.

Il legame pigreco

Prendiamo come modello per questa descrizione la molecola di N_2, di cui è stata già rappresentata la formula di struttura secondo la teoria di Lewis. Sappiamo che la configurazione elettronica esterna dell'azoto è $2s^2 2p^3$. Trascuriamo gli elettroni 2s (che ritroveremo nella molecola come coppia solitaria) e concentriamo la nostra attenzione sugli orbitali 2p, ciascuno dei quali contiene un elettrone spaiato. Ricordiamo che i tre O.A. 2p sono ortogonali fra loro, diretti lungo gli assi x, y, z, come mostrato nella figura 11 e indichiamo come *asse z*, l'asse che unisce i due nuclei della molecola.

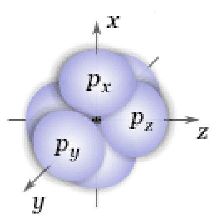


Fig. 9 – Gli orbitali p

Detto questo, è facile comprendere che l'unica sovrapposizione che possa dare origine ad un orbitale di legame σ è quella degli O.A. $2p_z$, che sono diretti l'uno verso l'altro (vedi § precedente). Anche i due orbitali 2px (e i 2py) possono comunque sovrapporsi, sia pur con modalità diversa, quando vengono a trovarsi in posizione **parallela** fra loro. Attraverso questa sovrapposizione *laterale* ha origine un nuovo orbitale di legame, detto **orbitale π**, diverso dall'orbitale σ (vedi figura 12).

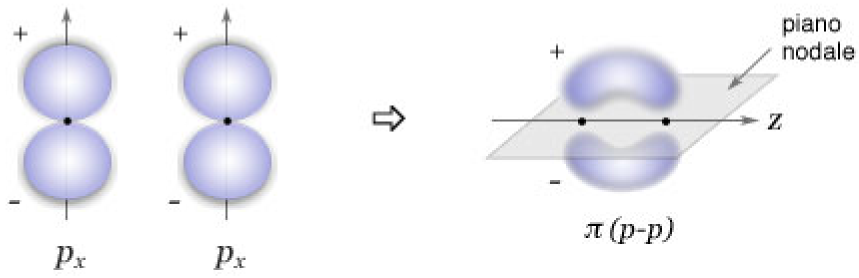


Fig. 10 - Formazione di un legame π per sovrapposizione laterale di due O.A. $2p_x$

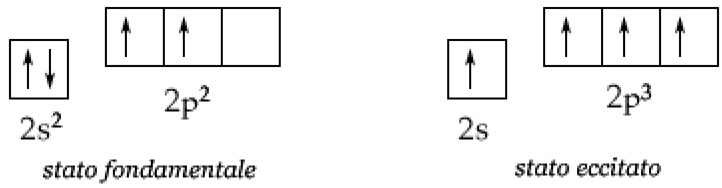
Il legame π è *antisimmetrico* rispetto all'asse di legame: la funzione d'onda di questo orbitale ha segno opposto sopra e sotto l'asse internucleare. Inoltre, poiché gli O.A. *p* hanno un *nodo* sul nucleo, l'orbitale π ha un **piano nodale** (probabilità zero di trovare la coppia elettronica) che contiene l'asse di legame. La sovrapposizione laterale di due orbitali *p* non è così "estesa" come quella che si realizza negli orbitali σ: pertanto, l'energia di legame π è minore di quella di un legame σ. Analoghe considerazioni si possono fare riguardo agli O.A. 2py, che potranno anch'essi sovrapporsi lateralmente per formare un orbitale di legame π. In conclusione, il triplo legame (come quello presente nella molecola di N_2) è costituito da un legame semplice σ e due legami π. I due legami π hanno identica forma ed energia e sono orientati perpendicolarmente l'uno rispetto all'altro. I legami π non esistono mai da soli, ma sono sempre associati ad un legame σ. Un doppio legame è costituito pertanto da un legame σ e un legame π. Nel paragrafo precedente abbiamo indicato tre possibili combinazioni che portano alla formazione di un orbitale di legame σ. Generalizzando, possiamo osservare che il legame σ si può formare per sovrapposizione di qualsiasi tipo di O.A. – anche orbitali *d* o, come vedremo, orbitali *ibridi* –, a condizione che *la direzione di sovrapposizione coincida con l'asse di simmetria dell'orbitale*. Per quanto riguarda invece il legame π, è importante ribadire la necessità della condizione di *parallelismo* fra gli orbitali *p*, affinché la loro sovrapposizione laterale porti alla formazione di un orbitale di legame π. Tutto ciò implica che **attorno al doppio legame non vi possa essere libera rotazione**.

Gli Orbitali ibridi

Per descrivere la struttura e la geometria delle molecole poliatomiche, ci serviremo di due principi fondamentali, strettamente correlati: il fenomeno dell'**ibridazione** e l'effetto di *repulsione delle coppie elettroniche di valenza* (**VSEPR**, Valence Shell Electron Pair Repulsion). Come vedremo, è proprio questo il fattore determinante nella geometria molecolare, dato che i doppietti elettronici tendono ad arrangiarsi in modo da ***minimizzare le loro reciproche repulsioni***. Per meglio comprendere il fenomeno dell'ibridazione, è conveniente ipotizzare che per formare i legami gli elementi tendano a **disaccoppiare** gli elettroni, quando possibile, in orbitali liberi a contenuto energetico superiore. Nonostante questo processo richieda una spesa di energia, esso è termodinamicamente vantaggioso poiché consente la formazione di un numero maggiore di legami, dando così origine ad un "sistema" a più basso contenuto di energia e di conseguenza più stabile (nella formazione del legame chimico si libera infatti energia). Per gli elementi del 2° periodo, il numero massimo di legami che un elemento può formare è **quattro** (*regola dell'ottetto*). A partire dagli elementi del 3° periodo, la possibilità di disaccoppiare gli elettroni è ancora più ampia poiché, a differenza degli elementi del 2° periodo, essi "dispongono" di orbitali *d* da utilizzare per accogliere gli elettroni disaccoppiati. In questo modo, questi elementi possono formare un numero di legami anche *superiore a quattro* (**espansione dell'ottetto**). Il fenomeno dell'ibridazione può essere introdotto in maniera semplice ed efficace prendendo a modello l'atomo di carbonio. Tale base di partenza ci servirà sia come introduzione ai composti della chimica organica – la chimica del carbonio –, sia per discutere l'ibridazione nelle altre molecole.

Ibridazione sp^3

Considerando la configurazione elettronica esterna del carbonio ($2s^2 2p^2$), dovremmo aspettarci che esso fosse dicovalente, avendo solo due elettroni spaiati negli orbitali *2p* per formare legami. In realtà, salvo rarissime eccezioni (ad esempio CO), **il carbonio forma sempre quattro legami**. Se supponiamo che uno dei due elettroni 2s sia promosso (eccitazione) in un orbitale *2p* vuoto, otteniamo una configurazione elettronica esterna $2s\ 2p^3$, con quattro elettroni spaiati, tale da giustificarne la tetracovalenza.



Questo processo richiede ovviamente una spesa di energia (circa 96 kcal/mole) –gli orbitali *p* si trovano ad un livello energetico superiore rispetto agli *s*–, ma è termodinamicamente vantaggioso poiché in questo modo si possono formare quattro legami, anziché due soltanto. L'energia spesa per la promozione di un elettrone è infatti ampiamente compensata dalla liberazione di energia conseguente alla formazione di due ulteriori legami (circa 200 kcal/mole nel caso di due legami C-H). Inoltre, tutto ciò consente al carbonio di raggiungere una configurazione ad ottetto. Sebbene l'ipotesi dell'eccitazione dell'atomo di carbonio ne giustifichi la tetravalenza, essa non è *ancora* sufficiente a spiegare l'osservazione sperimentale che i quattro legami del carbonio in composti come gli alcani (gli idrocarburi saturi, di cui il metano, CH_4, è il primo termine) **siano tutti equivalenti**. Con la *semplice* promozione di un elettrone dall'orbitale 2s al 2p vuoto, ci si aspetterebbe che uno dei legami del carbonio avesse caratteristiche diverse da quelle degli altri tre. Nel caso di quattro legami con altrettanti atomi di idrogeno, tre legami C-H (quelli che coinvolgono gli elettroni 2p) dovrebbero trovarsi a 90° tra loro, mentre il quarto legame (quello che coinvolge l'elettrone 2s) si dovrebbe disporre il più lontano possibile dagli altri tre, con un'angolazione di 125° rispetto ad essi. Inoltre, anche la forma e l'energia del quarto legame dovrebbero differire da quelle degli altri. La teoria dell'ibridazione propone un modello in grado di spiegare le osservazioni sperimentali di **perfetta equivalenza** dei quattro legami del carbonio negli alcani. In termini semplicistici, l'ibridazione può essere considerata come una sorta di *rimescolamento* dei quattro orbitali atomici – un *s* e tre *p* puri del carbonio – a formare **quattro nuovi orbitali**, detti *ibridi sp^3*, tutti equivalenti fra loro, ciascuno dei quali assomma per un quarto le caratteristiche dell'orbitale *s* e per tre quarti quelle degli orbitali *p*. La forma di un orbitale ibrido sp^3 è simile a quella di un orbitale *p*, ma le dimensioni dei due "lobi" sono molto diverse Fig.13.

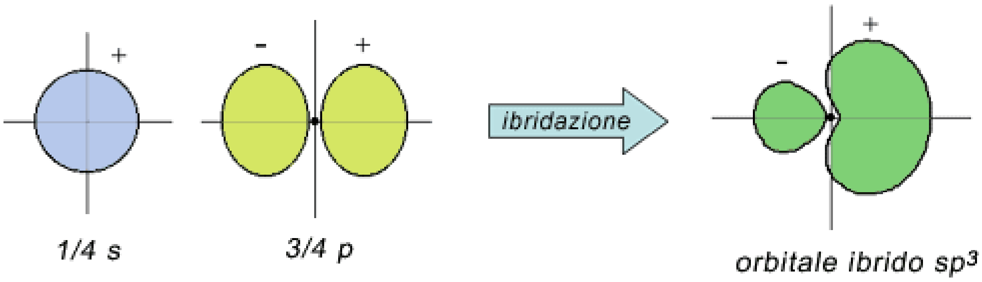


Fig.11 - Formazione di un orbitale ibrido sp^3

Quello rappresentato in figura è il corretto contorno della densità di probabilità elettronica di un orbitale ibrido sp^3 del carbonio. Spesso, quando si rappresentano gli orbitali ibridi si tende ad allungarli per metterne in evidenza la direzionalità lungo un asse. Ricordiamo che i segni + e - indicano il segno delle ψ e non cariche elettriche. Nel rispetto della regola che vuole che gli orbitali si dispongano nello spazio alla massima distanza l'uno dall'altro per minimizzare la repulsione elettrostatica fra le nubi elettroniche, gli orbitali ibridi sp^3 si orientano secondo una geometria **tetraedrica**, ovvero formando fra loro angoli di 109° 28'.

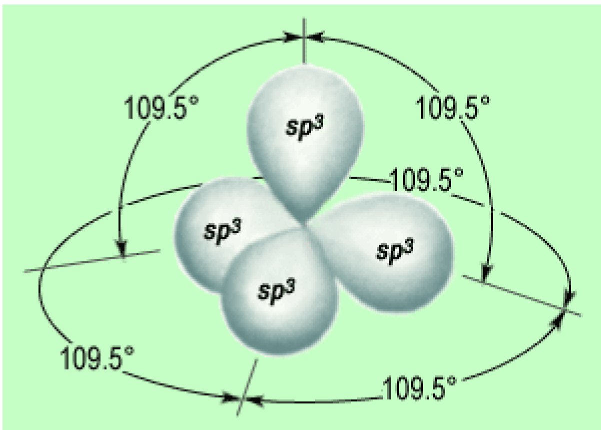


Fig. 12 – Geometria tetraedrica

Ciascuno degli orbitali ibridi può formare un legame σ con un O.A. di un altro atomo, purché i due si trovino diretti lungo l'asse di legame. Nel caso della molecola del metano, il più semplice degli idrocarburi, ciascun orbitale ibrido sp^3 forma un legame σ con l'orbitale 1s di un atomo di idrogeno. In fig.13 è rappresentata la molecola del **metano**: l'atomo di carbonio, al centro, forma quattro legami con altrettanti atomi di idrogeno e ogni angolo di legane H-C-H è circa 109.5°. L'ibridazione sp^3 si può incontrare anche in molecole contenenti solo tre o due legami covalenti, come l'ammoniaca (NH_3) o l'acqua (H_2O) Fig.13. La geometria molecolare dell'ammoniaca si può interpretare adeguatamente alla luce del fenomeno dell'ibridazione, assumendo che anche l'azoto, come il carbonio, generi quattro orbitali ibridi sp^3; ma in questo caso solo tre di essi formano legami σ con atomi di idrogeno, mentre il quarto *resta impegnato da un doppietto elettronico solitario*.

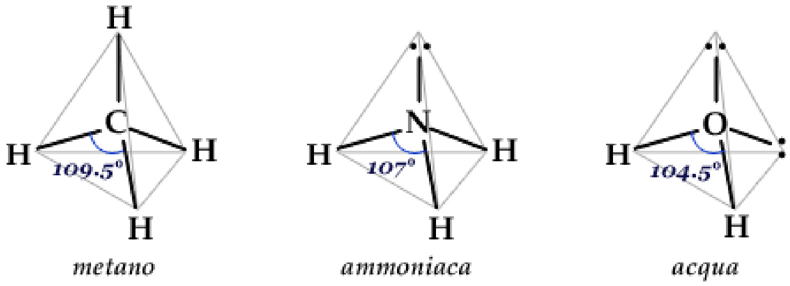


Fig.13 - Geometria molecolare del metano, dell'ammoniaca e dell'acqua

La geometria molecolare è quindi anche in questo caso **tetraedrica**. Il fatto che gli angoli di legame (107°) devino leggermente dal valore dell'angolo tetraedrico ideale, è giustificato dal fatto che nella molecola di NH_3 non vi può essere una perfetta equivalenza dei quattro orbitali ibridi, poiché uno si trova in una condizione diversa dagli altri, non essendo impegnato in un legame. Le stesse argomentazioni usate per l'ammoniaca possono essere applicate alla molecola dell'acqua. I dati sperimentali indicano che l'angolo di legame H-O-H è di circa 105°, anch'esso molto prossimo al valore tetraedrico. Anche l'acqua ha quindi una geometria tetraedrica, che trova giustificazione in una ibridazione sp^3 dell'ossigeno. Due orbitali sp^3 restano stavolta impegnati da altrettanti doppietti solitari, mentre gli altri due formano legami σ con due atomi di idrogeno. La contrazione dell'angolo di legame, più sensibile che in NH_3, si spiega considerando che in questo caso sono due i doppietti solitari in orbitali di non legame.

Ibridazione sp^2 e sp

L'ibridazione sp^3 non è l'unica possibilità del carbonio di ibridare i suoi quattro orbitali atomici; oltre a questa, ve ne sono altri due tipi: sp^2 e sp. Nell'ibridazione *sp^2*, vengono ibridati l'orbitale 2s e solo due orbitali 2p, in modo da formare **tre** orbitali ibridi equivalenti, che si dispongono su un piano con angoli di 120° l'uno dall'altro. La geometria è quindi **planare-triangolare**. L'orbitale 2p che non partecipa all'ibridazione è disposto perpendicolarmente al piano sul quale giacciono gli orbitali ibridi (vedi figura 14).

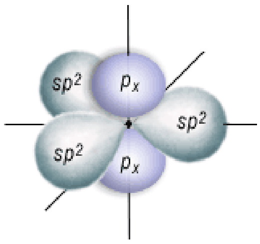


Fig. 14 .- Ibridizzazione sp^2

I tre orbitali ibridi complanari formano legami σ, mentre l'orbitale 2p non ibridato forma un legame π sovrapponendosi lateralmente con un orbitale *p* puro di un altro atomo (vedi la molecola dell'etene nella figura 15). L'ibridazione sp^2 si incontra nei composti contenenti un doppio legame C=C, C=O o C=N. Inoltre considerando che il legame π si può realizzare solo quando gli orbitali *p* coinvolti siano **paralleli** fra loro: solo in questa situazione, infatti, la sovrapposizione fra i due orbitali può essere massima. Ogni deviazione dalla condizione di parallelismo riduce il grado di sovrapposizione, che diventa nulla quando gli orbitali *p* sono ortogonali fra loro. Per questo motivo, lungo l'asse del doppio legame non si può avere libera rotazione, che è invece possibile intorno al legame semplice σ. Il doppio legame rappresenta quindi un **punto di rigidità** della molecola e tutto ciò ha importanti ripercussioni sulla geometria molecolare e sulle proprietà chimico-fisiche stesse dei composti contenenti doppi legami. In particolar modo, questo aspetto dovrà essere tenuto in considerazione sia nel caso dei *composti organici insaturi*, sia in biochimica, per quanto riguarda le caratteristiche del *legame peptidico* delle proteine. Tra gli idrocarburi, il doppio legame carbonio-carbonio caratterizza la classe degli *alcheni*, di cui l'**etene** (CH_2=CH_2) è il primo termine della serie.

Altri esempi di molecole con ibridazione sp^2 sono il *trifluoruro di boro*, il *tricloruro di alluminio*, lo *ione nitrito*, lo *ione nitrato* e lo *ione carbonato*.

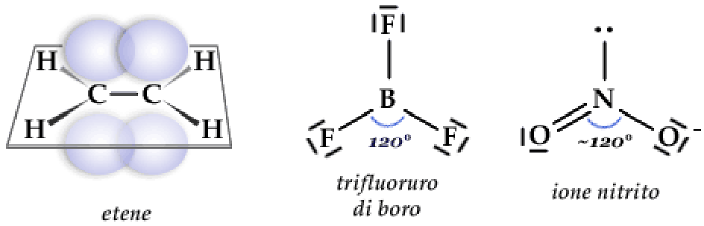


Fig.15 - Geometria triangolare-planare di etene, BF_3 e NO_2^-

Infine, sempre riferendosi al carbonio, nel caso dell'ibridazione *sp*, solo l'orbitale 2s e un orbitale 2p sono ibridati, generando **due** orbitali ibridi equivalenti, orientati in direzioni opposte lungo una linea retta. I due rimanenti orbitali 2p puri si dispongono ortogonalmente all'asse degli ibridi *sp* e ortogonalmente l'uno rispetto all'altro. Due atomi di carbonio con ibridazione *sp* possono legarsi formando un triplo legame. Il legame σ si forma dalla sovrapposizione di due orbitali *sp* diretti lungo l'asse di legame, mentre i due legami π si formano dalla sovrapposizione laterale di coppie di orbitali *p* puri paralleli, come è mostrato nella figura a fianco.
Il triplo legame carbonio-carbonio è il gruppo funzionale caratteristico degli idrocarburi chiamati **alchini** fig.16.

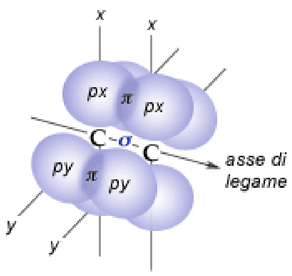


Fig. 16- Ibridizzazione sp

La geometria degli ibridi *sp* è invariabilmente **lineare**, con angoli di legame di 180°. L'ibridazione *sp* si incontra in molte altre molecole che contengono un triplo legame (N_2, HCN), due doppi legami cumulati (CO_2 e *alleni*) o due soli legami semplici, come il dicloruro di berillio ($BeCl_2$), che tuttavia come molecola isolata esiste solo allo stato di vapore. Esistono diversi altri tipi di ibridazione che coinvolgono anche orbitali di tipo *d* e che peraltro sono abbastanza frequenti nei casi in cui si supera la regola dell'ottetto; di questi tuttavia non ci occuperemo, considerate le finalità del nostro corso.

Legami intermolecolari e forze di Van der Waals

L'esistenza di aggregati di materia allo stato solido e liquido ci induce a ritenere che esistano delle forze tra molecole neutre in grado di legarle. Tali forze si producono sia tra molecole polari che tra molecole apolari e sono conosciute come *forze di Van der Waals*.

Interazione dipolo-dipolo

Le molecole polari, o dipoli, esercitano naturalmente una reciproca attrazione elettrostatica. Quando le molecole dipolari si avvicinano tendono infatti a disporsi con i poli di carica opposta l'uno di fronte all'altro, al fine di rendere minima l'energia potenziale del sistema (configurazione di maggior stabilità). In tal modo si verifica un'attrazione elettrostatica tra i poli opposti, detta interazione dipolo-dipolo.
Finchè la temperatura è sufficientemente elevata, l'energia cinetica media dei dipoli è in grado di vincere tali interazioni, mantenendo la sostanza allo stato aeriforme. Ma all'abbassarsi della temperatura, l'energia cinetica media delle molecole finisce per diventare minore delle interazioni dipolari. Tali forze attrattive sono allora in grado di mantenere l'adesione tra le molecole, inizialmente allo stato liquido e, se la temperatura scende ulteriormente, sono in grado alla fine di bloccarle in posizioni di equilibrio all'interno di una struttura reticolare allo stato solido.

Legame idrogeno (ponte idrogeno)

Quando il dipolo è costituito da un atomo di idrogeno legato con legame covalente fortemente polare ad un elemento molto elettronegativo (F, O, N), il legame dipolo-dipolo è particolarmente intenso e viene chiamato legame idrogeno. Il legame idrogeno Fig. 17 viene rappresentato con una breve linea tratteggiata che unisce l'idrogeno di una molecola con l'elemento elettronegativo di un'altra.

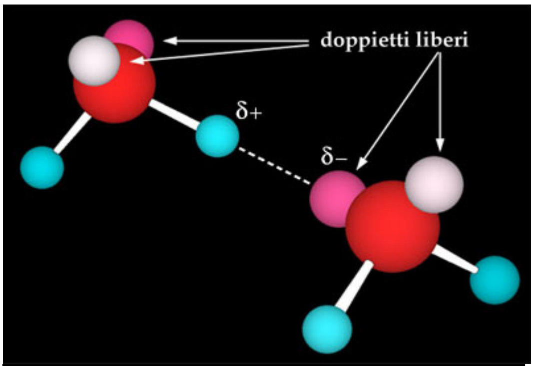


Fig. 17. Legame idrogeno nell'acqua

Tipici composti in grado di dare intensi legami idrogeno sono l'acido fluoridrico HF, l'acqua H_2O e l'ammoniaca NH_3. L'esistenza di tale legame aumenta notevolmente la coesione interna tra le molecole, al punto da riflettersi in modo evidente su alcune proprietà fisiche delle sostanze interessate. Ad esempio tutti i composti le cui molecole sono interessate dai legami idrogeno presentano temperature di ebollizione e capacità termiche particolarmente elevate.
Se infatti forniamo calore ad una sostanza produciamo un aumento della sua energia cinetica media ($\frac{1}{2}mv^2$). E' allora evidente che a parità di calore fornito l'aumento di velocità sarà minore per le molecole più massicce. Poiché inoltre una sostanza è in grado di passare allo stato di vapore quando le sue molecole sono sufficientemente veloci, dobbiamo attenderci che la temperatura di ebollizione di un composto sia tanto maggiore quanto maggiore è il suo peso molecolare.
Tale previsione è verificabile osservando ad esempio i composti dell'idrogeno con gli elementi del VII gruppo A, dove il punto di ebollizione diminuisce costantemente al diminuire del peso molare, con la notevole eccezione dell'acido fluoridrico. In questo caso infatti, nonostante il basso peso molecolare, la temperatura di ebollizione risulta particolarmente elevata in quanto per poter passare allo stato di vapore le molecole devono possedere un'energia cinetica molto elevata per rompere i legami idrogeno che le tengono legate fig. 17.

La presenza del legame idrogeno spiega anche perché il ghiaccio sia meno denso dell'acqua. Infatti quando l'acqua si solidifica i legami idrogeno tendono a bloccare le molecole in una struttura esagonale ordinata che risulta meno densa della struttura disordinata caratteristica dell'acqua liquida fig.18.

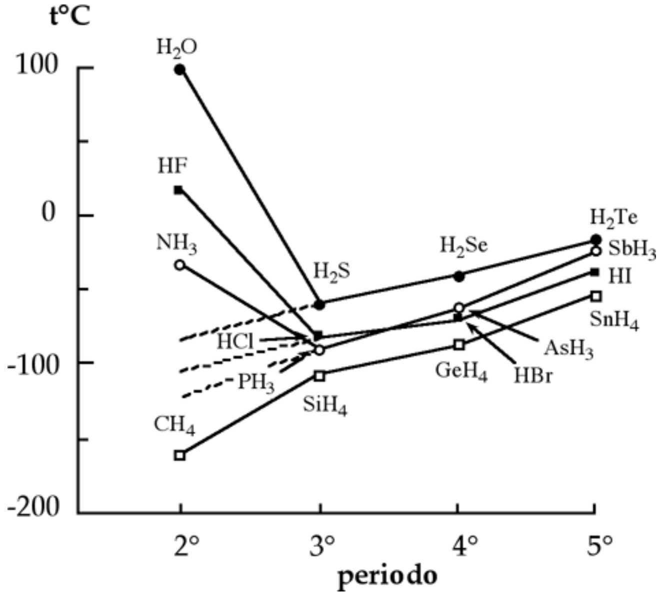


Fig. 18 - Andamento dei punti di ebollizione di alcuni idruri

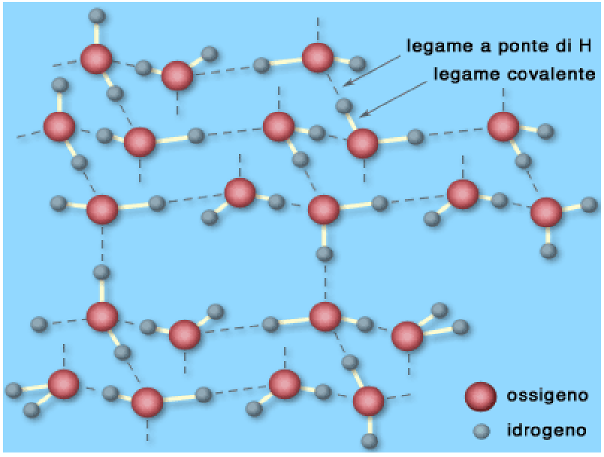


Fig. 19 - Organizzazione delle molecole nell'acqua

Interazioni tra molecole apolari: la forza di London

Se anche le molecole perfettamente apolari come O_2 e Cl_2 sono in grado di liquefare e solidificare a temperature superiori allo zero assoluto, evidentemente devono esistere anche per tali sostanze delle forze intermolecolari, seppur molto deboli, in grado di vincere l'agitazione termica.
Si ritiene che tali forze, dette di London, siano dovute a fluttuazioni temporanee e casuali nella distribuzione di densità degli orbitali. Impercettibili fluttuazioni nella distribuzione delle nuvole elettroniche dovrebbero essere dunque in grado di produrre momentanee polarità anche nelle molecole apolari, capaci di indurre nelle molecole adiacenti polarità di segno contrario, creando in definitiva le condizioni per un'attrazione reciproca.
Naturalmente tali forze sono presenti anche in molecole polari, ma risultano trascurabili rispetto alle interazioni dipolo-dipolo tipiche delle sostanze polari.

Tabella 3 – Influenza dei pesi molecolari sui punti di ebollizione e di fusione degli alogeni allo stato elementare

	F_2	Cl_2	Br_2	I_2
p.m.	**38**	**70,9**	**159,8**	**253,8**
p.e. (°C)	**-188**	**-34**	**59**	**184**
p.f. (°C)	**-220**	**-101**	**-7**	**114**

L'energia di attrazione è proporzionale alle dimensioni della nuvola elettronica ed aumenta quindi con le dimensioni e, in ultima analisi, con il peso molecolare della molecola. È pertanto logico aspettarsi che i punti di ebollizione (e di fusione) aumentino proporzionalmente al peso molecolare del composto.

Tabella 4 – Variazione dei punti di ebollizione e di fusione di alcuni alcani

N. di atomi C	*nome*	*p.e. (°C)*	*p.f. (°C)*
1	**metano**	**-162**	**-183**
2	**etano**	**-89**	**-172**
3	**propano**	**-42**	**-188**
4	**butano**	**-1**	**-135**
5	**pentano**	**36**	**-130**
6	**esano**	**69**	**-95**

L'energia di attrazione è proporzionale alle dimensioni della nuvola elettronica ed aumenta quindi con le dimensioni e, in ultima analisi, con il peso molecolare della molecola. È pertanto logico aspettarsi che i punti di ebollizione (e di fusione) aumentino proporzionalmente al peso molecolare del composto.

Legame metallico

Tranne il gallio (Ga) e il mercurio (Hg) tutti i metalli sono solidi allo stato elementare. Il legame che tiene uniti gli atomi metallici all'interno del solido è detto legame metallico. Tra i modelli più semplici ed intuitivi che descrivono il legame metallico vi è quello di P.Drude (1863-1906), secondo il quale gli atomi metallici perdono facilmente gli elettroni superficiali trasformandosi in ioni positivi. Gli ioni si impacchettano in modo da lasciare il minor spazio vuoto possibile, andando così ad occupare posizioni ben determinate all'interno di ben precise strutture geometriche. Gli elettroni persi non appartengono più ai singoli atomi, ma a tutto il reticolo solido. Essi sono liberi di muoversi (elettroni delocalizzati) tra gli ioni positivi garantendo la neutralità del sistema e agendo da collante per i cationi.

Il modello di Drude è oggi sostituito da un modello quantistico del legame metallico che si deve a F.Bloch, ed e' conosciuto come *modello a bande*. In tale modello l'intero cristallo può essere pensato come un'unica enorme molecola e gli orbitali di ciascun atomo devono perciò essere considerati estesi a tutto il cristallo (orbitali molecolari).

Se ad esempio il cristallo è formato da N atomi di litio, esisteranno N orbitali 1s ed N orbitali 2s estesi a tutto il solido. Tutti gli orbitali molecolari di uno stesso tipo (ad esempio tutti gli N orbitali 2s) presentano energie molto vicine, tanto da poter essere considerati come una banda continua di energia (banda 2s). In altre parole all'interno di ciascuna banda le differenza energetiche tra gli N orbitali molecolari sono così piccole che possiamo considerare la distribuzione energetica come non quantizzata. Le bande sono separate da brevi intervalli energetici, dette *zone proibite*, in cui gli elettroni non possono essere presenti.

Una banda non completamente riempita di elettroni viene detta *banda di conduzione*. In tale banda gli elettroni possono facilmente muoversi attraverso l'intero solido se sottoposti anche a piccoli campi elettrici. Gli elettroni di conduzione che riempiono parzialmente una banda superficiale sono anche responsabili del legame metallico. Il legame metallico risulta tanto più intenso quanto più numerosi sono gli elettroni delocalizzati presenti nella banda di conduzione. I metalli alcalino e alcalino terrosi che presentano rispettivamente 1 e 2 elettroni di conduzione, risultano per questo motivo particolarmente teneri e malleabili. I metalli di transizione che presentano in genere da 3 a 6 elettroni di conduzione, sono più duri e resistenti.
La facilità con cui gli elettroni di conduzione possono muoversi attraverso il reticolo metallico spiega anche la buona conducibilità termica dei metalli. Quando un metallo viene avvicinato ad una fonte di calore gli elettroni di conduzione aumentano la loro energie cinetica media che, data la loro mobilità può essere facilmente trasferita alle particelle adiacenti.
La lucentezza dei metalli si spiega infine con la vicinanza degli orbitali molecolari all'interno della banda di conduzione. In pratica gli elettroni, avendo a disposizione moltissimi livelli energetici adiacenti, possono facilmente esservi promossi assorbendo luce su tutte le lunghezze d'onda per poi riemetterla per tornare allo stato fondamentale. Una banda completamente piena non è invece in grado di contribuire ad una corrente elettrica. Gli elettroni di una banda completamente piena sono in grado di compiere movimenti minimi all'interno del reticolato cristallino. La teoria delle bande, oltre a giustificare le caratteristiche metalliche è in grado di fornire una spiegazione semplice ed immediata dell'esistenza dei semiconduttori e degli isolanti.

I Conduttori
Sono conduttori
a) i metalli che presentano una banda superficiale non completamente riempita, come i metalli alcalini;
b) i metalli che presentano una banda superficiale piena, ma una zona proibita estremamente ridotta o addirittura inesistente (sovrapposizione di banda), come nel caso dei metalli alcalino terrosi, che permette agli elettroni di riempire parzialmente la banda superiore anche a temperatura ambiente.
La conducibilità dei metalli diminuisce all'aumentare della temperatura poiché l'aumento dei moti vibrazionali dagli atomi va ad interferire con il moto degli elettroni.

I Semiconduttori
Sono semiconduttori elementi come il silicio ed il germanio che presentano una banda piena ed un intervallo di banda (zona proibita) con un valore non eccessivamente alto, tale comunque da poter essere superato fornendo adeguate quantità di energia al cristallo.
E' questo il motivo per cui nei semiconduttori la resistenza al passaggio di corrente elettrica diminuisce all'aumentare della temperatura.
Semiconduttori con particolari caratteristiche si possono costruire attraverso il processo di drogaggio, aggiungendo ad un semiconduttore piccole percentuali di impurezze. Ad esempio mescolando al silicio piccole, ma ben definite quantità di arsenico o di boro.
Il drogaggio con arsenico è detto di tipo n in quanto viene aggiunto un elemento chimico che presenta la stessa configurazione superficiale del silicio con un elettrone in più. Gli elettroni in più vanno a disporsi nella banda superiore e sono disponibili per la conduzione.
Il drogaggio con boro viene detto di tipo p in quanto viene aggiunto un elemento chimico che presenta la stessa configurazione superficiale del silicio ma con un elettrone in meno. Gli elettroni in meno creano delle lacune elettroniche nella banda più superficiale del silicio le lacune hanno carica positiva, questa situazione crea le premesse per la conduzione.

Gli Isolanti
Sono isolanti le sostanze, come il diamante, in cui vi è una banda superficiale piena e la banda vuota soprastante è separata da una zona proibita talmente grande che nessun elettrone è in grado di

accedervi a temperatura ambiente. Tali sostanze diventano conduttrici solo a temperature elevatissime.
Alcuni fisici separano gli isolanti dai semiconduttori ponendo arbitrariamente pari a 4 eV le dimensioni energetiche della zona proibita. Il silicio ad esempio presenta un valore di 1,1 eV.

LO STATO GASSOSO

Lo stato di aggregazione di una sostanza, solido, liquido o aeriforme, dipende, oltre che dal tipo e dall'intensità delle forze intermolecolari, dai valori che assumono la **pressione** P, la **temperatura** T ed il **volume** V. Per questo motivo tali grandezze sono dette **variabili di stato**. Nello stato gassoso le distanze tra le molecole risultano molto elevate, poiché le particelle possiedono energia cinetica sufficiente a vincere le forze di attrazione intermolecolari e sono perciò in grado di separarsi. Il moto caotico delle particelle allo stato gassoso determina il fenomeno della **diffusione**, per il quale un gas occupa sempre tutto lo spazio a sua disposizione e presenta per questo motivo forma e volume del recipiente che lo contiene.

Il *Volume* è definito come la porzione di spazio occupata da un corpo. Esso viene misurato in m^3 ed in chimica, più spesso in litri (*l*).

La *Temperatura* misura la capacità di un corpo di dare sensazioni di caldo e freddo. Più precisamente essa è una misura dell'energia cinetica media delle particelle che costituiscono un corpo. La temperatura si misura in:
1) gradi centigradi o Celsius (°C)
2) gradi assoluti o Kelvin (°K)
3) gradi Fahreneit (°F).

La scala Celsius (t) è convenzionalmente costruita assegnando al ghiaccio fondente la temperatura di 0 °C e all'acqua bollente la temperatura di 100 °C.
La scala delle temperature assolute (T) è costruita partendo dalla costatazione che la più bassa temperatura Celsius corrisponde a -273,15°C. Poiché non sono possibili temperature inferiori, tale valore rappresenta lo zero assoluto delle temperature. La scala delle temperature assolute si ottiene quindi traslando l'origine della scala Celsius dagli 0°C a -273,15°C. E' evidente quindi che per trasformare i gradi Celsius in gradi Kelvin è sufficiente utilizzare la seguente relazione di conversione

$$T = t + 273{,}15$$

Così, ad esempio, lo zero della scala Celsius corrisponde a 273,15 °K, mentre l'acqua bolle a 373,15 °K.
Nella scala Fahreneit al ghiaccio fondente è assegnata convenzionalmente una temperatura di 32 °F, mentre all'acqua bollente è assegnata convezionalmente la temperatura di 212 °F . A differenza della scala centigrada dunque, dove tale intervallo è diviso in 100 gradi, nella scala Fahreneit è suddiviso in 180 gradi. Un grado Fahreneit risulta perciò più piccolo di un grado centigrado.

La temperatura determina la *direzione del flusso di calore*.

La *Pressione* si definisce come il rapporto tra una forza e la superficie sulla quale la forza agisce.
Le unità di misura della pressione sono molteplici. Le più utilizzate sono:
a) **Chilogrammo su centimetro quadrato** (Kg/cm^2)
b) **Atmosfera** (atm). E' definita come la pressione esercitata dall'atmosfera terrestre sul livello del mare (slm), a 0°C, a 45° N, con un'umidità relativa pari allo 0% .
1 atm = 760 mm di Hg (o torr) = 1,033 kg/cm^2

c) **Pascal** (Pa). Nel Sistema Internazionale SI è la forza esercitata da 1 N (newton) sulla superficie di m^2. (1 newton è la forza che, applicata alla massa di 1 Kg produce un'accelerazione di 1 m/s^2).
d) **Bar**. Nel sistema cgs è la forza esercitata da 10^6 dine su 1 cm^2. (1 dina è la forza che, applicata alla massa di 1 g produce un'accelerazione di 1 cm/s^2).
1 atm = 1,013 Bar = 101.300 Pascal

Si definiscono **condizioni normali** (c.n.) o standard di temperatura e pressione (STP), la temperatura di 0 °C e la pressione di 1 atm.

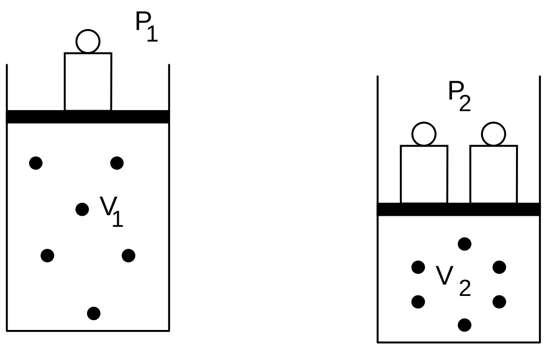
LE LEGGI DEI GAS

Le ricerche sperimentali effettuate sullo stato aeriforme hanno dimostrato che se un gas è sufficientemente rarefatto e/o possiede una temperatura sufficientemente elevata, il suo comportamento fisico risulta indipendente dalla sua natura chimica. In altre parole, tutti i gas che si trovano sufficientemente distanti dal loro punto di liquefazione si comportano allo stesso modo e possono essere descritti mediante un unico formalismo matematico. E' cioè possibile trattare le particelle che compongono il gas (molecole o atomi che siano) come punti materiali le cui interazioni dipendono esclusivamente dal loro numero per unità di volume e dalla loro energia cinetica media, trascurando le forze intermolecolari che dipendono evidentemente dalla loro natura chimica.
E' comunque possibile descrivere il comportamento fisico dei gas utilizzando le variabili di stato: pressione, volume e temperatura. Tali relazioni sono note come leggi dei gas perfetti.

Un gas perfetto è un *gas ideale* in cui gli urti delle particelle sono perfettamente elastici, ciascuna particella non occupa virtualmente volume (particella puntiforme) e non vi sono forze intermolecolari che vincolino in alcun modo il moto delle molecole.
E' evidente che un gas perfetto in realtà non esiste, si tratta solo di un'utile astrazione. Ma in opportune condizioni di rarefazione i gas reali possono avvicinarsi in modo accettabile a tale modello ideale.

Legge di Boyle (relazione tra P e V a T costante)

Nel 1662 Boyle dimostrò che mantenendo costante la temperatura il volume di una data massa di gas è inversamente proporzionale alla pressione esercitata su di esso.

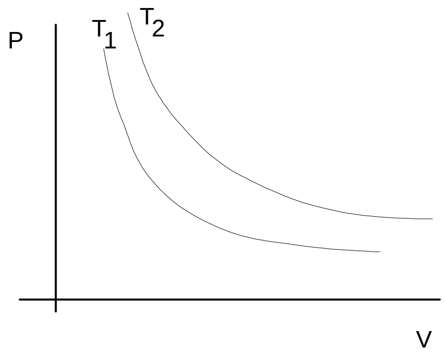


$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 = K$$

ed in definitiva

$$PV = K$$

La curva che si ottiene ponendo in ascisse il volume ed in ordinata la temperatura è naturalmente un ramo di iperbole equilatera detta **isoterma**.



Naturalmente effettuando l'esperimento a diverse temperature si ottengono diverse isoterme. Aumentando la temperatura l'isoterma si sposta verso l'esterno Nell'esempio in figura $T_2 > T_1$.

Legge di Charles o 1ª legge di Gay-Lussac *(relazione tra V e T a P costante)*

Nel 1787 il francese J.A.C. Charles dimostrò che gas diversi mantenuti a pressione costante subiscono la stessa dilatazione quando vengono portati da O°C a 100°C.
Nel 1802 Gay-Lussac, riprendendo le esperienze di Charles, giunge a formulare una relazione che lega il Volume alla temperatura

$$V_t = V_o(1 + \alpha \cdot t)$$

Dove:
α = è il coefficiente di espansione e vale 1/273
V_t = Volume alla temperatura di t°C
V_o = Volume alla temperatura di 0°C

In altre parole, a pressione costante, per ogni aumento di 1° della temperatura si ha un aumento del volume pari ad 1/273 rispetto al volume che il gas occupava alla temperatura di 0°C. Infatti:

$$V_t = V_o + \frac{t}{273}V_o$$

dove si osserva che il volume alla temperatura di t°C (V_t) è pari al volume alla temperatura di 0°C (V_o) aumentato di un valore pari a t/273 del volume V_o. La relazione precedente può essere scritta:

$$V_t = V_o\left(\frac{273 + t}{273}\right)$$

e ricordando che 273 + t = T

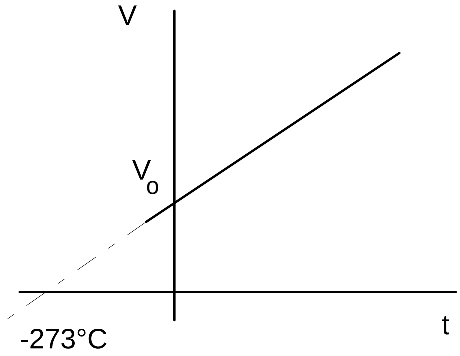
$$V_t = \frac{V_o}{273} \cdot T$$

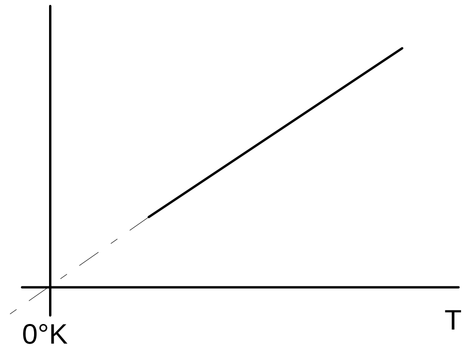
Poichè infine il volume a pressione costante (P = K) e alla temperatura di 0°C assume sempre lo stesso valore, il rapporto Vo/273 è una costante.
Se quindi esprimiamo la temperatura in gradi assoluti, la legge di Gay-Lussac afferma che il volume a t°C è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta. Il valore della costante di proporzionalità dipende ovviamente dalla pressione alla quale facciamo l'esperimento e dalla quantità di gas che si prende in considerazione. La relazione che lega il Volume alla Temperatura a

Pressione costante è dunque di proporzionalità diretta ed è quindi rappresentabile tramite una retta di pendenza $V_o/273$.
Se in ascissa poniamo la temperatura in gradi centigradi la retta incontra l'asse delle ordinate in V_o. e quello delle ascisse in -273. Se in ascissa poniamo la temperatura assoluta la retta attraversa l'origine. La retta ottenuta è detta **isobara**.
Naturalmente i valori espressi dalla retta hanno significato solo fino ad una certa temperatura, al di sotto della quale il gas si liquefa e diventa in pratica incomprimibile. Facendo comunque proseguire idealmente la retta (linea tratteggiata) si raggiunge lo zero assoluto (-273°C) al di sotto del quale si otterrebbe il risultato assurdo di un volume negativo della materia

$$V_t = V_o + \frac{V_o}{273} t$$

$$V_t = \frac{V_o}{273} T$$





2ª legge di Gay-Lussac (relazione tra P e T a V costante)

Analogamente a quanto avviene nella prima legge di Gay-Lussac, la pressione di un gas a volume costante è direttamente proporzionale alla temperatura.
Se si utilizza la temperatura centigrada si ha:

$$P_t = P_o(1 + \alpha \cdot t)$$

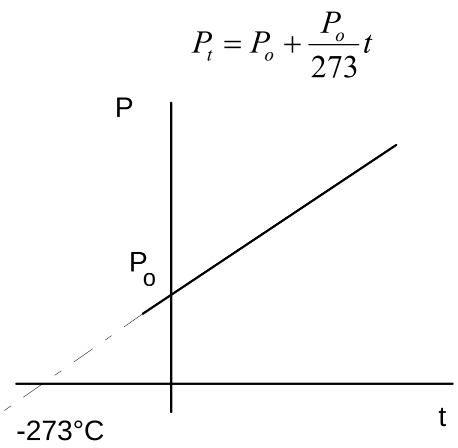
Dove:
α = 1/273
P_t = Pressione alla temperatura di t°C
P_o = Pressione alla temperatura di 0°C

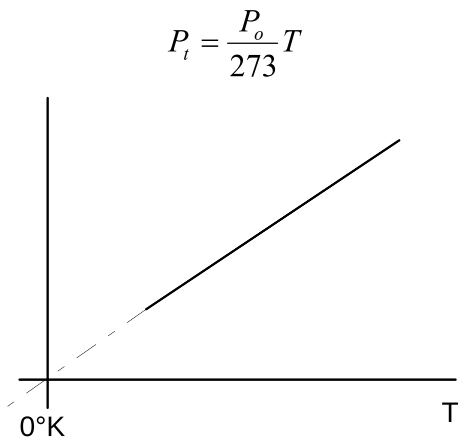
In altre parole, mantenendo costante il volume, ogni aumento della temperatura di 1°C, produce un aumento della pressione pari ad 1/273 della pressione che il gas esercitava alla temperatura di 0°C. Infatti:

$$P_t = P_o + \frac{t}{273} P_o$$

dove si osserva che la pressione alla temperatura di t°C (P_t) è pari alla pressione alla temperatura di 0°C (P_o) aumentata di un valore pari a t/273 della pressione P_o. Anche in questo caso, esprimendo la temperatura in gradi Kelvin si ottiene una retta passante per l'origine, detta **isocora**, di equazione:

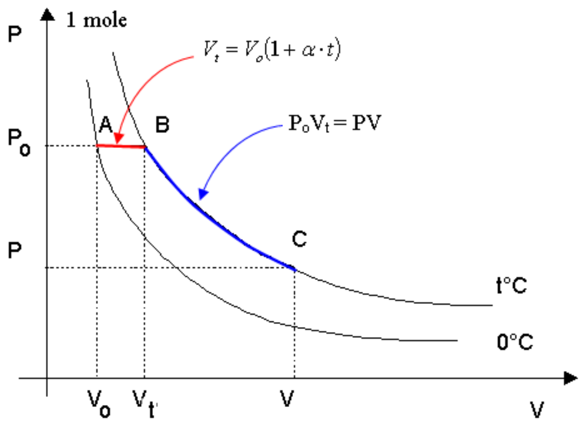
$$P_t = \frac{P_o}{273} \cdot T$$





Equazione di stato dei gas perfetti

Le tre leggi dei gas possono combinarsi in un'unica relazione in cui compaiono contemporaneamente tutte e tre le variabili di stato. L'equazione è dovuta al francese Clapeyron (1834). Si consideri **1 mole** di un gas qualsiasi e le due isoterme di 0°C e di t°C.
Consideriamo ora i tre punti A, B e C posti sulle isoterme e le trasformazioni A→B e B→C
1) La trasformazione A→B, avvenendo a pressione P_o costante è una trasformazione isobara per la quale vale la relazione $V_t = V_o(1 + \alpha t)$
2) la trasformazione B→C, avvenendo a temperatura t costante è una isoterma per la quale vale la relazione $PV = P_oV_t$.



sostituendo ora nella seconda il valore V_t ricavato dalla prima si ottiene:

$$PV = P_oV_o(1+ \alpha t)$$

da cui

e quindi $$PV = \frac{P_oV_o}{273}T$$

Poiché P_o e V_o sono la pressione e il volume alla temperatura costante di 0°C, il loro prodotto è, per la legge di Boyle, costante e quindi anche la quantità $\frac{P_oV_o}{273}$ è costante. Ricordando che 1 mole di qualsiasi gas a 0°C e ad 1 atmosfera occupa sempre 22,414 l, se poniamo Po = 1 atm, Vo sarà appunto pari a 22,414 l ed il rapporto, noto come costante universale dei gas R, sarà:

$$R = \frac{P_o V_o}{273} = \frac{1 \cdot 22{,}414}{273} = 0{,}082 \frac{atm \cdot l}{mol \cdot {}^\circ K}$$

Ricordiamo che se esprimiamo la pressione in Pascal ed il volume in m^3 (sistema SI) R vale:

$$R = 8{,}31 \frac{pascal \cdot m^3}{mol \cdot {}^\circ K} \qquad \text{o}$$

mentre nel sistema cgs R vale:

$$R = 8{,}31 \cdot 10^7 \frac{erg}{mol \cdot {}^\circ K}$$

Per una mole di gas l'equazione di stato diventa dunque:

$$PV = RT$$

Per n moli il volume V_o ad 1 atmosfera e 0°C non sarà evidentemente 22,414 l, ma sarà pari ad n volte 22,414 l e l'equazione sarà:

$$PV = nRT$$

Lo Stato Solido

Allo stato solido, le particelle -che possono essere presenti come atomi, ioni o molecole- occupano posizioni fisse e la loro libertà di movimento è limitata ai moti vibrazionali: oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio, la cui frequenza dipende dalla temperatura. Generalmente, le particelle hanno una disposizione ordinata, in reticoli cristallini regolari. Le forze di coesione che tengono insieme le particelle allo stato solido, possono essere di intensità molto diversa. In molti casi si tratta di veri e propri legami, ionici o covalenti, in altri le particelle sono tenute insieme da legami a ponte di idrogeno. Vi sono aggregati molecolari di tipo covalente tenuti insieme da interazioni idrofobiche (forze di van der Waals). Il criterio più razionale per classificare i vari tipi di solidi, è proprio quello basato sul tipo di legame che tiene unite le particelle. In questo modo si possono individuare quattro classi, ciascuna caratterizzata da un comportamento chimico-fisico omogeneo, determinato dalla natura stessa del legame.

- solidi ionici (ioni)
- solidi covalenti (atomi)
- solidi molecolari (molecole)
- solidi metallici (atomi)

I Solidi ionici

Dei cristalli ionici abbiamo già parlato a proposito del legame ionico. Le loro caratteristiche sono:

- rigidità e durezza, ma di facile saldabilità;
- punti di fusione elevati;
- cattiva conducibilità elettrica;
- buona conducibilità allo stato fuso (o in soluzione);

I Solidi covalenti

Sono costituiti da **atomi**, tenuti insieme da forti legami covalenti. Esempi classici di cristalli di questo tipo sono il carbonio elementare, sia in forma di diamante che di grafite, e il quarzo (SiO_2). Nel diamante gli atomi di carbonio hanno tutti ibridazione sp^3; il cristallo ha quindi una struttura tetraedrica. È caratterizzato da estrema durezza, un punto di fusione elevatissimo e pessima conducibilità elettrica. La grafite è una forma allotropica del diamante. Nella grafite ogni atomo di carbonio ha ibridazione sp^2; nel cristallo si può riconoscere un'organizzazione in strati sovrapposti, tenuti insieme da interazioni di van der Waals. Questo spiega la facile sfaldabilità della grafite e il suo uso come lubrificante. Per la presenza di numerosi elettroni π, delocalizzati su ciascuno strato, la grafite è un buon conduttore di elettricità.

I Solidi molecolari

Sono costituiti da **molecole**, che possono essere tenute insieme da forze di van der Waals (ad esempio lo iodio (I_2) cristallino e molti altri cristalli molecolari di elementi non metallici) o da legami a idrogeno (ad esempio il ghiaccio). Per la natura dei legami che tengono insieme le particelle, i solidi molecolari sono caratterizzati da:

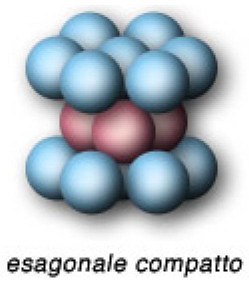
- consistenza tenera;
- bassi punti di fusione;
- bassi punti di ebollizione (volatilità);
- cattiva conducibilità elettrica;

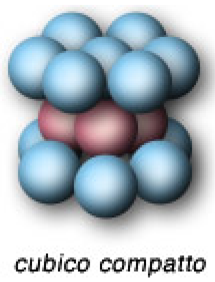
I Solidi metallici

I solidi formati dagli elementi metallici allo stato elementare hanno proprietà decisamente diverse da quelle degli altri solidi. Fra tutte spiccano:

- elevata conducibilità elettrica e termica;
- effetto fotoelettrico (capacità di emettere elettroni in seguito all'interazione con radiazioni elettromagnetiche);
- malleabilità e duttilità (rispettivamente la capacità di lasciarsi ridurre in lamine e in fili sottilissimi);

Queste caratteristiche si giustificano ammettendo che nel metallo gli elettroni siano completamente liberi di muoversi e che il solido sia organizzato in strati capaci di slittare con relativa facilità l'uno sull'altro. Tutto ciò si può spiegare supponendo che nei solidi metallici gli atomi siano tenuti insieme da un "terzo" tipo di legame, detto appunto **legame metallico**. I solidi metallici sarebbero quindi costituiti da **un insieme ordinato di cationi, immersi in "un mare" di elettroni**, formato da tutti gli elettroni di valenza disponibili, uniformemente distribuiti (delocalizzati) e in grado di muoversi liberamente in tutto il cristallo. Nel reticolo cristallino metallico, gli atomi tendono a impacchettarsi nel modo più compatto possibile, secondo tre tipi di celle elementari. In alcuni cristalli, il numero di coordinazione è 8 e la struttura è cubica a corpo centrato (Li, Na, K); più frequentemente il numero di coordinazione è 12 e si possono avere due tipi di impacchettamento: cubico compatto (a facce centrate) ed esagonale compatto. Per meglio comprendere questi due tipi di organizzazione, immaginiamo di disporre delle sfere su un piano nella maniera più compatta possibile. Si ottiene uno strato in cui ogni sfera è circondata da 6 sfere. A questo si può sovrapporre un secondo strato, in modo da disporre le sfere nelle "cavità" del primo strato. Un terzo strato può, a questo punto, essere sovrapposto solo in due modi diversi: o in modo da "ricalcare" il primo strato – e si ottiene l'impacchettamento **esagonale compatto** – o in modo da "non ricalcare" il primo strato – e si ottiene l'impacchettamento **cubico compatto**.





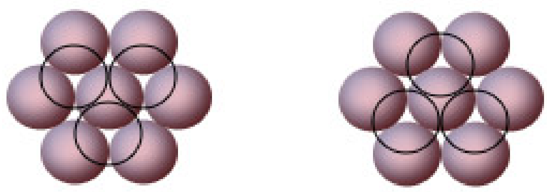


Fig. 20 - I due diversi modi di disporre il

Lo Stato liquido

Nello stato liquido le distanze tra le molecole risultano estremamente ridotte. Le particelle possono infatti considerarsi praticamente addossate le une alle altre, poichè la loro energia cinetica non è sufficiente a vincere le forze di attrazione intermolecolari. Le forze intermolecolari che agiscono sulle particelle di un liquido non sono comunque abbastanza elevate da trattenere le molecole ai vertici di un reticolo cristallino, come avviene nei solidi.
Le molecole di un liquido sono quindi in continuo movimento reciproco, come quelle di un aeriforme, ma, a differenza di quanto avviene in un gas, scorrono le une sulle altre senza separarsi.
Per questo motivo i liquidi risultano praticamente *incomprimibili*. Essi presentano in definitiva un volume proprio, ma si adattano alla forma del recipiente che li contiene.
Il moto caotico delle particelle determina, anche nello stato liquido, il fenomeno della **diffusione**. Un liquido diffonde comunque più lentamente di un gas, poichè il movimento delle sue molecole risulta ostacolato dalla presenza delle molecole adiacenti.
Avendo in comune la proprietà di diffondere, liquidi e aeriformi vengono raggruppati sotto la denominazione di **fluidi**.

La Tensione di vapore

Alcune particelle che si trovano in prossimità della superficie, dove risentono meno intensamente delle forze di attrazione, se dotate di una *Ec* superiore a quella delle forze di interazione intermolecolare (*Ep*), possono abbandonare il liquido e passare allo stato di vapore. Questo processo prende il nome di **evaporazione**.

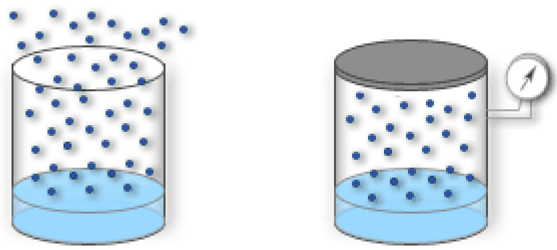


Fig. 21 – Tensione di vapore nei liquidi

Nel recipiente chiuso a temperatura costante, si raggiunge un equilibrio di tipo dinamico fra la velocità con la quale le molecole della fase liquida passano nella fase gassosa e la velocità con la quale le molecole della fase gassosa ritornano nella fase liquida. La pressione del gas all'equilibrio si definisce pressione di vapore. La pressione di vapore è una costante caratteristica di ogni liquido: dipende solo dalla temperatura ed è indipendente dal volume del liquido.

Ebollizione

Naturalmente la tensione di vapore aumenta con la temperatura, poichè maggiore è il numero delle particelle che possiede un'energia cinetica superiore al valore critico. La tensione di vapore varia da liquido a liquido. A parità di temperatura è maggiore per i liquidi caratterizzati da deboli forze intermolecolari, per ciò detti *volatili*; è minore per i liquidi caratterizzati da intense forze intermolecolari che tengono particolarmente coese le particelle.
Quando al crescere della temperatura la tensione di vapore eguaglia la pressione esterna (normalmente la pressione atmosferica), allora il processo di evaporazione interessa tutta la massa

del liquido ed il passaggio di stato avviene in maniera tumultuosa, attraverso un processo detto di **ebollizione**. in cui si formano bolle di gas anche all'interno del liquido.
Si definisce **punto di ebollizione normale** la temperatura alla quale la tensione di vapore assume il valore di 760 mm di Hg (pressione normale). Per l'acqua, ad esempio, il punto di ebollizione normale è di 100°C
Naturalmente se la pressione esterna è inferiore a 760 mm, come avviene ad esempio in montagna, l'acqua raggiunge il punto di ebollizione a temperature inferiori; mentre se la pressione esterna è superiore, come in una pentola a pressione, l'acqua bolle a temperature superiori.
Se forniamo calore ad un liquido esso aumenta la sua temperatura fino al momento in cui non raggiunge il suo punto di ebollizione. Durante il passaggio di stato la temperatura del liquido resta invece invariata nonostante l'apporto di calore. Il calore fornito non viene utilizzato per aumentare l'energia cinetica delle particelle, ma si trasforma in un aumento di energia potenziale delle particelle gassose. Tale calore, assorbito dal sistema senza produrre un aumento di temperatura, è noto come **calore latente**. Esso viene naturalmente restituito all'ambiente durante il processo di condensazione. Tale comportamento è caratteristico di ogni passaggio di stato.

LE SOLUZIONI

Una soluzione è un sistema omogeneo di due o più componenti solidi, liquidi o gassosi, in cui i componenti sono presenti allo stato atomico o molecolare e risultano pertanto inosservabili.
Per definizione si chiama **solvente** la sostanza presente in quantità maggiore e **soluto** (o soluti) la sostanza (o le sostanze) presente in minor quantità.
Le soluzioni gassose (gas in gas) vengono normalmente dette **miscele gassose**.
Le soluzioni solide sono dette **leghe**.
Noi ci occuperemo delle soluzioni liquide in cui un soluto (solido, liquido o gassoso) si scioglie in un liquido ed essenzialmente delle **soluzioni acquose**, in cui il solvente è l'acqua.

La Concentrazione di una soluzione

La concentrazione esprime la quantità relativa dei soluti rispetto al solvente. La concentrazione di un soluto si indica mettendo tra parentesi quadre la formula chimica. Ad esempio $[H_2SO_4]$ si legge "*concentrazione dell'acido solforico*". Esistono diversi modi per esprimere la concentrazione di una soluzione.

1) <u>*Percentuale in peso*</u> $C_{(p/p)}$
E' il rapporto percentuale tra il peso del soluto ed il peso della soluzione (grammi di soluto per 100 g di soluzione)

$$C_{(p/p)} = \frac{W_{soluto}}{W_{soluzione}} \cdot 100$$

2) <u>*Percentuale in volume*</u> $C_{(v/v)}$
E' il rapporto percentuale tra il volume del soluto ed il volume della soluzione (ml di soluto per 100 ml di soluzione). Viene spesso utilizzata nelle soluzioni in cui tutti i componenti sono liquidi. La gradazione delle bevande alcoliche è ad esempio espressa come percentuale in volume.

$$C_{(v/v)} = \frac{V_{soluto}}{V_{soluzione}} \cdot 100$$

3) *Rapporto peso-volume* $C_{(p/v)}$
E' il rapporto tra il peso del soluto espresso in grammi ed il volume della soluzione espresso in litri (g/l).

$$C_{(p/v)} = \frac{W_{soluto}}{V_{soluzione}} \left(g/l \right)$$

4) *Frazione molare* (χ)
E' il rapporto tra il numero di moli di soluto ed il numero di moli totali.

$$\chi = \frac{n_{soluto}}{n_{totali}} = \frac{n_{soluto}}{n_{soluto} + n_{solvente}}$$

5) *Molarità* (M)
E' il rapporto tra il numero di moli di soluto ed il volume della soluzione espresso in litri. Indica il numero di moli di soluto presenti in un litro di soluzione (mol/l).

$$M = \frac{n_{soluto}}{V_{soluzione}} \left(mol/l \right)$$

6) *Molalità* (m)
E' il rapporto tra il numero di moli di soluto ed il peso del solvente espresso in Kg. Indica il numero di moli di soluto presenti per chilogrammo di solvente (mol/Kg).

$$m = \frac{n_{soluto}}{W_{solvente}} \left(mol/Kg \right)$$

7) *Normalità* (N)

E' il rapporto tra il numero di equivalenti di soluto ed il volume della soluzione espresso in litri. Indica quanti equivalenti sono presenti in un litro di soluzione (eq/l).

$$N = \frac{n_{eq}}{V_{soluzione}} \left(eq/l \right)$$

Un equivalente o grammo-equivalente (gr-equivalente) o peso-equivalente (P_{eq}) è una quantità, espressa in grammi, il cui valore dipende dal tipo di sostanza e dal tipo di reazione.

a) Nel caso di una **reazione redox** il peso-equivalente è il rapporto tra il peso molare della sostanza che si ossida (o si riduce) e il numero di elettroni persi (o acquistati)

$$P_{eq} = \frac{P_M}{n_{e^-}}$$

Calcoliamo ad esempio il peso equivalente dell'anidride solforosa, nelle seguenti 2 reazioni redox

1) $SO_2 + O_2 \rightarrow SO_3$

2) $SO_2 + Fe_2O_3 \rightarrow FeS_2 + O_2$

Nella prima lo zolfo si ossida passando da nox +4 a nox +6 con una perdita di 2 elettroni. Il peso equivalente dell'anidride solforosa sarà quindi in questa reazione

$$P_{eq} = \frac{P_M}{n_{e^-}} = \frac{64}{2} = 32\,g/eq$$

nella seconda lo zolfo si riduce passando da nox +4 a nox -1 con un acquisto di 5 elettroni. Il peso equivalente dell'anidride solforosa in questa seconda reazione sarà dunque

$$P_{eq} = \frac{P_M}{n_{e^-}} = \frac{64}{5} = 12{,}8\,g/eq$$

b) nel caso di una **dissociazione di un acido** (o di una base), il peso-equivalente è il rapporto tra il peso molare ed il numero di ioni H^+ (o OH^-)

$$P_{eq} = \frac{P_M}{n_{H^+}}$$

Ad esempio calcoliamo il valore del peso equivalente dell'acido ortofosforico relativamente alle seguenti due reazioni di dissociazione

1) $H_3PO_4 \rightarrow 2H^+ + HPO_4^{2-}$

2) $H_3PO_4 \rightarrow 3H^+ + PO_4^{3-}$

Nella prima in cui si liberano solo 2 ioni H^+ il peso equivalente vale

$$P_{eq} = \frac{P_M}{n_{H^+}} = \frac{98}{2} = 49\,g/eq$$

Nella seconda in cui si liberano 3 ioni H+ il peso equivalente vale

$$P_{eq} = \frac{P_M}{n_{H^+}} = \frac{98}{3} = 32{,}67\,g/eq$$

c) nel caso di una **dissociazione di un sale**, il peso-equivalente è il rapporto tra il peso molare ed il numero delle cariche positive (o negative) prodotte dalla dissociazione

$$P_{eq} = \frac{P_M}{n_{cariche}}$$

Calcoliamo ad esempio il peso equivalente del solfato ferrico nella seguente reazione

$$Fe_2(SO_4)_3 \rightarrow 2Fe^{3+} + 3SO_4^{2-}$$

Poichè vengono liberate complessivamente 6 cariche positive (o 6 negative) il peso equivalente risulta

$$P_{eq} = \frac{P_M}{n_{cariche}} = \frac{400}{6} = 66,67\, g/eq$$

E' evidente che il peso equivalente ha un significato fisico analogo al peso molare. Se il peso molare è una quantità in grammi di una sostanza che contiene un numero di avogadro di particelle, il peso equivalente è una quantità in grammi di una sostanza in grado di mettere in gioco, a seconda delle circostanze, un numero di Avogadro di elettroni, di ioni H^+ (o OH^-) o di cariche ioniche positive (o negative).
Ora, allo stesso modo in cui si calcola il numero di moli (n) facendo il rapporto tra il peso in grammi (W) ed il peso di una mole (P_M), si può calcolare il numero di equivalenti (n_{eq}) facendo il rapporto tra il peso in grammi di una sostanza ed il peso di un equivalente (P_{eq}).

$$n_{eq} = \frac{W}{P_{eq}}$$

Per esemplificare quanto detto calcoliamo la Molarità e la Normalità di 2,3 l di una soluzione contenente 45 g di Cloruro di Magnesio $MgCl_2$.

$$M = \frac{n}{V} = \frac{W/P_M}{V} = \frac{45/95}{2,3} = 0,2\, mol/l$$

$$N = \frac{n_{eq}}{V} = \frac{W/P_{eq}}{V} = \frac{\frac{W}{P_M/n_{cariche}}}{V} = \frac{n_{moli} \cdot n_{cariche}}{V} = M \cdot n_{cariche} = 0,4\, eq/l$$

Da cui si deduce che per calcolare la Normalità di una soluzione è sufficiente moltiplicare il valore della Molarità per il numero di cariche ioniche (o di elettroni o di ioni H^+) messe in gioco.
L'uso della Normalità permette di calcolare direttamente le quantità di sostanze che partecipano ai processi chimici senza bisogno di bilanciare la reazione. Infatti è facilmente verificabile che in qualsiasi reazione 1 equivalente di una sostanza reagisce sempre con un equivalente di qualsiasi altra sostanza che partecipi alla reazione.

La Solubilità

Una vecchia regola della chimica afferma che il simile scioglie il simile: solventi polari sciolgono sostanze ioniche o polari, mentre solventi apolari sciolgono sostanze apolari.
Come abbiamo già avuto modo di dire noi prenderemo in considerazione esclusivamente soluzioni acquose dove il solvente è l'acqua, un liquido molto polare.
Le parziali cariche elettriche dell'acqua esercitano sugli ioni o sulle molecole polari di un soluto un'attrazione che indebolisce considerevolmente le forze interne che mantengono integra la struttura del solido. Le particelle che si trovano sulla superficie del solido (polare o ionico) posto in acqua, finiscono quindi per essere estratte, circondate dalle molecole dell'acqua (**solvatazione**) e portate in soluzione. Se il solvente è l'acqua il fenomeno prende il nome di **idratazione**.

Si definisce **solubilità** la massima quantità di soluto che può essere disciolta in una data quantità di solvente. *La solubilità è quindi la concentrazione della soluzione satura*.

Il processo di solubilizzazione può essere sia esotermico che endotermico.

Effetti della temperatura sulla solubilità

- In genere se il soluto è un *solido* il processo è endotermico (per questo motivo i soluti solidi si sciolgono meglio in liquidi caldi). Nonostante il processo non sia favorito dal punto di vista energetico esso risulta egualmente spontaneo poichè l'entropia di una soluzione è molto maggiore di quella di un solido cristallino (il grado di disordine è molto più elevato nei fluidi che nei solidi).

- Se il soluto è un *fluido* (liquido o gas) in genere il processo di solubilizzazione è esotermico (per questo motivo i gas si sciolgono più facilmente in liquidi a bassa temperatura).

Effetti della pressione sulla solubilità (legge di Henry)

Poiché i solidi ed i liquidi sono praticamente incomprimibili la variazione della pressione non ha alcun effetto sulla loro solubilità.
Diverso è il caso di soluti gassosi. Infatti in soluzioni di gas in liquidi la concentrazione del soluto è proporzionale alla pressione parziale del gas in equilibrio con la soluzione.
La legge di Henry afferma che la molalità di una soluzione contenente un soluto gassoso è direttamente proporzionale alla pressione parziale del gas

$$m = K_H \cdot P$$

dove K_H è la costante di Henry. La costante di Henry dipende sia dalla natura chimica del soluto che del solvente.

La legge di Henry spiega ad esempio perchè, stappando una bevanda gasata in cui è disciolta dell'anidride carbonica a pressione superiore a quella atmosferica, si formi improvvisamente dell'effervescenza. Trovandosi infatti bruscamente sottoposto ad una pressione esterna inferiore, il gas non è più in grado di rimanere in soluzione. Il processo è del tutto analogo a quello che provoca la formazione di bolle di gas (embolia) nel sangue dei sommozzatori che risalgono troppo rapidamente in superficie, sottoponendosi ad una brusca diminuzione di pressione.

Elettroliti, non-elettroliti e grado di dissociazione

Le sostanze che si sciolgono in acqua (ed in generale nei solventi polari) si dividono in elettroliti e non-elettroliti.

1. I *non-elettroliti* sono sostanze che sciolte in acqua non si dissociano in ioni di carica opposta. Sono esempi di non elettroliti il glucosio, l'alcool etilico, l'anidride carbonica. Il termine "non-elettrolita" fa riferimento all'impossibilità per le soluzioni che contengono questo tipo di soluti di dare il processo dell'elettrolisi.

2. Gli *elettroliti* sono sostanze che disciolte in acqua si dissociano, in misura più o meno elevata, in ioni di carica opposta. Il termine "elettrolita" fa riferimento al fatto che solo le soluzioni che contengono ioni di carica opposta sono in grado di dare processi elettrolitici.

Gli elettroliti si dicono "forti" quando si dissociano in modo completo. Sono elettroliti forti quasi tutti i sali, gli acidi forti (HCl, HBr, HI, HNO_3 etc) e le basi forti (idrossidi dei metalli alcalini e alcalino-terrosi).
Gli elettroliti si dicono "deboli" quando sono solo parzialmente dissociati. Sono elettroliti deboli gli acidi deboli (HF, H_2S, HCN HNO_2 etc) e le basi deboli (gli idrossidi degli altri metalli).

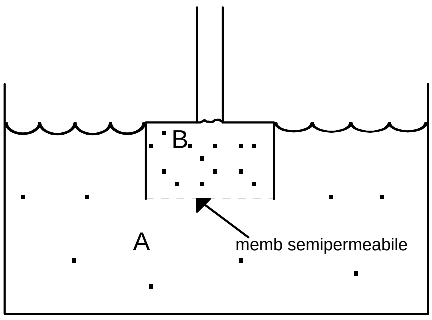
Si definisce **grado di dissociazione** α il rapporto tra il numero di moli dissociate ed il numero di moli inizialmente presenti.

$$\alpha = \frac{n_{dissociate}}{n_{iniziali}}$$

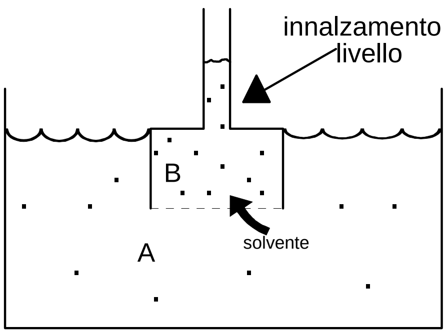
Il grado di dissociazione è evidentemente uguale a 0 per i non-elettroliti, è pari a 1 per gli elettroliti forti e assume valori compresi tra 0 ed 1 per gli elettroliti deboli.
Se una sostanza presenta ad esempio un grado di dissociazione pari a 0,3 significa che per ogni 100 molecole che sono state poste in soluzione, 30 si sono dissociate in ioni, mentre 70 sono disciolte senza essere dissociate.

Osmosi e Pressione osmotica

Il fenomeno dell'osmosi si produce ogniqualvolta una soluzione a maggior concentrazione è separata da una a minor concentrazione da una membrana semipermeabile, che permette il passaggio selettivo del solvente, ma non del soluto.



In condizioni normali il soluto, più concentrato nel recipiente B, tenderebbe a diffondere nel recipiente A, mentre il solvente, più concentrato nel recipiente A, tenderebbe a diffondere nel recipiente B.
Poiché il movimento di diffusione del soluto è impedito dalla presenza della membrana semipermeabile, l'unico movimento consentito è quello del solvente che diffonde dalla soluzione più diluita (A) verso la soluzione più concentrata (B). Il fenomeno è noto come **osmosi**.
Il risultato finale è sempre quello di eliminare le differenze di concentrazione, infatti la soluzione A, inizialmente più diluita, tende a concentrarsi per la fuoriuscita del solvente, mentre il contrario avviene per la soluzione B.



L'entrata del solvente nella soluzione più concentrata (B) provoca un aumento del volume della soluzione. Il livello del liquido si alza fino al punto in cui la pressione esercita dalla colonna di liquido innalzatasi fa esattamente equilibrio alla pressione esercitata dal solvente in entrata.
Quando viene raggiunto l'equilibrio è quindi possibile utilizzare il peso della colonna d'acqua come misura della pressione esercitata dal solvente in entrata, o **pressione osmotica**, π.
Sperimentalmente si osserva che la pressione osmotica prodotta da una soluzione rispetto al solvente puro obbedisce all'equazione di stato dei gas perfetti

$$\pi \cdot V = nRT$$

dove V = volume della soluzione ed n = numero di moli di soluto
Tenendo conto poi che n/V è la molarità della soluzione, la relazione diventa

$$\pi = \frac{n}{V}RT = MRT$$

La pressione osmotica di una soluzione, a temperatura costante, dipende dunque esclusivamente dalla sua concentrazione.
Nel caso si prendano in considerazione 2 soluzioni a diversa concentrazione, la pressione osmotica è proporzionale alla differenza di concentrazione ΔM.

$$\pi = \Delta M \cdot R \cdot T$$

La Legge di Raoult

Il processo di evaporazione interessa, come sappiamo, solo le molecole presenti sulla superficie del liquido. In una soluzione in cui siano disciolti alcuni soluti, nelle quantità molari n_1, n_2, n_3,.....n_n, le molecole di ciascuno di essi sono distribuite in modo uniforme su tutta la massa della soluzione, e quindi anche sulla sua superficie, in modo proporzionale alla loro frazione molare (n_i/n_{tot}).
Ciascuna delle specie chimiche presenti in soluzione sarà soggetta ad un processo di evaporazione e contribuirà pertanto alla formazione di un vapore, costituito da una miscela di aeriformi. Ciascun componente la soluzione contribuirà alla tensione di vapore della soluzione in modo proporzionale alla frazione di molecole che occupano la superficie della soluzione ed alla sua maggiore o minore volatilità. In altre parole la tensione di vapore della soluzione dipenderà dalla frazione molare di ciascun componente la soluzione e dalla tensione di vapore del componente stesso.
La legge di Raoult esprime quantitativamente tale fenomeno, affermando che *la tensione di vapore* (P) *di una soluzione, a temperatura costante è data dalla somma delle tensioni di vapore di ciascun componente la soluzione allo stato puro* (P_i^o)*, moltiplicato per la frazione molare* (χ_i) *con cui il componente compare nella soluzione stessa*.

$$P = P_1^o \cdot \chi_1 + P_2^o \cdot \chi_2 + P_3^o \cdot \chi_3 + ... + P_n^o \cdot \chi_n$$

Ad esempio se misceliamo 5 moli di H_2O, la cui tensione di vapore a 25°C è di 23,8 mm di Hg con 3 moli di alcool etilico, la cui tensione di vapore a 25°C è di 58,9 mm di Hg, la tensione di vapore della soluzione sarà

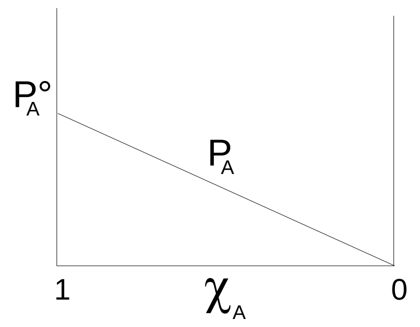
$$P = P^o_{acqua} \cdot \chi_{acqua} + P^o_{etilico} \cdot \chi_{etilico} = 23,8 \cdot \frac{5}{8} + 58,9 \cdot \frac{3}{8} = 36,96mm$$

Possiamo rappresentare graficamente l'andamento della tensione di vapore nel caso di una soluzione a due componenti A e B, in funzione della loro frazione molare.

Il componente A contribuisce alla tensione di vapore totale con una tensione di vapore P_A direttamente proporzionale alla sua frazione molare ed alla tensione di vapore che manifesta allo stato puro, secondo la relazione

$$P_A = P_A^o \cdot \chi_A$$

che rappresenta una retta di pendenza P_A^o.

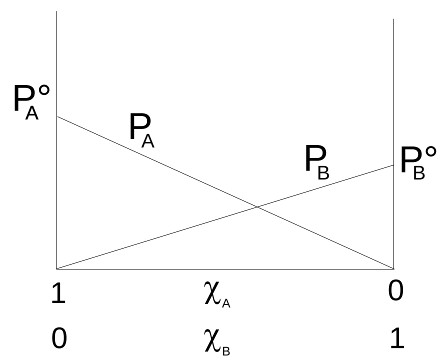


Il componente B contribuisce alla tensione di vapore totale con una tensione di vapore P_A direttamente proporzionale alla sua frazione molare ed alla tensione di vapore che manifesta allo stato puro, secondo la relazione

$$P_B = P_B^o \cdot \chi_B$$

che rappresenta una retta di pendenza P_B^o.

Tenendo conto che $\chi_B = 1 - \chi_A$, l'equazione della retta diventa $P_B = P_B^o \cdot (1 - \chi_A)$ che potremo rappresentare sullo stesso grafico ottenendo

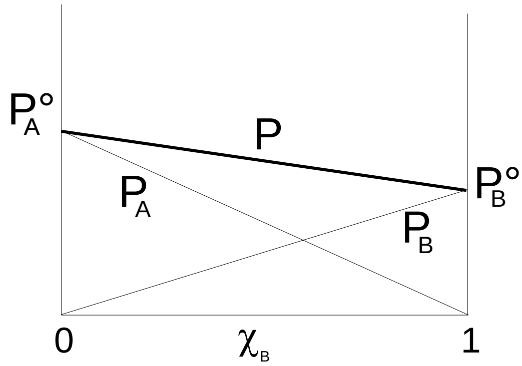


L'andamento della tensione di vapore della soluzione per tutte le possibili combinazioni di A e B può quindi essere ottenuta, secondo quanto previsto dalla legge di Raoult, sommando punto a punto gli apporti dei due componenti ($P_A + P_B$). Si ottiene

$$P = P_A + P_B = P_A^o \chi_A + P_B^o \chi_B = P_A^o (1 - \chi_B) + P_B^o \chi_B$$

e riordinando

$$P = P_A^o + (P_B^o - P_A^o)\chi_B$$



Dove si vede che il valore della tensione di vapore è sempre compreso tra quello dei due componenti allo stato puro, variando linearmente tra questi due estremi. La tensione di vapore totale è rappresentabile in un grafico che porti la frazione molare del componente B in ascissa, come una retta di pendenza $\left(P_B^o - P_A^o\right)$ e di intersezione con l'asse delle ordinate P_A^o. Le soluzioni che rispettano la legge di Raoult si dicono soluzioni ideali.
In moltissime soluzioni i soluti sono solidi che presentano tensioni di vapore talmente basse da poter essere trascurate. Nel caso più semplice di un unico soluto solido non volatile la legge di Raoult diventa

$$P = P_{solv}^o \cdot \chi_{solv} + P_{soluto}^o \cdot \chi_{soluto}$$

e, poichè possiamo porre $P_{soluto}^o = 0$, si otterrà

$$P = P_{solv}^o \cdot \chi_{solv} = P_{solv}^o \cdot \left(1 - \chi_{soluto}\right) = P_{solv}^o - P_{solv}^o \cdot \chi_{soluto}$$

da cui

$$\frac{P_{solv}^o - P}{P_{solv}^o} = \chi_{soluto}$$

Tale relazione esprime il fatto che la presenza di molecole di soluto che non evaporano (o evaporano in modo trascurabile) alla superficie della soluzione, diminuiscono la superficie utile per l'evaporazione del solvente di una percentuale pari alla frazione molare del soluto e finiscono quindi per far diminuire la tensione di vapore del solvente della stessa percentuale.

La legge di Raoult per un soluto poco volatile afferma infatti che *l'abbassamento relativo della tensione di vapore del solvente* $\left(\frac{P_{solv}^o - P}{P_{solv}^o}\right)$ *è uguale alla frazione molare del soluto* $\left(\chi_{soluto}\right)$.

Se ad esempio sciogliamo 100 g di saccarosio (soluto poco volatile, P_M = 342 g/mol) in 500 g di $H_2 0$ a 26°C (P_M = 18 g/mol, P° = 25,2 mm di Hg), possiamo calcolare di quanto si abbassa la tensione di vapore del solvente, calcolando semplicemente la frazione molare del soluto

$$\chi_{soluto} = \frac{n_{sacc}}{n_{acqua} + n_{sacc}} = \frac{\frac{W_{sacc}}{P_{M_{sacc}}}}{\frac{W_{acqua}}{P_{M_{acqua}}} + \frac{W_{sacc}}{P_{M_{sacc}}}} = \frac{\frac{100}{342}}{\frac{500}{18} + \frac{100}{342}} = 0{,}01$$

La tensione di vapore del solvente si abbassa dunque dell'1%, pari 25,2·0,01 = 0.25 mm di Hg e la tensione di vapore della soluzione sarà pari a

$$P = P^o_{solv} \cdot \chi_{solv} = 25,2 \cdot 0,99 = 24,95mm$$

Si noti infine che se due componenti una soluzione possiedono diversa volatilità (diverse tensioni di vapore), quello più volatile tenderà ad arricchire maggiormente il vapore e la sua frazione molare nella miscela gassosa risulterà, per la legge di Dalton, superiore alla sua frazione molare nella soluzione.

Se ad esempio mescoliamo, a 25°C, 15 moli di acqua (tensione di vapore 23,8 mm) con 15 moli di alcool etilico (tensione di vapore 58,9 mm), per la legge di Raoult la tensione di vapore della soluzione sarà pari a

$$P = 23,8 \cdot \frac{15}{30} + 58,9 \cdot \frac{15}{30} = 11,9 + 29,45 = 41,35$$

Si noti che la pressione parziale del vapor d'acqua nella miscela gassosa è di 11,9 mm di Hg, mentre la pressione parziale dell'alcool etilico gassoso è di 29,45 mm di Hg.
Per la legge di Dalton la frazione molare di un componente una miscela gassosa è esattamente pari al rapporto tra la sua pressione parziale e la pressione totale, per cui la frazione molare dell'alcool etilico nella miscela gassosa sarà pari a

$$\chi_{etilico_G} = \frac{P_{etilico}}{P_{totale}} = \frac{29,45}{41,35} = 0,71$$

superiore alla frazione molare dell'etilico in soluzione $\left(\chi_{etilico_S} = \frac{15}{30} = 0,5\right)$. Il componente più volatile si trova dunque nel vapore in percentuale maggiore rispetto a quanto non sia in soluzione.

Questa circostanza permette normalmente di separare i due componenti una soluzione per ***distillazione***. Il vapore che si ottiene facendo bollire una soluzione èinfatti più ricco nell'elemento più volatile. Se i vapori così ottenuti vengono poi fatti condensare, la nuova soluzione che se ne ottiene risulta anch'essa più concentrata nell'elemento più volatile. Eseguendo più volte il processo è possibile separare completamente i due componenti.

Ciò non è invece possibile per le soluzioni azeotropiche. Una *soluzione azeotropica* o *azeòtropo* è una soluzione in cui, per una certa concentrazione, il vapore presenta la stessa composizione del liquido. A tale concentrazione la soluzione si comporta come se fosse formata da un unico componente. Ad esempio le soluzioni idroalcoliche di acqua ed etanolo (alcool etilico) presentano un punto azeotropico al 95,57% di etanolo con temperatura di ebollizione di 78,15°C. Per distillazione è dunque impossibile ottenere etanolo puro. Quando si arriva infatti ad ottenere per distillazione la soluzione azeotropica, i vapori che essa forma sono sempre formati dal 95,57% di etanolo e dal 4,43% di acqua.

Innalzamento ebullioscopico ed abbassamento crioscopico

Abbiamo visto come la temperatura di ebollizione di un liquido sia la temperatura alla quale la tensione di vapore eguaglia la pressione esterna. Si è inoltre osservato come l'aggiunta di un soluto non volatile abbassi la tensione di vapore di un solvente. Ciò ha dunque come conseguenza che quando una soluzione raggiunge la temperatura di ebollizione del suo solvente, la sua tensione di vapore è inferiore a quella necessaria per produrre l'ebollizione. La temperatura di ebollizione di una soluzione risulta quindi superiore a quella del solvente puro.

La differenza tra la temperatura di ebollizione della soluzione e quella del solvente puro è detta **innalzamento ebullioscopico** (Δt_{eb}) ed è proporzionale alla concentrazione molale della soluzione

$$\Delta t_{eb} = k_{eb} \cdot m$$

dove k_{eb} è una costante di proporzionalità, detta **costante ebullioscopica**, il cui valore dipende dalla natura chimica del solvente (non del soluto).

Un effetto analogo si ha anche sul punto di congelamento (o di solidificazione, o di fusione). La presenza di un soluto poco volatile abbassa infatti il punto di congelamento. La variazione nel punto di congelamento viene detta **abbassamento crioscopico** (Δt_{cr}) e si dimostra come anch'esso sia proporzionale alla molalità della soluzione

$$\Delta t_{cr} = k_{cr} \cdot m$$

dove k_{cr} è una costante di proporzionalità, detta **costante crioscopica**, il cui valore dipende dalla natura chimica del solvente (non del soluto).

Proprietà colligative

Si definiscono proprietà colligative di un sistema quelle proprietà il cui valore dipende dal numero delle particelle presenti e non dalla loro natura chimica e fisica. Ad esempio la pressione ed il volume dei gas sono proprietà colligative.

Per quanto riguarda le soluzioni risultano proprietà colligative la *pressione osmotica*, l'*abbassamento relativo della tensione di vapore* nelle soluzioni, l'*innalzamento ebullioscopico* e l'*abbassamento crioscopico*.

Per esemplificare quanto detto prendiamo in considerazione la pressione osmotica.
Abbiamo visto che la pressione osmotica si calcola

$$\pi = MRT$$

La pressione osmotica di una soluzione 0,1 M di un qualsiasi soluto a 20°C dovrebbe dunque essere pari a

$$\pi = 0{,}1 \cdot 0{,}082 \cdot 293 = 2{,}4 atm$$

ma se misuriamo la pressione osmotica di una soluzione 0,1 M di cloruro di sodio, NaCl nelle stesse condizioni di temperatura, troviamo un valore doppio, pari a 4,8 atm.

Il fenomeno si spiega facilmente se pensiamo che il cloruro di sodio, come quasi tutti i sali, è un elettrolita forte ($\alpha = 1$) ed è quindi completamente dissociato. In soluzione non si trovano dunque 0,1 moli per litro di molecole di NaCl, ma 0,1 mol/l di ioni Na^+ e 0,1 mol/l di ioni Cl^-, per un totale di 0,2 mol/l di particelle.
Poiché la pressione osmotica è una proprietà colligativa, il suo valore effettivo dipende dal numero di particelle effettivamente presenti, che in questo caso particolare risultano essere esattamente il doppio di quelle teoricamente immesse in soluzione.
In generale dunque per ottenere dei valori attendibili per le proprietà colligative sarà necessario moltiplicare il numero di moli teoriche per un coefficiente che ci dia il numero di particelle effettivamente presenti in soluzione.
Per trovare il numero di particelle effettivamente presenti possiamo procedere in questo modo: supponiamo di mettere in soluzione n moli di un elettrolita E il quale si dissoci in ν ioni e presenti un grado di dissociazione α.

Allora

n = numero di moli inizialmente presenti
$n\alpha$ = numero di moli che si dissociano
$n - n\alpha$ = numero di moli indissociate
$n\alpha\nu$ = numero di ioni che si formano dalle moli dissociate
$(n - n\alpha) + n\alpha\nu$ = numero di moli indissociate + numero di ioni che si formano = numero totale di particelle

Raccogliendo a fattor comune il numero di moli n inizialmente presenti si ottiene:

$$n(1 - \alpha + \alpha\nu)$$

La quantità $(1 - \alpha + \alpha\nu)$ è detta numero i di van't Hoff e rappresenta per l'appunto il coefficiente per cui è necessario moltiplicare il numero di moli iniziali n per ottenere il numero di particelle effettivamente presenti in soluzione.
Il numero i di van't Hoff rappresenta quindi il coefficiente per cui è necessario moltiplicare il valore teorico di una proprietà colligativa per ottenere il valore effettivo. Nel caso della pressione osmotica possiamo dunque scrivere

$$\pi_{effettiva} = \pi_{teorica} \cdot \mathrm{i} = \frac{(n \cdot \mathrm{i})RT}{V}$$

Elementi di Stechiometria

Valenza: Termine *obsoleto* per indicare **il numero di altri elementi che un elemento può legare**. Attualmente questo termine è sostituito da **COVALENZA**
Valenza ionica: Termine usato per identificare **la carica che uno ione può assumere**.

Il Numero di Ossidazione

Oggi si preferisce parlare di **numero o grado di ossidazione**. Un termine solo in parte alternativo ai due precedenti, ma concettualmente molto più importante e descrittivo. Il numero o grado di ossidazione si può definire come:
"La carica che assumerebbe un elemento in un composto, se si attribuissero gli elettroni di legame all'elemento più elettronegativo".
Tale definizione richiede un paio di precisazioni affinché possa essere di utilità pratica:
(a) Nel caso di un legame fra due elementi uguali (o della stessa elettronegatività) si assegna un elettrone a ciascun elemento.
(b) La carica che l'elemento *"assume"*, si determina dal confronto con la configurazione elettronica esterna dell'elemento, nel suo stato fondamentale.

Regole per assegnare i numeri di ossidazione

Oltre che attraverso la definizione data, i numeri di ossidazione si possono determinare applicando le regole che seguono. Questa via è più rapida e più semplice, specialmente se non si è in grado di rappresentare la formula di struttura del composto.

1. Gli elementi allo stato fondamentale hanno numero di ossidazione zero.
2. L'ossigeno nei composti ha sempre numero di ossidazione -2, tranne che nei perossidi (-1), nei superossidi (-1/2) e nell'ossido di fluoro (+2).
3. L'idrogeno nei composti ha sempre numero di ossidazione +1, tranne che negli idruri metallici (-1)
4. Negli ioni monoatomici il numero di ossidazione coincide con la carica (valenza ionica) dello ione.
5. La somma algebrica dei numeri di ossidazione degli elementi di un composto deve risultare pari alla carica del composto. Zero se il composto è una specie neutra.

Gli Ossidi: Composti binari dell'Ossigeno

Negli ossidi, l'Ossigeno ha sempre no. di ossidazione -2. Gli ossidi dei non metalli vengono anche detti anidridi. Il termine anidridi è tuttavia obsolescente ed è tuttora consentito solo per alcuni ossidi: CO_2 (anidride carbonica), SO_2 (anidride solforosa), SO_3 (anidride solforica). Attualmente la IUPAC impone di usare i prefissi mono-, di-, tri- tetra-, penta- etc. per indicare il numero degli elementi che compongono l'ossido. Gli ossidi dei non metalli hanno proprietà acide. La maggior parte di essi, reagendo con l'acqua, generano infatti acidi ossigenati (ossiacidi). Questi ossidi sono tipicamente covalenti. Gli ossidi della maggior parte dei metalli hanno proprietà basiche. Reagendo con l'acqua generano idrossidi. Gli ossidi dei metalli del I e del II gruppo hanno caratteristiche spiccatamente ioniche. Alcuni elementi danno ossidi con proprietà anfotere, ovvero possono avere caratteristiche acide o basiche. La natura acido-base di un ossido (specialmente di metalli di transizione e di semimetalli) può infatti variare dal basico all'acido all'aumentare del grado di ossidazione dell'elemento. Un esempio classico è quello del cromo, il cui ossido è acido quando il numero di ossidazione è +6, ed è basico o anfotero quando il numero di ossidazione è +2 o +3. Anche il manganese ha proprietà analoghe.

Tabella 5 - Formule di Ossidi comuni

	nomenclatura consigliata	*alternativa (obsoleta)*	*n.o.*
Na_2O	ossido di sodio		+1
K_2O	ossido di potassio		+1
MgO	ossido di magnesio		+2
CaO	ossido di calcio		+2
Al_2O_3	ossido di alluminio		+3
FeO	ossido di ferro (II)	ossido ferroso	+2
Fe_2O_3	ossido di ferro (III)	ossido ferrico	+3
CO	(mon)ossido di carbonio	(è un ossido basico)	+2
CO_2	biossido di carbonio	anidride carbonica	+4
N_2O	ossido di diazoto	protossido di azoto	+1
NO	(mon)ossido di azoto		+2
N_2O_3	triossido di diazoto	anidride nitrosa	+3
NO_2	biossido di azoto		+4
N_2O_5	pentossido di diazoto	anidride nitrica	+5
SO_2	biossido di zolfo	anidride solforosa	+4
SO_3	triossido di zolfo	anidride solforica	+6
Cl_2O	ossido di dicloro	anidride ipoclorosa	+1
Cl_2O_3	triossido di dicloro	anidride clorosa	+3
Cl_2O_5	pentossido di dicloro	anidride clorica	+5
Cl_2O_7	eptossido di dicloro	anidride perclorica	+7

Nella scrittura della formula bruta di qualsiasi composto neutro (privo di carica), occorre sempre prestare attenzione al fatto che **la somma algebrica dei numeri di ossidazione degli elementi deve risultare ZERO**. Ricordando che l'Ossigeno ha sempre no. di ossidazione -2, per "costruire" la formula di un ossido, occorrerà prendere un numero di ossigeni e un numero di atomi dell'altro elemento tali da soddisfare questa condizione.

Perossidi: Composti contenenti il gruppo perossido: -O-O-

Nei perossidi, l'Ossigeno ha no. di ossidazione -1. Possono essere **covalenti** (ad esempio, perossido di idrogeno o acqua ossigenata, H_2O_2) o **ionici** (ad esempio, perossido di sodio, Na_2O_2, perossido di calcio, CaO_2). In questi ultimi, il gruppo perossido è ovviamente presente in forma ionica: O_2^{2-}

I Superossidi: Composti ionici contenenti lo ione superossido: O_2^-

Nei superossidi, l'Ossigeno ha no. di ossidazione -1/2.

Acidi Ossigenati o Ossiacidi

Composti ternari formati da H, O e un non-metallo, oppure un metallo il cui ossido abbia proprietà acide (esempio: Cr, Mn, V).

• Le formule degli ossiacidi si scrivono secondo lo schema **HXO**, ovvero indicando nell'ordine l'idrogeno, l'elemento caratteristico e l'ossigeno.

• Viceversa le formule degli idrossidi seguono lo schema **XOH**, metallo - ione idrossido. Questa convenzione consente un immediato riconoscimento della natura acida o basica del composto.

La nomenclatura degli ossiacidi è strutturata in modo da mettere in evidenza il grado di ossidazione dell'elemento caratteristico:
Desinenza **-oso** = no. ox. **Minore**
Desinenza **-ico** = no. ox. **Maggiore**

I numeri di ossidazione cui si fa riferimento non sono tutti i possibili numeri di ossidazione dell'elemento, ma ***quelli che esso assume negli ossiacidi che può generare***.
Esempio: acido solforoso (H_2SO_3, n.o. **S** = +4) e acido solforico (H_2SO_4, n.o. **S** = +6)
Qualora tali desinenze non siano sufficienti -e solo allora-, si fa ricorso ai prefissi **ipo-** (per indicare il no. ox. più basso) e **per-** (per indicare quello più alto).
In pratica, secondo le raccomandazioni IUPAC, il prefisso **ipo-** è consentito solo negli acidi: iponitroso ($H_2N_2O_2$) e ipocloroso, ipobromoso, ipoiodoso (schema HXO);
il prefisso **per-** è consentito solo negli acidi: perclorico, perbromico, periodico, permanganico (tutti con schema HXO_4).
Nei **sali** (e negli anioni), le desinenze **-oso** e **-ico** diventano rispettivamente **-ito** e **-ato**, mentre eventuali prefissi si conservano invariati.

Acidi Ossigenati o Ossiacidi Acidi meta, orto e piro

Talvolta può essere necessario distinguere il diverso "grado di idratazione" di un ossiacido, ovvero il diverso contenuto di molecole d'acqua. Tale distinzione si fa mediante i prefissi meta-, orto- e piro- (o di-).

- Si definisce **orto** l'acido che contiene il maggior numero possibile di molecole d'acqua.
- L'acido **meta** contiene una molecola d'acqua in meno rispetto all'orto.
- Il termine **di** (o **piro**) si usa invece per indicare gli ossiacidi che derivano dalla condensazione di due molecole di un ortoacido.

La formula bruta degli acidi '**di**' si costruisce quindi raddoppiando gli elementi dell'acido orto e sottraendo due idrogeni e un ossigeno.
Anche questi prefissi si conservano invariati nella nomenclatura dei sali (e degli anioni).

Per quanto riguarda i prefissi *orto* e *meta*, la IUPAC ha approvato il loro uso solo per i seguenti acidi :
ortoborico (H_3BO_3), **ortosilicico** (H_4SiO_4), **ortofosforico** (H_3PO_4), **ortoperiodico** (H_5IO_6); **metaborico** (HBO_2), **metasilicico** (H_2SiO_3), **metafosforico** $(HPO_3)_n$.

Il prefisso *piro* è consentito solo per l'**acido pirofosforico** ($H_4P_2O_7$); in tutti gli altri casi si dovrebbe usare il prefisso **di-**.
Tioacidi: con questo termine si indica la sostituzione di un O con S in un ossiacido. Esempio: $H_2S_2O_3$, **acido tiosolforico** (ipotetico).

Perossoacidi: si indica la sostituzione di -O- con -O-O- (gruppo perossido). Esempio: $H_2S_2O_8$, **acido perossodisolforico**; H_2SO_5, **acido perosso(mono)solforico**.

	acido	anione		n.o.
HBO_2	metaborico	metaborato	BO_2^-	+3
H_3BO_3	(orto) borico	ortoborato	BO_3^{3-}	+3
H_2CO_3	(meta) carbonico	carbonato	CO_3^{2-}	+4
H_4CO_4	ortocarbonico	ortocarbonato	CO_4^{4-}	+4
$H_6C_2O_7$	pirocarbonico	pirocarbonato	$C_2O_7^{6-}$	+4
HNO_2	nitroso	nitrito	NO_2^-	+3
HNO_3	nitrico	nitrato	NO_3^-	+5
H_3PO_2	ipofosforoso	ipofosfito	$H_2PO_2^-$	+1
H_3PO_3	(orto) fosforoso	fosfito	HPO_3^{2-}	+3
$(HPO_3)_n$	metafosforico	(vedi testo)	-	+5
H_3PO_4	(orto) fosforico	fosfato	PO_4^{3-}	+5
$H_4P_2O_7$	pirofosforico	pirofosfato	$P_2O_7^{4-}$	+5
H_2SO_3	solforoso	solfito	SO_3^{2-}	+4
H_2SO_4	solforico	solfato	SO_4^{2-}	+6
$H_2S_2O_7$	disolforico	disolfato	$S_2O_7^{2-}$	+6
H_2CrO_4	cromico	cromato	CrO_4^{2-}	+6
$H_2Cr_2O_7$	dicromico	dicromato	$Cr_2O_7^{2-}$	+6
$HClO$	ipocloroso	ipoclorito	ClO^-	+1
$HClO_2$	cloroso	clorito	ClO_2^-	+3
$HClO_3$	clorico	clorato	ClO_3^-	+5
$HClO_4$	perclorico	perclorato	ClO_4^-	+7
H_2MnO_4	manganico	manganato	MnO_4^{2-}	+6
$HMnO_4$	permanganico	permanganato	MnO_4^-	+7

Tabella 6 - Le Formule degli Ossiacidi

Gli acidi si dicono monoprotici, diprotici, triprotici etc., a seconda del numero di idrogenioni che possono dissociare. L'anione riportato in tabella è quello prodotto dalla dissociazione completa dell'acido. Il fluoro non forma acidi ossigenati.
Gli acidi ipofosforoso e fosforoso sono detti più correttamente **fosfinico** e **fosfonico** ed i loro relativi anioni *fosfonito* e *fosfonato*. Il fatto che gli anioni di questi due acidi contengano atomi di idrogeno, indica che tali idrogeni non sono dissociabili. Essi sono infatti legati direttamente al fosforo.

Gli Idrossidi: Composti ternari formati da H, O e un metallo

In maniera più appropriata, si possono definire come composti formati da un metallo e ioni OH^- (idrossido), mettendone in evidenza la natura ionica. Le formule degli idrossidi si scrivono secondo lo schema XOH, metallo - ione idrossido. Viceversa, le formule degli ossiacidi seguono lo schema HXO, idrogeno - elemento caratteristico - ossigeno. Questa convenzione consente un immediato riconoscimento della natura basica o acida del composto.
Esempi:
$NaOH$, idrossido di sodio; KOH, idrossido di potassio ; $Mg(OH)_2$, idrossido di magnesio; $Ca(OH)_2$, idrossido di calcio; $Zn(OH)_2$, idrossido di zinco; $Fe(OH)_2$, idrossido di ferro (II); $Al(OH)_3$, idrossido di alluminio; ; $Cr(OH)_3$, idrossido di cromo; $Fe(OH)_3$, idrossido di ferro (III).

Gli idrossidi hanno generalmente proprietà **basiche**.

Gli idrossidi dei metalli alcalini (gruppo IA) sono tipiche basi forti. Alcuni idrossidi dei metalli alcalino-terrosi (in particolare Mg) sono poco solubili e quindi basi molto deboli. Viceversa, idrossidi come $Al(OH)_3$ o $Zn(OH)_2$ hanno un comportamento anfotero.

.Gli Idruri: Composti binari dell'Idrogeno

I rapporti con cui l'idrogeno si lega con gli elementi dal I al VII gruppo sono fissi e si ripetono con estrema periodicità: 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1

• **Idruri metallici:** gli idruri dei gruppi IA e IIA sono detti idruri metallici. Negli idruri metallici, l'idrogeno ha no. ox. -1. Ad eccezione degli idruri di Li e Be, gli altri hanno cateristiche nettamente ioniche. In essi l'idrogeno è presente come ione idruro ($H:^-$).

• **Idruri covalenti:** gli idruri degli elementi dal IV gruppo in avanti hanno natura molecolare. Esempi: CH_4, metano; SiH_4, silano; NH_3, ammoniaca; PH_3, fosfina

• **Idracidi:** gli idruri del VI e del VII gruppo sono definiti più esattamente idracidi. Per la loro nomenclatura si premette il termine **acido** e di aggiunge la desinenza **-idrico** al nome dell'elemento caratteristico.

Esempi:
H_2S, acido solfidrico; **HF**, acido fluoridrico; **HCl**, acido cloridrico; **HBr**, acido bromidrico; **HI**, acido iodidrico. Si noti come la formula degli idruri acidi sia scritta **anteponendo** l'idrogeno all'altro elemento.

Nota: per questi composti, la IUPAC raccomanda l'uso alternativo di ***anione-uro di idrogeno***; ovvero:
solfuro, fluoruro, cloruro, bromuro, ioduro di idrogeno.

Un altro importante idracido (ma non un idruro) è l'*acido cianidrico*, HCN. I **cationi** derivati da idruri prendono il suffisso **-onio**. Ad esempio: PH_4^+, fosfonio; NH_4^+, ammonio; H_3O^+, ossonio (o idronio).

I **sali** che derivano dagli idracidi, cambiano il suffisso *-idrico* in **–uro.** Lo stesso suffisso, **-uro**, è quello che si dovrebbe assegnare a tutti gli *anioni monoatomici*: azoturo, solfuro, fluoruro, cloruro, bromuro, ioduro etc.

Sali: Sono composti ionici che si ottengono, normalmente, dalla reazione di un acido con una base. Non vi è molto da aggiungere alla loro nomenclatura, che abbiamo già indicato di volta in volta, parlando di ossiacidi e di idracidi e che riassumiamo brevemente nella tabella 7 che segue:

Tabella 7 – Vecchia nomenclatura ossiacidi

Acido	**Sale**
-oso	-ito
-ico	-ato
-idrico	-uro
Eventuali prefissi si mantengono invariati	

Per i sali che derivano dalla reazione incompleta di acidi poliprotici con basi forti e che quindi mantengono idrogeni acidi nell'anione (**sali acidi**). In tal caso si indica, prima dell'anione, il numero di idrogeni presenti, usando le particelle mono-, di-, tri- etc.

Esempi:
$NaHCO_3$, idrogenocarbonato di sodio (in alternativa a idrogenocarbonato, si usava una volta il termine *bicarbonato*);

KH_2PO_4, diidrogenofosfato di potassio;

$Ca(HSO_3)_2$, idrogenosolfito di calcio.

Sali contenenti gli ioni OH^- o O^{2-}

Si usano rispettivamente i termini **idrossi** e **ossi**.

Esempi:
$Mg(OH)Cl$, idrossicloruro di magnesio; **$PbOCl_2$**, ossidicloruro di piombo (IV)

• **Sali doppi:** I cationi si scrivono in ordine alfabetico e con lo stesso criterio si scrivono gli anioni. Nella nomenclatura, al nome dell'anione si fa seguire l'aggettivo **doppio**.

Esempi:
$KMgCl_3$, cloruro *doppio* di potassio e magnesio; **NH_4NaHPO_4**, idrogenofosfato *doppio* di ammonio e sodio.

EQUILIBRI IN SOLUZIONE: **Il prodotto ionico dell'acqua**

L'acqua pura presenta una piccolissima percentuale di molecole dissociate in ioni H^+ e ioni OH^- secondo il seguente equilibrio:

$$H_2O \rightleftarrows H^+ + OH^-$$

Anche per tale reazione di dissociazione è possibile calcolare una costante di equilibrio che, alla temperatura di 25°C, vale:

$$k = \frac{[H^+][OH^-]}{[H_2O]} = 1{,}8 \cdot 10^{-16}$$

Dal valore della costante di dissociazione deduciamo che l'equilibrio è fortemente spostato verso sinistra. Per questo motivo, possiamo ritenere trascurabile la frazione x di molecole d'acqua che si dissociano rispetto all'acqua indissociata, e considerare la concentrazione di quest'ultima pari alla concentrazione dell'acqua pura.

$$k = \frac{[H^+]_{eq}[OH^-]_{eq}}{[H_2O]_{eq}} = \frac{x^2}{[H_2O]_{iniz} - x} \approx \frac{x^2}{[H_2O]_{iniz}}$$

La concentrazione dell'acqua pura è ovviamente una costante e vale

$$[H_2O] = \frac{n}{V} = \frac{W/P_M}{V} = \frac{1000/18}{1} = 55{,}55\,mol/l$$

Si conviene pertanto di inglobare la concentrazione dell'acqua nella costante di dissociazione, ottenendo

$$k_w = k \cdot [H_2O] = [H^+][OH^-] = x^2$$

La nuova costante k_W è detta *prodotto ionico dell'acqua* e vale

$$k_w = k \cdot [H_2O] = 1{,}8 \cdot 10^{-16} \cdot 55{,}55 = 10^{-14}$$

Poichè nell'acqua pura le uniche molecole che si dissociano sono ovviamente quelle dell'acqua e ogni molecola d'acqua che si dissocia produce uno ione H^+ ed uno ione OH^-, è evidente che le due specie ioniche dovranno trovarsi nell'acqua in numero uguale, dovranno cioè possedere la stessa concentrazione. Risulta pertanto evidente che la loro concentrazione dovrà essere pari a:

$$x = [H^+] = [OH^-] = \sqrt{k_w} = 10^{-7}\ mol/l$$

10^{-7} è evidentemente anche il numero di moli di acqua che si dissociano in un litro d'acqua. Possiamo pertanto calcolare il suo grado di dissociazione:

$$\alpha = \frac{n_{\text{dissociate}}}{n_{\text{iniziali}}} = \frac{10^{-7}}{55{,}55} = 1{,}8 \cdot 10^{-9}$$

il che significa che nell'acqua pura a 25°C si dissociano circa 2 molecole d'acqua su 1 miliardo.

Le soluzioni in cui $[H^+] = [OH^-] = 10^{-7}\ mol/l$ sono dette *neutre*

Le soluzioni in cui $[H^+] > [OH^-]$ sono dette *acide*

Le soluzioni in cui $[H^+] < [OH^-]$ sono dette *basiche*

Si tenga comunque presente che la reazione di dissociazione dell'acqua è una reazione endotermica e quindi, in base al principio di Le Chatelier, la k_W aumenta all'aumentare della temperatura. Così a temperature maggiori di 25°C la neutralità si raggiunge per concentrazioni degli ioni H^+ e OH^- leggermente superiori di 10^{-7} mol/l ($[H^+] = [OH^-] > 10^{-7}\ mol/l$).
Poiché a Temperatura costante k_W è costante, si osservi come nel caso sia nota la $[H^+]$ rimanga univocamente determinata anche $[OH^-]$ e viceversa.

Il pH e il pOH

Essendo $[H^+]$ e $[OH^-]$ espresse da valori molto piccoli risulta più comodo usare, per misurarle, una notazione logaritmica. Si conviene pertanto di esprimere la concentrazione degli ioni H^+ in termini di pH, il quale risulta definito tramite la seguente relazione:

$$pH = -\log_{10}\left[H^+\right] = \log_{10}\frac{1}{\left[H^+\right]}$$

In modo del tutto analogo si può definire come unità di misura della concentrazione degli ioni OH^- in una soluzione il pOH

$$pOH = -\log_{10}\left[OH^-\right] = \log_{10}\frac{1}{\left[OH^-\right]}$$

Tra pH e pOH esiste una semplice relazione che possiamo ottenere calcolando il logaritmo negativo di entrambi i membri del prodotto ionico dell'acqua

$$-\log_{10}\left(\left[H^+\right]\left[OH^-\right]\right) = -\log_{10}\left(10^{-14}\right)$$

da cui

$$-\log_{10}\left[H^+\right] - \log_{10}\left[OH^-\right] = pH + pOH = 14$$

La somma del pH e del pOH è sempre uguale a 14

Poiché nelle soluzioni neutre $\left[H^+\right] = \left[OH^-\right] = 10^{-7}\ mol/l$, allora per esse vale anche pH = pOH = 7

Costruiamo ora una tabella che metta in relazione il valore delle concentrazioni degli ioni H^+ e degli ioni OH^- con i valori del pH e del pOH

Tabella 8 – Valori di pH e POH

$[H^+]$	**pH**	$[OH^-]$	**pOH**
10^{-15}	**15**	10^{1}	**-1**
10^{-14}	**14**	10^{0}	**0**
10^{-13}	**13**	10^{-1}	**1**
10^{-12}	**12**	10^{-2}	**2**
10^{-11}	**11**	10^{-3}	**3**
10^{-10}	**10**	10^{-4}	**4**
10^{-9}	**9**	10^{-5}	**5**
10^{-8}	**8**	10^{-6}	**6**
10^{-7}	**7**	10^{-7}	**7**
10^{-6}	**6**	10^{-8}	**8**
10^{-5}	**5**	10^{-9}	**9**
10^{-4}	**4**	10^{-10}	**10**
10^{-3}	**3**	10^{-11}	**11**
10^{-2}	**2**	10^{-12}	**12**
10^{-1}	**1**	10^{-13}	**13**
10^{0}	**0**	10^{-14}	**14**
10^{1}	**-1**	10^{-15}	**15**

Come si può notare il pH può assumere anche valori negativi e valori superiori a 14. Si tratta comunque di casi piuttosto rari con concentrazioni di ioni H^+ eccezionalmente basse o elevate.
Si noti inoltre come, essendo la scala del pH una scala logaritmica, ogni grado di pH corrisponde ad una variazione nella concentrazione degli ioni H^+ pari a 10 volte. Così una soluzione a pH 2 presenta una concentrazione degli ioni H^+ 1000 volte maggiore di una soluzione a pH 5.

IL CALCOLO DEL pH

Calcolo pH per acidi e basi forti
Il calcolo del pH per soluzioni contenenti acidi e basi forti non presenta difficoltà, se naturalmente si conosce la concentrazione iniziale della soluzione. Infatti, poichè gli acidi e le basi forti in acqua sono completamente dissociati, la concentrazione degli ioni H^+ (per gli acidi) e degli ioni OH^- (per le basi) risultano uguali alla concentrazione iniziale.

ESEMPI
- Calcolare il pH di una soluzione 10^{-2} M di HCl.
Poichè l'acido cloridrico è un acido forte esso è completamente dissociato in 10^{-2} mol/l di ioni H^+ e 10^{-2} mol/l di ioni Cl^-. Il pH sarà pertanto pari a

$$pH = -\log[H^+] = -\log 10^{-3} = 3$$

- Calcolare il pH di una soluzione $3 \cdot 10^{-5}$ M di NaOH
Poichè l'idrossido di sodio è una base forte esso è completamente dissociato in $3 \cdot 10^{-5}$ mol/l di ioni OH^- e $3 \cdot 10^{-5}$ mol/l di ioni Nal^+. Il pH sarà pertanto pari a

$$pH = 14 - pOH = 14 - \left(-\log[OH^-]\right) = 14 - \left(-\log 3 \cdot 10^{-5}\right) = 14 - 4{,}52 = 9{,}48$$

- Calcolare il pH di una soluzione $5 \cdot 10^{-4}$ M di $Ba(OH)_2$
Poichè l'idrossido di bario si dissocia completamente in uno ione Ba^{2+} e 2 ioni OH^-, in tal caso la concentrazione finale degli ioni OH^- sarà doppia della concentrazione iniziale dell'idrossido e pari a 10^{-3} mol/l. La concentrazione degli ioni H+ sarà quindi pari a 10^{-11} ed il pH uguale a 11.

pH in soluzioni molto diluite di acidi (e basi) forti

Proviamo a calcolare il pH di una soluzione 10^{-7} M di HCl. Applicando quanto detto in precedenza il pH dovrebbe essere pari a 7. Si arriva cioè al risultato assurdo e paradossale che una soluzione che contiene un acido forte (per quanto molto diluito) è neutra.

In effetti quando la concentrazione di un acido o di una base forte scende sotto le 10^{-6} mol/l non è più possibile trascurare gli ioni H^+ provenienti dalla dissociazione dell'acqua, che, per l'acqua pura sappiamo essere 10^{-7} mol/l .
E' quindi necessario in questo caso prendere in considerazione contemporaneamente i due equilibri e sommare gli ioni H^+ provenienti dall'acido e quelli provenienti dall'acqua

$$HCl \Rightarrow H^+ + Cl^-$$
$$H_2O \rightleftarrows H^+ + OH^-$$

Naturalmente non è possibile semplicemente sommare i 10^{-7} ioni H+ provenienti dall'acido con i 10^{-7} ioni H+ provenienti dall'acqua pura, infatti mentre l'acido forte rimane completamente dissociato, l'acqua, in presenza dei 10^{-7} ioni H+ provenienti dall'acido, sposta il suo equilibrio verso sinistra, in risposta all'aumentata concentrazione di uno dei suoi prodotti di reazione (H^+). L'apporto di ioni H+ dell'acqua sarà dunque minore di 10^{-7} mol/l.
Se indichiamo con X gli ioni OH^- provenienti dalla dissociazione dell'acqua, gli ioni H+ complessivamente in soluzione saranno dati da X ioni provenienti dall'acqua più 10^{-7} ioni provenienti dall'acido. Poichè tali concentrazioni devono soddisfare al prodotto ionico dell'acqua potremo scrivere:

$$Kw = 10^{-14} = \left[H^+\right]\left[OH^-\right] = \left(X + 10^{-7}\right)X$$

risolvendo l'equazione di 2° grado si ottiene:

X = $[OH^-]$ = $6{,}18*10^{-8}$ mol/l $[H^+]$ = X + 10^{-7} = $1{,}62*10^{-7}$

ed il pH risulta perciò pari a:

$$pH = -\log_{10}\left[H^+\right] = -\log_{10}\left[1{,}62 \cdot 10^{-7}\right] = 6{,}79$$

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto impostando un sistema di due equazioni con incognite $[OH^-]$ e $[H^+]$.

$$\begin{cases} \left[H^+\right] \cdot \left[OH^-\right] = 10^{-14} \\ \left[H^+\right] = \left[OH^-\right] + \left[Cl^-\right] \end{cases}$$

dove la prima equazione è la condizione di equilibrio per la reazione di dissociazione dell'acqua (*prodotto ionico*) e la seconda è la cosiddetta *condizione di elettroneutralità*, per cui la soluzione deve essere complessivamente neutra e la somma delle cariche positive deve sempre essere pari alla somma delle cariche negative. Si osservi che $[Cl^-]$ non è un'incognita, ma vale in questo caso 10^{-7} mol/l derivando dalla completa dissociazione dell'acido.

pH in soluzioni di Acidi (e basi) deboli: K_a e K_b

Per il calcolo del pH di soluzioni di acidi e basi deboli non è sufficiente conoscere la loro concentrazione iniziale, in quanto non sono completamente dissociati in soluzione acquosa. Per determinare che concentrazione assumeranno gli ioni H^+ (o OH^-) è quindi necessario conoscere anche il valore della costante dell'equilibrio di dissociazione o costante di dissociazione.

Per un generico acido monoprotico HA, l'equilibrio di dissociazione è

$$HA \Leftrightarrow H^+ + A^-$$

La costante di equilibrio, nota come costante di dissociazione dell'acido (o kappa acida) $\mathbf{k_a}$, vale

$$k_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]}$$

Per gli acidi deboli poliprotici vi sono naturalmente tante costanti di dissociazione quanti sono gli atomi di idrogeno dissociabili (costante di prima dissociazione $k_{a_{(I)}}$, costante di seconda dissociazione $k_{a_{(II)}}$, etc)

Ad esempio per l'acido solforoso a 25°C si ha

$$H_2SO_3 \Leftrightarrow H^+ + HSO_3^- \qquad k_{a_{(I)}} = \frac{[H^+][HSO_3^-]}{[H_2SO_3]} = 1,54 \cdot 10^{-2}$$

$$HSO_3^- \Leftrightarrow H^+ + SO_3^{2-} \qquad k_{a_{(II)}} = \frac{[H^+][SO_3^{2-}]}{[HSO_3^-]} = 1,02 \cdot 10^{-7}$$

Naturalmente l'acido cede più facilmente il primo ione H^+, mentre il secondo ione H^+, che deve abbandonare uno ione negativo ed è quindi trattenuto con maggior forza, si separa con maggior difficoltà.

A conferma di quanto detto si può notare come nell'esempio riportato il valore di $k_{a_{(II)}}$ sia molto minore del valore di $k_{a_{(I)}}$. Il primo equilibrio di dissociazione è quindi più spostato verso destra del secondo.
Si tratta di un comportamento generale. Tutti gli acidi deboli poliprotici presentano infatti valori decrescenti per le costanti di dissociazione successive alla prima.
Quanto detto per gli acidi deboli vale anche per le basi deboli. Ad esempio per una generica base BOH, l'equilibrio di dissociazione è:

$$BOH \Leftrightarrow B^+ + OH^-$$

La costante di equilibrio, nota come costante di dissociazione della base (o kappa basica) $\mathbf{k_b}$, vale

$$k_b = \frac{[B^+][OH^-]}{[BOH]}$$

Naturalmente anche per le basi deboli vi possono essere tante k_b quanti sono i gruppi ossidrili dissociabili.

Il valore assunto dalla costante di dissociazione è utilizzato come una *misura della forza di un acido (o di una base)*, in quanto è indipendente dalla concentrazione iniziale dell'elettrolita. Possiamo in altre parole affermare che un acido (o una base) è tanto più debole quanto più basso è il valore della sua costante di dissociazione.

Ad esempio l'acido ipocloroso, HClO ($k_a = 2,95 \cdot 10^{-8}$) è più debole dell'acidi fluoridrico HF ($k_a = 3,53 \cdot 10^{-4}$).

Il grado di dissociazione α di un acido (o di una base) non può essere usato come misura della sua forza in quanto si può facilmente dimostrare che esso varia con la concentrazione iniziale.

Sia ad esempio HA un acido debole generico, k_a la sua costante di dissociazione e C_{iniz} la sua concentrazione iniziale. Se α è il suo grado di dissociazione, all'equilibrio si formeranno αC_{iniz} mol/l di ioni H^+ e αC_{iniz} mol/l di ioni A^-, mentre rimarranno indissociate (C_{iniz} - αC_{iniz}) mol/l di di HA.
Riportiamo quanto detto nella tabella 9

Tabella 9 – Speci presenti in soluzione.

	iniziale	d'equilibrio
[HA]	C_{iniz}	$C_{iniz} - \alpha C_{iniz}$
$[H^+]$	0	αC_{iniz}
$[A^-]$	0	αC_{iniz}

Se riportiamo ora i valori di equilibrio in funzione di k_a, otteniamo

$$k_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{(\alpha \cdot C_{iniz})^2}{C_{iniz} - \alpha \cdot C_{iniz}} = \frac{\alpha^2 C_{iniz}}{1-\alpha}$$

Da tale relazione si deduce facilmente che, essendo k_a costante, al diminuire della concentrazione iniziale il grado di dissociazione α deve aumentare. In altre parole anche un acido debole, se molto diluito, può essere quasi completamente dissociato. Tutti gli elettroliti tendono a dissociarsi completamente quando la concentrazione tende a zero.

Naturalmente il fatto che un acido debole a concentrazioni molto basse sia molto dissociato non significa che in tali condizioni diventi forte. Infatti a basse concentrazioni dell'acido anche gli ioni H^+ che si producono sono complessivamente molto pochi ed il pH rimane sempre molto vicino a 7.

Calcoliamo ad esempio il pH ed il grado di dissociazione di una soluzione 1M e di una soluzione 10^{-2}M di acido fluoridrico ($k_a = 3{,}53 \cdot 10^{-4}$). L'acido fluoridrico è un acido debole e si dissocia secondo il seguente equilibrio

$$HF \Leftrightarrow H^+ + F^-$$

Se poniamo pari ad X il numero di mol/l di HF che si dissociano, possiamo costruire la seguente

tabella delle concentrazioni iniziali e delle concentrazioni di equilibrio:

	iniziale	d'equilibrio
[HF]	1	1 - X
$[H^+]$	0	X
$[F^-]$	0	X

Poniamo ora le concentrazioni di equilibrio, espresse in funzione di X, in relazione con la k_a

$$k_a = \frac{[H^+][F^-]}{[HF]} = 3{,}53 \cdot 10^{-4} = \frac{X^2}{1-X}$$

Risolvendo rispetto ad X si ottiene

$$[H^+] = X = 1{,}86 \cdot 10^{-2} \text{ mol/l}$$

il pH vale

$$pH = -\log [H^+] = -\log 1{,}86 \cdot 10^{-2} = 1{,}73$$

mentre il grado di dissociazione risulta pari a

$$\alpha = \frac{n_{dissociate}}{n_{iniziali}} = \frac{1{,}86 \cdot 10^{-2}}{1} = 1{,}86 \cdot 10^{-2}$$

Risultano quindi dissociate quasi *2 molecole ogni 100*.

Vediamo ora come varia il pH ed il grado di dissociazione diluendo la soluzione.
Se la concentrazione iniziale della soluzione è ora pari a 10^{-2} mol/l, la relazione di equilibrio diventa

$$k_a = \frac{[H^+][F^-]}{[HF]} = 3{,}53 \cdot 10^{-4} = \frac{X^2}{10^{-2} - X}$$

Risolvendo rispetto ad X si ottiene

$$[H^+] = X = 1{,}71 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l}$$

il pH vale

$$pH = -\log [H^+] = -\log 1{,}71 \cdot 10^{-3} = 2{,}77$$

mentre il grado di dissociazione risulta pari a

$$\alpha = \frac{n_{dissociate}}{n_{iniziali}} = \frac{1,71 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 0,17$$

Risultano quindi dissociate quasi *2 molecole ogni 10*.
Diminuendo la concentrazione iniziale è dunque aumentata la percentuale di molecole che si dissociano. Nonostante questo il pH è aumentato, a dimostrazione del fatto che la seconda soluzione è meno acida della prima.

Metodo semplificato per il calcolo del pH di acidi (o basi deboli)

In certi casi è possibile calcolare la concentrazione di equilibrio degli ioni H+, ricorrendo a delle approssimazioni che consentono di non dover risolvere le equazioni di equilibrio.
E' possibile ricorrere a tali semplificazioni quando possiamo ragionevolmente ritenere che la concentrazione di equilibrio degli ioni H^+ sia molto minore della concentrazione iniziale dell'acido. Ciò accade quando il grado di dissociazione dell'acido assume valori bassi. Affinchè tali condizioni si verifichino è necessario che l'acido sia debole (k_a bassa) e che la soluzione non sia eccessivamente diluita (se è molto diluita aumenta infatti il grado di dissociazione.
In linea di massima possiamo applicare tale metodo quando il valore della k_a è minore del valore della concentrazione iniziale di almeno tre ordini di grandezza.

Prendendo in considerazione il solito acido debole generico HA, l'equilibrio di dissociazione è:

$$HA \Leftrightarrow H^+ + A^-$$

e la costante di equilibrio vale:

$$k_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]}$$

Se poniamo pari ad X il numero di mol/l di HA che si dissociano, possiamo costruire la seguente tabella delle concentrazioni iniziali e delle concentrazioni di equilibrio

	iniziale	d'equilibrio
[HA]	C_{iniz}	C_{iniz} - X
$[H^+]$	0	X
$[A^-]$	0	X

Poniamo ora, come al solito, le concentrazioni di equilibrio, espresse in funzione di X, in relazione con la k_a

$$k_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{X^2}{C_{iniz} - X}$$

Ora, se, come abbiamo ipotizzato, X << C_{iniz}, è possibile trascurare la X nella differenza a denominatore. La relazione diventa allora

$$k_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{X^2}{C_{iniz} - \cancel{X}} = \frac{X^2}{C_{iniz}}$$

Dalla quale otteniamo la seguente relazione semplificata, per il calcolo della concentrazione di equilibrio degli ioni H^+

$$[H^+]_{eq} = \sqrt{k_a \cdot C_{iniz}}$$

Calcolo del pH in soluzioni di Acidi (e basi) deboli poliprotici

Il calcolo del pH di acidi e basi deboli poliprotici, implicando più equilibri di dissociazione, ognuno caratterizzato da una propria costante di equilibrio, risulta essere più complesso. In generale è infatti necessario risolvere sistemi di più equazioni.
Molto spesso accade però che le costanti di dissociazione successive alla prima presentino valori molto minori. In tal caso è possibile dimostrare che <u>*la concentrazione di equilibrio degli ioni H^+ dipende in pratica solo dal primo equilibrio*</u>. Inoltre i calcoli per la determinazione di tutte le concentrazioni di equilibrio possono venire notevolmente semplificati considerando ciascun equilibrio di dissociazione separatamente ed in modo indipendente dagli altri.

Per esemplificare quanto affermato calcoliamo il pH di una soluzione 0,5 M di acido solforoso, sapendo che la costante di prima dissociazione è $k_{a_{(I)}} = 10^{-2}$, mentre la costante di seconda dissociazione vale $k_{a_{(II)}} = 2{,}6 \cdot 10^{-7}$.

I due equilibri di dissociazione sono:

$$H_2SO_3 \Leftrightarrow H^+ + HSO_3^-$$

$$HSO_3^- \Leftrightarrow H^+ + SO_3^{2-}$$

Per risolvere correttamente il problema è necessario considerare contemporaneamente i due equilibri in quanto gli ioni H^+ prodotti dalla prima dissociazione tendono a spostare verso sinistra il secondo equilibrio e viceversa.

Chiamando X il numero di mol/l di acido solforoso che si dissociano nel primo equilibrio e Y il numero di mol/l di HSO_3^- che si dissociano nel secondo equilibrio, avremo per il <u>primo equilibrio</u>

	iniziale	d'equilibrio
$[H_2SO_3]$	0,5	0,5 - X
$[H^+]$	0	X + Y
$[HSO_3^-]$	0	X - Y

Infatti alle X mol/l di ioni H^+ prodotti dal primo equilibrio è necessario aggiungere le Y mol/l di ioni H^+ prodotti dal secondo equilibrio, mentre alle X mol/l di anioni HSO_3^- prodotti dal primo equilibrio è necessario togliere le Y mol/l che si dissociano nel secondo equilibrio.

per il <u>secondo equilibrio</u>

	iniziale	d'equilibrio
$[HSO_3^-]$	0	X - Y
$[H^+]$	0	X + Y
$[SO_3^{2-}]$	0	Y

Sarebbe quindi necessario risolvere il seguente sistema di equazioni, che garantisce che entrambe le condizioni di equilibrio siano contemporaneamente soddisfatte.

$$K_{a_{(I)}} = \frac{[H^+]\cdot[HSO_3^-]}{[H_2SO_3]} = \frac{(X+Y)\cdot(X-Y)}{0{,}5-X}$$

$$K_{a_{(II)}} = \frac{[H^+]\cdot[SO_3^{2-}]}{[HSO_3^-]} = \frac{(X+Y)\cdot Y}{X-Y}$$

La risoluzione risulta però lunga e laboriosa, generando tra l'altro un'equazione di grado superiore al secondo.

In questo caso possiamo comunque risolvere il problema in modo approssimato poiché la costante di seconda dissociazione risulta essere di ben 5 ordini di grandezza inferiore della costante di prima dissociazione e possiamo quindi ragionevolmente ritenere che gli ioni H^+ prodotti dal secondo equilibrio siano trascurabili rispetto a quelli prodotti dal primo. E' possibile quindi considerare il primo equilibrio di dissociazione prevalente e procedere alla soluzione separata dei due equilibri.

Prendiamo dunque in considerazione il primo equilibrio come se non fosse presente il secondo

$$K_{a_{(I)}} = \frac{\left[H^+\right]\cdot\left[HSO_3^-\right]}{\left[H_2SO_3\right]} = \frac{X^2}{0{,}5 - X} = 10^{-2}$$

La soluzione dell'equazione di 2° grado ci fornisce il seguente valore

$$X = [H^+]_I = [HSO_3^-] = 6{,}59\cdot10^{-2}$$

Dove $[H^+]_I$ rappresenta la concentrazione di ioni H^+ prodotti dalla prima dissociazione.

Utilizziamo ora la concentrazione di HSO_3^- trovata, come concentrazione iniziale per la seconda dissociazione e teniamo conto in questo caso che gli ioni H^+ provenienti dalla prima dissociazione spostano l'equilibrio verso sinistra

$$K_{a_{(II)}} = \frac{\left[H^+\right]\cdot\left[SO_3^{2-}\right]}{\left[HSO_3^-\right]} = \frac{\left(6{,}59\cdot10^{-2} + Y\right)Y}{6{,}59\cdot10^{-2} - Y} = 2{,}6\cdot10^{-7}$$

Essendo la K_a estremamente piccola Y avrà un valore che potrà essere tranquillamente trascurato sia nella somma a numeratore che nella differenza a denominatore. Otteniamo in tal modo il seguente risultato

$$Y = [H^+]_{II} = [SO_3^{2-}] = 2{,}6\cdot10^{-7}$$

Come si può notare la concentrazione di ioni H^+ provenienti dalla seconda dissociazione è talmente bassa che, anche se sommata alla concentrazione degli ioni H^+ proveniente dalla prima dissociazione non ne modifica il valore

$$[H^+]_{tot} = [H^+]_{\mathbf{I}} + [H^+]_{\mathbf{II}} = X + Y = 6{,}59\cdot10^{-2} + 2{,}6\cdot10^{-7} = 6{,}59\cdot10^{-2}$$

Possiamo inoltre verificare che gli ioni H^+ provenienti dalla seconda dissociazione sono in concentrazione talmente esigua da giustificare la trattazione separata del primo equilibrio. La loro presenza in soluzione sposta infatti l'equilibrio di prima dissociazione verso sinistra di una quantità assolutamente trascurabile.

In generale è possibile trattare gli equilibri separatamente, senza commettere grossi errori, quando le costanti di dissociazione differiscono di almeno 3 - 4 ordini di grandezza.

IDROLISI SALINA ed EQUILIBRIO DI IDROLISI

Non tutte le soluzioni saline sono neutre. Si osserva infatti sperimentalmente che alcune soluzioni saline sono neutre, alcune basiche ed altre ancora acide.
Tale fenomeno è legato alla possibilità che alcuni ioni provenienti dalla dissociazione del sale reagiscano con l'acqua per ridare parzialmente l'acido o la base da cui è derivato il sale.

Tale reazione è detta di *idrolisi salina* e per questo motivo a volte l'idrolisi salina viene considerata come una reazione inversa della reazione di salificazione.
Naturalmente si distingue un'*idrolisi neutra*, un'*idrolisi basica* ed un'*idrolisi acida* in relazione al pH della soluzione salina.

Idrolisi basica (sale derivato da base forte ed acido debole)
Si produce un'idrolisi basica quando viene sciolto in acqua un sale il cui anione deriva da un acido debole, mentre il catione metallico deriva da una base forte.
Prendiamo ad esempio l'ipoclorito di sodio NaClO, che deriva dall'acido ipocloroso HClO (acido debole con k_a piccola) e dall'idrossido di sodio NaOH (base forte con k_b elevata).

In soluzione acquosa l'ipoclorito è, come la maggior parte dei sali, completamente dissociato in ioni Na^+ e ioni ClO^-

$$NaClO \Leftrightarrow Na^+ + ClO^-$$

E' necessario ora analizzare in che modo tali ioni interferiscano con l'equilibrio di dissociazione dell'acqua

$$H_2O \Leftrightarrow H^+ + OH^-$$

Ora, mentre lo ione Na^+ non ha alcuna tendenza a riassociarsi con l'anione OH^- per dare l'idrossido di sodio indissociato, poiché NaOH è una base forte ed il suo equilibrio di dissociazione è completamente spostato verso destra;

$$NaOH \Rightarrow Na^+ + OH^-$$

l'anione ClO^- presenta una grande tendenza a riassociarsi con gli ioni H^+ prodotti dalla dissociazione dell'acqua per ridare l'acido ipocloroso, il cui equilibrio di dissociazione è invece fortemente spostato verso sinistra

$$HClO \Leftarrow H^+ + ClO^-$$

Poiché dunque lo ione ipoclorito consuma gli ioni H^+ all'equilibrio di dissociazione dell'acqua, quest'ultima, per il principio di Le Chatelier, sposta il suo equilibrio verso destra producendo altri ioni H^+ e naturalmente altrettanti ioni OH^-. Naturalmente all'equilibrio, poiché gli ioni H^+ vengono assorbiti dall'acido ipocloroso che si riassocia, in soluzione rimarrà un eccesso di ioni OH^-.
Per calcolare il pH di tali soluzioni sarebbe necessario considerare congiuntamente i due equilibri che interferiscono, quello dell'acqua e quello dell'acido debole, in modo da soddisfare contemporaneamente le relative equazioni di equilibrio.

Se indichiamo con:

Y = la quantità di acqua che si dissocia liberando Y mol/l di ioni OH^- e Y mol/l di ioni H^+

X = la quantità di anione ipoclorito che si riassocia rubando X mol/l di ioni H+ per formare X mol/l di acido indissociato
M = concentrazione iniziale del sale = concentrazione iniziale dell'anione ipoclorito

$$Kw = \left[H^+\right]\cdot\left[OH^-\right] = (Y - X)\cdot Y$$

$$Ka = \frac{\left[H^+\right]\cdot\left[ClO^-\right]}{\left[HClO\right]} = \frac{(Y - X)\cdot(M - X)}{X}$$

Le due equazioni formano un sistema che richiede la soluzione di un'equazione di grado superiore al secondo.

Quando la concentrazione iniziale del sale è sufficientemente elevata, è possibile evitare di ricorrere alla soluzione esatta del problema, introducendo alcune semplificazioni nella trattazione.
Si ipotizza cioè che l'equilibrio dell'acido si sposti verso sinistra in misura pari allo spostamento verso destra dell'equilibrio dell'acqua. In altre parole per ogni molecola di acido che si forma dalla unione di un anione ClO^- con un H^+, una molecola d'acqua si dissoci per ridare lo ione H^+ e uno ione OH^-. In questo modo si devono formare all'equilibrio tante molecole di HClO quanti ioni OH^-.
In effetti ciò rappresenta solo una approssimazione in quanto in questo modo la concentrazione degli ioni H^+ rimarrebbe inalterata, pari a 10^{-7}, mentre la concentrazione degli ioni OH^- crescerebbe ed il loro prodotto non soddisferebbe più la k_w. In realtà parte degli ioni OH^- si legano con gli ioni H^+ in modo da soddisfare il prodotto ionico dell'acqua.
La concentrazione di equilibrio degli ioni OH^- risulta pertanto leggermente inferiore di quella calcolata tenendo conto solamente della riassociazione dell'acido.
L'entità di tale processo è comunque minima e non influisce sulla concentrazione degli ioni OH^- la quale è determinata essenzialmente dall'equilibrio dell'acido che si riassocia. Diviene necessario tener conto anche dell'equilibrio dell'acqua solo quando il sale è molto diluito.
La reazione semplificata che si ipotizza avvenga è detta reazione di idrolisi ed è la seguente

$$ClO^- + H_2O \leftrightarrow HClO + OH^-$$

E' facile verificare che la sua costante di equilibrio, detta *costante di idrolisi* o K_h, vale:

$$K_h = \frac{\left[HClO\right]\cdot\left[OH^-\right]}{\left[ClO^-\right]} = \frac{\left[HClO\right]\cdot\left[OH^-\right]\cdot\left[H^+\right]}{\left[ClO^-\right]\cdot\left[H^+\right]} = \frac{Kw}{Ka}$$

Tale relazione mette in evidenza come l'equilibrio di idrolisi basica è tanto più spostato verso destra quanto più l'acido è debole (maggiore tendenza ad associarsi liberando ioni OH^-). Di conseguenza la soluzione risulterà essere tanto più basica quanto più piccolo è il valore della K_a (e più elevato il valore della K_h).

Esempio:
Calcoliamo il pH di una soluzione 0,3 M di nitrito di potassio, sapendo che la k_a dell'acido nitroso è pari $4{,}6 \cdot 10^{-4}$.
Il nitrito di potassio si dissocia completamente in 0,3 mol/l di ioni K^+ e 0,3 mol/l di ioni NO_2^-.

$$KNO_2 \Rightarrow K^+ + NO_2^-$$

L'anione nitrito tende a riassociarsi con gli ioni H^+ provenienti dall'acqua producendo il seguente equilibrio di idrolisi

$$NO_2^- + H_2O \Leftrightarrow HNO_2 + OH^-$$

Calcoliamo la costante dell'equilibrio di idrolisi

$$K_h = \frac{Kw}{Ka} = \frac{1 \cdot 10^{-14}}{4{,}6 \cdot 10^{-4}} = 2{,}17 \cdot 10^{-11}$$

Indichiamo con X la quantità di NO_2^- che si riassocia per dare X mol/l di HNO_2, mentre vengono contemporaneamente liberate X mol/l di ioni OH^-,

	iniziale	d'equilibrio
$[NO_2^-]$	0,3	0,3 - X
$[HNO_2]$	0	X
$[OH^-]$	0	X

Esprimiamo le concentrazioni di equilibrio in funzione della costante di idrolisi

$$K_h = 2{,}17 \cdot 10^{-11} = \frac{[HNO_2] \cdot [OH^-]}{[NO_2^-]} = \frac{X^2}{0{,}3 - X}$$

risolvendo l'equazione otteniamo

$X = [OH^-] = [HNO_2] = 2{,}55 \cdot 10^{-6}$ mol/l

$[H^+] = K_w / [OH^-] = 3{,}92 \cdot 10^{-9}$ mol/l pH = 8,4

Si noti come anche in questo caso era possibile ricorrere ad una soluzione semplificata in quanto la concentrazione iniziale del sale è sufficientemente elevata e la k_h è sufficientemente piccola da far

ritenere che la quantità di ioni H+ che si riassocia sia trascurabile rispetto alla concentrazione dell'anione.
Se dunque trascuriamo la X nella differenza a denominatore, possiamo usare la seguente relazione semplificata

$$\left[OH^-\right] = \sqrt{K_h \cdot M_{sale}} = \sqrt{2{,}17 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}3} = 2{,}55 \cdot 10^{-6}\ mol/l$$

dove M_{sale} è la concentrazione iniziale del sale

Idrolisi acida

a) *sale derivato da acido forte e base debole*
Si produce un'idrolisi acida quando viene sciolto in acqua un sale il cui anione deriva da un acido forte, mentre il catione deriva da una base debole.
Prendiamo ad esempio il cloruro di ammonio NH_4Cl che deriva dall'acido cloridrico HCl (acido forte con k_a elevata) e dall'idrossido di ammonio NH_4OH (base debole con k_b bassa).

In soluzione acquosa il cloruro di ammonio è, come la maggior parte dei sali, completamente dissociato in ioni NH_4^+ e ioni Cl^-

$$NH_4Cl \Leftrightarrow NH_4^+ + Cl^-$$

E' necessario ora analizzare in che modo tali ioni interferiscano con l'equilibrio di dissociazione dell'acqua.
Mentre lo ione cloruro Cl^- , derivando da un acido forte, non ha alcuna tendenza a riassociarsi con gli ioni H^+, lo ione ammonio NH_4^+ tende a rubare ioni OH^- per ridare la base debole NH_4OH.
Come al solito, per determinare le concentrazioni di equilibrio delle specie chimiche sarebbe necessario tener conto simultaneamente dei due equilibri che interferiscono: quello di dissociazione dell'acqua e quello di dissociazione della base debole

$$H_2O \Leftrightarrow H^+ + OH^-$$

$$NH_4OH \Leftrightarrow NH_4^+ + OH^-$$

Se la concentrazione iniziale del sale è sufficientemente elevata è comunque possibile, come per l'idrolisi basica, ricorrere ad una descrizione semplificata del fenomeno, scrivendo il seguente equilibrio di idrolisi

$$NH_4^+ + H_2O \Leftrightarrow NH_4OH + H^+$$

la cui costante di equilibrio vale naturalmente:

$$k_h = \frac{k_w}{k_b} = \frac{\left[NH_4OH\right] \cdot \left[H^+\right]}{\left[NH_4^+\right]}$$

Tale relazione mette in evidenza come l'equilibrio di idrolisi acida è tanto più spostato verso destra quanto più la base è debole (maggiore tendenza ad associarsi liberando ioni H^+). Di conseguenza la soluzione risulterà essere tanto più acida quanto più piccolo è il valore della k_b (e più elevato il valore della k_h).

Solubilizzazione di un sale che deriva da un acido forte e da una base forte o viceversa.
Quando viene sciolto in acqua un sale il cui anione deriva da un acido forte ed il cui catione deriva da una base forte o viceversa il pH della soluzione non cambia.
Prendiamo ad esempio il nitrato di potassio KNO_3 che deriva dall'acido nitrico HNO_3 (acido forte con k_a elevata) e dall'idrossido di potassio KOH (base forte con k_b elevata).
In soluzione acquosa il nitrato di potassio è, come la maggior parte dei sali, completamente dissociato in ioni K^+ e ioni NO_3^-

$$KNO_3 \Leftrightarrow K^+ + NO_3^-$$

Ora, poiché sia lo ione K^+ che lo ione NO_3^- non hanno alcuna tendenza a riassociarsi per ridare la base e l'acido, entrambi forti, da cui derivano, l'equilibrio di dissociazione dell'acqua non viene disturbato e la soluzione rimane neutra.

Idrolisi di un sale derivante da un acido debole e da una base debole
In tal caso, dopo che il sale si è dissociato in acqua, sia il catione che l'anione prodotti tendono a riformare, naturalmente in misura diversa, la base debole e l'acido debole da cui provengono. Il pH della soluzione sarà naturalmente acido se $k_b < k_a$, mentre sarà basico in caso contrario.
Prendiamo ad esempio il cianuro di ammonio NH_4CN, che deriva dall'idrossido di ammonio NH_4OH (base debole, $k_b = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$) e dall'acido cianidrico HCN (acido debole, $k_a = 4{,}9 \cdot 10^{-10}$).

Per calcolare il pH di tale soluzione sarebbe necessario tener conto simultaneamente dei seguenti tre equilibri:

1) $H_2O \Leftrightarrow H^+ + OH^-$

2) $NH_4OH \Leftrightarrow NH_4^+ + OH^-$

3) $HCN \Leftrightarrow H^+ + CN^-$

Poiché la costante di dissociazione dell'acido cianidrico è inferiore di quella dell'ammoniaca ($k_a < k_b$) possiamo prevedere che l'acido cianidrico si riassoci in percentuale maggiore rispetto all'idrossido di ammonio (il 3° equilibrio risulta cioè più spostato verso sinistra rispetto al 2°). La soluzione sarà pertanto basica.
La soluzione esatta del problema richiederebbe naturalmente la risoluzione di un sistema di equazioni in cui compaiano tutte le condizioni relative ai tre equilibri.
La risoluzione approssimata prende invece in considerazione il seguente equilibrio di idrolisi

$$NH_4^+ + CN^- + H_2O \Leftrightarrow NH_4OH + HCN$$

secondo il quale per ogni ione OH^- che si riassocia con uno ione NH_4^+, uno ione H^+ si riassocia con uno ione CN^-. Si può facilmente dimostrare che la costante di tale equilibrio vale:

$$k_h = \frac{k_w}{k_a \cdot k_b} = \frac{[NH_4OH] \cdot [HCN]}{[NH_4^+] \cdot [CN^-]}$$

Tenendo presente che le concentrazioni iniziali di NH_4^+ e di CN^- sono pari alla concentrazione del sale completamente dissociato, sarà quindi possibile calcolare le concentrazioni di equilibrio delle quattro specie chimiche. Queste ultime, sostituite nella relazioni di equilibrio dell'acido e della base derivate dalla 2) e dalla 3), forniranno le concentrazioni approssimate degli ioni H^+ e OH^-.

Soluzioni tampone

Si dicono tamponate quelle soluzioni acquose che conservano praticamente immutato il proprio pH anche dopo l'aggiunta di piccole quantità di acidi o basi.

I tamponi hanno una straordinaria importanza biologica, infatti moltissime soluzioni biologiche (sangue, linfa, succhi gastrici etc) richiedono il mantenimento di un pH costante. L'effetto tampone si ottiene sciogliendo in acqua un acido debole con un suo sale o una base debole con il relativo sale. Consideriamo ad esempio una soluzione contenente un generico acido debole HA ed il suo sale di sodio NaA. L'acido debole è presente in soluzione quasi totalmente indissociato essendo il suo equilibrio fortemente spostato verso sinistra.

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

Il sale dell'acido, come la maggior parte dei sali, è invece completamente dissociato

$$NaA \rightarrow Na^+ + A^-$$

Essendo un elettrolita forte il sale rimane completamente dissociato anche in presenza dell'acido debole. L'equilibrio di dissociazione dell'acido viene invece disturbato dalla presenza degli ioni A^- prodotti dalla dissociazione del sale, ed il suo equilibrio retrocede spostandosi ulteriormente verso sinistra. Per calcolare il pH di una soluzione tampone determiniamo le concentrazioni di equilibrio. Poiché il sale si dissocia completamente esso produce una quantità di ioni A^- pari alla sua concentrazione iniziale. Se indichiamo con M_{sale} la concentrazione iniziale del sale (molarità),

possiamo scrivere quindi:

$$M_{sale} = \left[A^-\right]$$

Ora descriviamo l'equilibrio di dissociazione dell'acido debole HA che si dissocia, in presenza di $[A^-] = M_{sale}$, in x ioni H^+ e x ioni A^-

	iniziale	d'equilibrio
[HA]	M_{acido}	$M_{acido} - X$
$[H^+]$	0	X
$[A^-]$	M_{sale}	$M_{sale} + X$

Esprimiamo ora le concentrazioni di equilibrio in funzione della k_a

$$k_a = \frac{[A^-]\cdot[H^+]}{[HA]} = \frac{(M_{sale} + X)\cdot X}{(M_{acido} - X)}$$

Essendo l'acido molto debole la concentrazione di equilibrio degli ioni H^+ è molto piccola ed in genere trascurabile rispetto alle concentrazioni iniziali dell'acido (M_{acido}) e del sale (M_{sale}), specialmente se queste sono sufficientemente elevate. Per questo motivo è possibile trascurare la X nella somma a numeratore e nella differenza a denominatore. La relazione diventa quindi:

$$k_a = \frac{[A^-]\cdot[H^+]}{[HA]} = \frac{M_{sale}\cdot X}{M_{acido}}$$

dalla quale otteniamo

$$X = [H^+] = Ka\cdot\frac{M_{acido}}{M_{sale}}$$

Calcolando il logaritmo negativo di entrambi i membri otteniamo finalmente la relazione per il calcolo del pH in soluzioni tampone:

$$pH = -\log_{10}[H^+] = -\log_{10} Ka\cdot\frac{M_{acido}}{M_{sale}} = pK - \log_{10}\frac{M_{acido}}{M_{sale}}$$

Se ad esempio costruiamo una soluzione tampone in cui sono presenti 10^{-2} mol/l di acido fluoridrico (k_a = 3,53·10^{-4}) e 10^{-1} mol/l di fluoruro di sodio, la soluzione risulta tamponata a

$$pH = pK - \log\frac{M_{acido}}{M_{sale}} = 3{,}45 - \log\frac{10^{-2}}{10^{-1}} = 4{,}45$$

Meccanismo d'azione di una soluzione tampone

Cerchiamo ora di capire per quale motivo una soluzione tampone è in grado di mantenere praticamente invariato il suo pH. Come si può osservare in una soluzione tampone sono presenti in elevata concentrazione sia l'acido debole indissociato che il suo anione (quest'ultimo prodotto dalla dissociazione del sale). Si noti che se fosse presente solo l'acido debole la concentrazione del suo anione sarebbe invece molto bassa in quanto l'acido è poco dissociato. Ora se aggiungiamo alla soluzione un acido forte, gli ioni H^+ prodotti dalla sua completa dissociazione tendono a combinarsi con gli ioni A^- della soluzione tampone per dare l'acido debole indissociato HA. Naturalmente il processo risulta efficiente solo se in soluzione è presente una elevata concentrazione di ioni A^-. Se invece viene addizionata una base forte gli ioni OH^- prodotti dalla sua completa dissociazione si uniscono agli ioni H^+ prodotti dall'acido debole per dare acqua indissociata (l'equilibrio di dissociazione dell'acqua è infatti molto spostato verso sinistra, k_w piccola). Naturalmente man

mano che gli ioni H^+ vengono sottratti all'equilibrio dell'acido debole, quest'ultimo, per il principio di Le Chatelier, si dissocia ulteriormente fornendo altri ioni H^+ che vanno a neutralizzare gli ioni OH^-. Anche in questo caso il processo risulta efficiente solo se nella soluzione tampone è presente una elevata quantità di acido debole indissociato in grado di fornire ioni H^+.
Il meccanismo d'azione di una soluzione tampone si fonda dunque sulla presenza contemporanea di una elevata concentrazione di acido debole e del suo anione.
Osservando la relazione per il calcolo del pH di una soluzione tampone si può osservare come il pH dipenda dal valore della k_a e dal rapporto tra la concentrazione dell'acido e del suo sale.
Una soluzione tampone può essere più o meno efficiente. L'efficienza di una soluzione tampone può essere definita sulla base della diversa capacità di mantenere più o meno inalterato il pH a fronte di un'aggiunta di una medesima quantità di acido o base forte. Sono naturalmente più efficienti le soluzioni tampone che riescono a far variare il pH in misura minore.
Si può dimostrare che l'efficienza di una soluzione tampone cresce al crescere della sua concentrazione complessiva.
A parità di concentrazione totale è inoltre più efficiente la soluzione tampone che presenta un rapporto tra la concentrazione dell'acido e quella del sale più vicino all'unità. L'efficienza massima si ottiene quando $M_{acido}/M_{sale} = 1$. Come si può facilmente verificare in tal caso la soluzione risulta tamponata ad un pH = pK.
Ad esempio possiamo affermare che la soluzione tampone presentata nell'esempio precedente, in cui era stato utilizzato acido fluoridrico ($k_a = 3{,}53 \cdot 10^{-4}$), raggiunge la sua massima efficienza quando viene fatta lavorare a pH = pK = $-\log\ 3{,}53 \cdot 10^{-4} = 3{,}45$.

Verifichiamo ora con un esempio le condizioni di efficienza delle soluzioni tampone.

a) *Variazione della concentrazione totale in una soluzione tampone*

Prendiamo in considerazione 2 soluzioni tamponate, la prima più diluita in cui $M_{sale} = M_{acido} = 0{,}4$ mol/l, la seconda più concentrata, con $M_{sale} = M_{acido} = 0{,}8$ mol/l. Entrambe le soluzioni sono tamponate ad un pH = pK in quanto $M_{acido}/M_{sale} = 1$.
Osserviamo ora come l'aggiunta di 0,2 mol/l di un acido forte ad entrambe le soluzioni faccia variare il pH della soluzione più diluita in modo più evidente.
L'acido forte è completamente dissociato e libera pertanto 0,2 mol/l di ioni H^+, i quali si riassociano con altrettante moli di anione per ridare l'acido debole. All'equilibrio la concentrazione dell'anione (M_{sale}) sarà quindi diminuita di 0,2 mol/l, mentre la concentrazione dell'acido debole (M_{acido}), sarà aumentata in egual misura. Il nuovo pH sarà pertanto

per il 1° tampone $$pH = pK - \log\frac{M_{acido}}{M_{sale}} = pK - \log\frac{0{,}4+0{,}2}{0{,}4-0{,}2} = pK - 0{,}48$$

per il 2° tampone $$pH = pK - \log\frac{M_{acido}}{M_{sale}} = pK - \log\frac{0{,}8+0{,}2}{0{,}8-0{,}2} = pK - 0{,}22$$

La soluzione tampone più concentrata vede cambiare il suo pH di 0,22 unità contro le 0,48 unita della soluzione più diluita.

b) *Variazione del rapporto M_{acido}/M_{sale} in una soluzione tampone.*

Prendiamo ora in considerazione due soluzioni tampone che presentano la stessa concentrazione totale, ma diverso rapporto Acido/Sale. Sia la $k_a = 10^{-5}$. La prima avrà $M_{sale} = M_{acido} = 0{,}8$ mol/l, la seconda $M_{acido} = 1{,}2$ mol/l e $M_{sale} = 0{,}4$ mol/l. Aggiungiamo ad entrambe le soluzioni 0,2 mol/l di un acido forte e calcoliamo le relative variazioni di pH

per il 1° tampone il pH passa

da
$$pH = pK - \log\frac{M_{acido}}{M_{sale}} = -\log 10^{-5} - \log\frac{0{,}8}{0{,}8} = 5$$

a
$$pH = pK - \log\frac{M_{acido}}{M_{sale}} = -\log 10^{-5} - \log\frac{0{,}8+0{,}2}{0{,}8-0{,}2} = 4{,}78$$

<u>con una diminuzione del 4,4%</u>

per il 2° tampone il pH varia

da
$$pH = pK - \log\frac{M_{acido}}{M_{sale}} = \log 10^{-5} - \log\frac{1{,}2}{0{,}4} = 4{,}52$$

a
$$pH = pK - \log\frac{M_{acido}}{M_{sale}} = \log 10^{-5} - \log\frac{1{,}2+0{,}2}{0{,}4-0{,}2} = 4{,}15$$

<u>con una diminuzione del 8,2%</u>

Il sangue umano è una soluzione tamponata a pH 7,4. Tra i diversi sistemi tampone presenti nel sangue, il più importante è quello costituito dall'acido carbonico (che si produce dalla reazione dell'anidride carbonica respiratoria con l'acqua) e dallo ione bicarbonato (H_2CO_3/HCO_3^-). In effetti lo ione bicarbonato presenta una concentrazione plasmatica circa 10 volte superiore di quella dell'acido carbonico. Il tampone plasmatico H_2CO_3/HCO_3^- è quindi lontano dalle condizioni di maggior efficienza. La maggior concentrazione di ioni bicarbonato permette però al sangue di tamponare più facilmente sostanze acide, che rappresentano i principali cataboliti versati nel sangue (acido lattico, acidi urici etc).
In altre parole l'organismo si difende meglio dagli squilibri legati ad eccesso di acidi piuttosto che ad eccessi di basi.
Sapendo che la costante di dissociazione acida dell'acido carbonico è pari a Ka = 4,3 10^{-7}, quindi possiamo scrivere :

$$pH = pK - \log\frac{[H_2CO_3]}{[HCO_3^-]} = -\log\left(4{,}3\cdot 10^{-7}\right) - \log\frac{1}{10} = 6{,}37 + 1 = 7{,}37$$

L'elettrochimica

Sappiamo che esistono sostanze che conducono la corrente elettrica. Le migliori sono i **metalli** (lo si capisce ricordando le caratteristiche del **legame metallico**), detti **conduttori di I specie**: se sottoposti a una **ddp** (differenza di potenziale), in essi avviene passaggio di elettroni, che trasportano cariche, ma non materia. L'intensità della corrente elettronica dipende dalla **resistenza R del conduttore**. Altre sostanze capaci di condurre la corrente elettrica sono gli **elettroliti**, le cui soluzioni trasportano corrente, con trasferimento anche di materia, mediante gli ioni; sono detti **conduttori di II specie**. A questa classe appartengono anche i sali fusi e alcuni liquidi puri (come acido solforico puro e ammoniaca liquida, che presentano il fenomeno dell'**autoprotolisi** come l'acqua). Gli elettroliti possono essere:

Gli **elettroliti forti** (sali, idrossidi alcalini e alcalino-terrosi, che sono ionici anche nello stato solido, acidi forti, etc.), sono sostanze che in soluzione acquosa sono dissociati completamente, o quasi, in ioni positivi e negativi.

Gli **elettroliti deboli** invece sono sostanze che sono poco dissociate (per esempio molti acidi organici).

L'**acqua** è un ottimo solvente per sostanze ionizzabili purché la **solvatazione** porti ad un guadagno energetico che compensi l'energia di rottura dei legami attrattivi che esistono in fase solida.

Potremo perciò avere, per molecole polari (anche se a struttura covalente, non ionica) una reazione di **dissociazione**, favorita dall'acqua, che può essere **totale o parziale**.

$$HCl + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + Cl^- \qquad \textbf{totale}$$

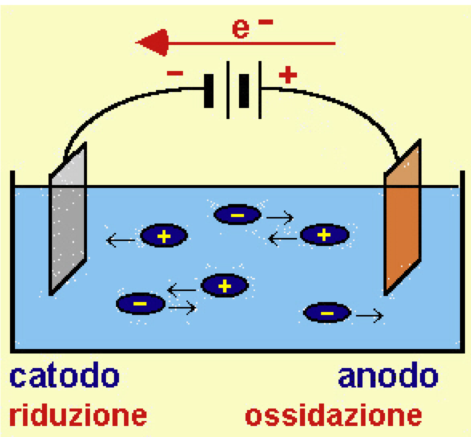
$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + OH^- \qquad \textbf{parziale}$$

$$H_2SO_4 + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + HSO_4^- \qquad \textbf{totale}$$

$$HSO_4^- + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + SO_4^{2-} \qquad \textbf{parziale}$$

Gli ioni sono solvatati da altre molecole di acqua.

Elettrolisi



Se in una soluzione di elettroliti immergiamo due lamine metalliche e ad esse imponiamo una **forza elettromotrice fem** (o **differenza di potenziale ddp**), si ha passaggio di corrente e, alle due lamine, che si chiamano **elettrodi**, avvengono processi chimici. Rappresentazione schematica di una cella elettrolitica costituita da una soluzione di elettroliti in cui sono immerse due lamine metalliche sottoposte a ddp mediante una pila. Gli ioni positivi (**cationi**) vanno verso il **catodo** che si trova a potenziale elettrico più basso (catodo dal greco κατα = sotto). Gli ioni negativi (**anioni**) verso l'**anodo**, a potenziale più alto (anodo dal greco ανα = sopra). All'interfaccia catodo-soluzione si ha una **riduzione** (assorbimento di elettroni **e-**); all'anodo invece **ossidazione** (cessione di elettroni). Gli elettroni ceduti, sotto l'effetto della **forza elettromotrice** passano dall'anodo verso il catodo attraverso un circuito metallico esterno e seguono perciò un percorso da destra a sinistra.

Avremo così un flusso di cariche elettriche che avviene in parte nel circuito esterno (elettroni) e in parte in soluzione (ioni). Le reazioni che avvengono agli elettrodi sono:

riduzione (al catodo) $\mathbf{M^{n+} + n\,e^- \rightarrow M}$

Alcuni ioni metallici (Ag^+, Cu^{++}, etc.) possono depositarsi sul catodo.

In presenza di acidi, idrossidi, sali di metalli alcalini e alcalino-terrosi, può essere l'**acqua** a subire la riduzione:

$$\mathbf{2\,H_2O + 2\,e^- \rightarrow H_2 + 2\,OH^-}$$

ossidazione (all'anodo) $\mathbf{M \rightarrow M^{n+} + n\,e^-}$

Questo tipo di reazione avviene se l'anodo è costituito da un metallo attaccabile (che possa perciò passare in soluzione sotto forma di ioni).
Se si tratta di **alogenuri X** (escluso però il fluoro F), in soluzione avviene la reazione:

$$\mathbf{2\,X^- \rightarrow X_2 + 2\,e^-}$$

Se l'anodo è costituito da un metallo "nobile" (come Pt, Au, etc.) e se non ci sono anioni che si possano scaricare facilmente, è l'**acqua** a subire l'ossidazione:

$$\mathbf{2\,H_2O \rightarrow O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^-}$$

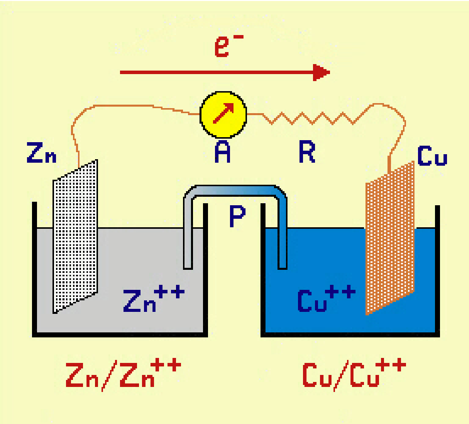
Questo processo si chiama **elettrolisi** e può avvenire anche in assenza di solvente, per esempio nei sali fusi, purché esistano ioni in grado di muoversi (NaCl, $HgCl_2$, KBr, NaOH, etc.).
Per esempio, per NaCl fuso (e in assenza di ossigeno e di acqua!) si hanno le seguenti reazioni:

al catodo**:** $\mathbf{Na^+ + e^- \rightarrow Na}$ all'anodo $\mathbf{2\,Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2\,e^-}$

L'elettrolisi di NaCl permette, con catodo di Hg, di ottenere Na metallico in amalgama, cosa impossibile in acqua, poiché si ridurrebbe H_2O dando H_2 anziché il metallo desiderato.
Ricordando che la **carica elementare** è $\mathbf{1{,}602 \times 10^{-19}}$ **C** (C = Coulomb, unità di misura elettrica) e che una **mole** contiene $\mathbf{6{,}022 \times 10^{23}}$ unità, per un metallo monovalente occorrerà una **quantità di elettricità** = 1 mole di elettroni = **96486,7 C**
Approssimando, definiamo questa quantità di elettricità **Faraday F** dove: **1 F = 96500 C**
La stessa quantità basterà solo per 0,5 moli di metallo bivalente e così via.
Si deve a Michael Faraday la formulazione delle due leggi fondamentali che governano l'elettrolisi.
1) la **quantità di elettrolita** decomposto durante l'elettrolisi **è proporzionale alla quantità totale di elettricità** $\mathbf{Q = i\Delta t}$ in cui **i** è l'intensità di corrente, **Δt** è il tempo per cui essa circola.
2) la **massa di ogni specie chimica trasformata** ad ogni elettrodo per il passaggio di **1 F di elettricità** è uguale al prodotto della massa molare, per il coefficiente di reazione, diviso il numero di elettroni scambiati (è perciò **proporzionale alla massa equivalente**).

Le Pile

Possiamo far avvenire delle **reazioni redox** (di ossidoriduzione) in una apparecchiatura controllata, detta **cella elettrochimica** o **pila**. Se mettiamo una lamina di zinco Zn in una soluzione di solfato di rame $CuSO_4$ (che è di colore blu dovuto ad un complesso di Cu^{++} con l'acqua), Zn si ricopre progressivamente di polvere rossastra, mentre la soluzione scolora.
Avviene cioè la reazione: $\mathbf{Zn + CuSO_4 \rightarrow Cu + ZnSO_4}$
La polvere è Cu che si riduce (assorbendo elettroni dalla lamina di Zn); la soluzione scolora poiché diminuisce la concentrazione di ioni Cu^{++} (che, solvatato, è blu). Contemporaneamente Zn deve ossidarsi a Zn^{++} e passa in soluzione (anche se questo processo non è visibile, dato che lo ione Zn^{++}



è incolore. In base a queste considerazioni, proviamo a costruire una "**pila**" per sfruttare l'energia chimica del processo che, come si è visto, avviene spontaneamente; per far questo è necessario mantenere separati i due processi di ossidazione e riduzione. La Pila Daniell, è un dispositivo che permette di ottenere energia elettrica da una reazione chimica di ossidoriduzione. Una lamina di Zn è immersa in una soluzione di Zn^{++} , una di Cu in una soluzione di Cu^{++}. Le due lamine sono collegate mediante un circuito elettrico che comprende una **resistenza R** (per ridurre e controllare la velocità di passaggio degli elettroni e perciò del processo redox) e un **amperometro A** (per evidenziare l'intensità della corrente). Le due soluzioni sono collegate mediante il **ponte salino P**, costituito da un sifone contenente una soluzione di elettrolita inerte rispetto alla reazione (KCl, NH_4Cl), supportata su agar-agar. Il ponte salino permette il riequilibrio elettrico delle soluzioni quando avviene la reazione redox; se non ci fosse, il circuito sarebbe bloccato e la reazione non potrebbe procedere.
In questo modo, costruendo la pila, abbiamo praticamente separato la reazione:

$$\mathbf{Zn + CuSO_4 \rightarrow Cu + ZnSO_4}$$

in due reazioni parziali:

all'anodo **(ossidazione):** $\mathbf{Zn \rightarrow Zn^{++} + 2\,e^-}$

al catodo **(riduzione):** $\mathbf{Cu^{++} + 2\,e^- \rightarrow Cu}$

ed abbiamo potuto così mettere in evidenza che avviene una trasformazione di energia chimica in energia elettrica; se le due reazioni fossero avvenute nella stessa soluzione avremmo avuto una meno evidente (e meno interessante) trasformazione di energia chimica in energia termica. Ognuno dei due elementi che costituiscono la pila sono detti **semielementi**. Praticamente tutte le reazioni redox spontanee possono generare energia elettrica. Se invece di sfruttare le reazioni per ottenere energia elettrica, fornissimo noi l'energia elettrica, invertendo la direzione del flusso elettronico, potremmo far avvenire la reazione inversa. E' possibile perciò far avvenire anche reazioni non spontanee (elettrolisi). Chiamiamo **catodo** l'elettrodo sul quale avviene la **riduzione**, **anodo** quello su cui avviene l'**ossidazione** (esattamente come nell'elettrolisi). La **fem generata** (a circuito esterno aperto, altrimenti non la potremmo misurare poiché cambierebbe continuamente) è una **misura della tendenza** della reazione ad avvenire ed è perciò collegabile, parlando in termini di **termodinamica delle reazioni**, al ΔG della trasformazione.
Se **ΔG = 0** anche **fem = 0** (perciò un sistema in equilibrio non può generare energia elettrica).
Il **potenziale di un elettrodo** è misurato in **volt** e dipende dalle concentrazioni delle forme **Ox** (ossidata) e **Red** (ridotta), secondo la **relazione di Nernst**
Per una reazione generica

$$\mathbf{Ox + ne^- \rightarrow Red}$$

la **relazione di Nernst** è la seguente:

$$E = E° + \frac{RT}{nF} \ln \frac{[Ox]}{[Red]} = E° + \frac{0{,}059}{n} \lg \frac{[Ox]}{[Red]}$$

in cui:
E è il potenziale dell'elettrodo ed **E°** il suo **potenziale normale**, cioè il potenziale dell'**elettrodo in condizioni standard** (concentrazione 1M per tutte le specie in soluzione, pressione 1 atm per i gas; T=25°C; metalli puri; sali poco solubili presenti come corpo di fondo); ed inoltre:

R = 8,313 (J mol^{-1} K^{-1}); **F = 96500** (C); **T = 298,16 (K)** (cioè 273.16 + 25); **n =** numero di elettroni scambiati

Ricordiamo le convenzioni da seguire quando si parla di celle elettrolitiche (nelle quali si effettua una elettrolisi fornendo energia) o di celle galvaniche (nelle quali si sfrutta una reazione spontanea per ottenere energia).

	catodo		**anodo**	
	segno	**reazione**	**segno**	**reazione**
cella elettrolitica	**-**	**riduzione**	+	**ossidazione**
cella galvanica	+	**riduzione**	**-**	**ossidazione**

In una cella galvanica il catodo (+) è quello costituito dal sistema a potenziale più alto, perciò più ossidante; al catodo si avrà perciò riduzione: la sottrazione di elettroni dall'elettrodo lo rende positivo; all'anodo invece si avrà ossidazione: gli elettroni lasciati sull'elettrodo lo rendono negativo. E' ovvio però che un semielemento potrà comportarsi da catodo o da anodo a seconda del semielemento che gli viene accoppiato. Sia nella cella elettrolitica sia nella galvanica, i cationi si muovono sempre dall'anodo verso il catodo, gli anioni viceversa, o per reagire sull'elettrodo o, quantomeno, per equilibrare la densità di cariche positive e negative nella soluzione. Si possono costruire celle galvaniche anche con due semielementi che differiscono tra loro solo per la concentrazione della soluzione: sono dette **pile a concentrazione.**

Un esempio di pila a concentrazione può essere:

$$\mathbf{Zn / Zn^{++}}(0{,}001\ \mathrm{M})\ //\ \mathbf{Zn^{++}}(1\ \mathrm{M})\ \mathbf{/ Zn}$$

$$\mathbf{E = E_2 - E_1 = E°_{Zn^{++}/Zn} + 00{,}59/2\ \lg [Zn^{++}]_2 - E°_{Zn^{++}/Zn} + 00{,}59/2\ \lg [Zn^{++}]_1}$$

$$\mathbf{E = 00{,}59/2\ \lg [Zn^{++}]_2 / [Zn^{++}]_1 = 0{,}0295\ \lg 10^3 = 0{,}0885\ V}$$

In questo caso la fem non dipende da E° né, perciò, dal sistema scelto, ma solo dal rapporto delle concentrazioni.
Le celle galvaniche in senso generale sono utilizzate come sorgenti portatili di energia elettrica. Ne vengono usati molti tipi, alcuni anche "ricaricabili" (è possibile cioè, mediante una sorgente di energia esterna, provocare una elettrolisi che ristabilisce le condizioni iniziali).

Gli accumulatori al piombo

Il nome "batteria" dipende dal fatto che si tratta di più celle collegate in serie; in questo caso la cella eroga una ddp di 2V, perciò 6 celle in serie portano ad una ddp di 12V (le batterie comunemente usate nelle automobili erogano infatti 12 volt; in alcuni casi, quando serve una ddp di 24 volt, occorrerà avere 12 celle, oppure collegare in serie due batterie da 12 V).
L'**anodo** è costituito da **elettrodi di Pb**, sui quali avviene la reazione:

$$\mathbf{Pb_{(s)} + SO_4^{--} \rightarrow PbSO_{4\,(s)} + 2\ e^-}$$

Il **catodo** è costituito da **elettrodi a PbO_2**, sui quali avviene la reazione:

$$\mathbf{PbO_{2\,(s)} + 4\ H^+ + SO_4^{--} + 2\ e^- \rightarrow PbSO_{4\,(s)} + 2\ H_2O}$$

Nella reazione totale, che si ottiene sommando membro a membro le due precedenti (operativamente corrisponde all'utilizzo della energia elettrica erogata, perciò alla scarica progressiva della batteria), diminuisce la $[H_2SO_4]$, perciò anche la densità del liquido; ciò permette di controllare facilmente lo stato di carica della batteria mediante un semplice picnometro (operazione che esegue l'elettrauto quando controlla lo stato di carica della batteria dell'auto). La reazione totale è:

$$\mathbf{Pb_{(s)} + PbO_{2\,(s)} + 4\,H^+ + 2SO_4^{--} \rightarrow \quad 2\,PbSO_{4\,(s)} + 2\,H_2O}$$

Il vantaggio di queste batterie (nonostante il peso elevato) è che sono ricaricabili, cioè reversibili, ed hanno una lunga durata, così applicando una sorgente di energia esterna (dinamo o alternatore) in senso opposto, si può invertire la reazione, operando cioè una elettrolisi:

$$\mathbf{2\,PbSO_{4\,(s)} + 2\,H_2O \ \rightarrow \quad Pb_{(s)} + PbO_{2\,(s)} + 4\,H^+ + 2SO_4^{--}}$$

Vista la reversibilità della reazione possiamo scrivere la reazione totale come:

$$\mathbf{Pb_{(s)} + PbO_{2\,(s)} + 4\,H^+ + 2SO_4^{--} \ \longleftrightarrow \ 2\,PbSO_{4\,(s)} + 2\,H_2O}$$

I composti del carbonio

In passato, i composti chimici erano suddivisi nettamente in due gruppi, inorganici e organici, in base alla loro origine. Con il termine *organico* si indicavano le sostanze prodotte dagli *organismi viventi*, mentre si classificavano come inorganiche tutte le altre sostanze. Già dalla fine del Settecento, le tecniche analitiche avevano mostrato che le sostanze definite organiche contenevano costantemente carbonio e idrogeno e spesso anche ossigeno, azoto e fosforo; tutte erano caratterizzate da una discreta complessità di composizione e da particolari proprietà, quale ad esempio la *combustibilità*. Si riteneva inoltre che i composti organici obbedissero a leggi diverse da quelle della chimica inorganica e, soprattutto, che fossero prodotti esclusivamente sotto l'influenza della cosiddetta *forza vitale* e non potessero quindi essere preparati artificialmente. Nella prima metà dell'Ottocento, il susseguirsi delle prime sintesi artificiali di composti considerati di esclusiva origine animale (la prima di esse fu storicamente quella dell'urea) fece cadere la distinzione fra le due classi, che fu tuttavia mantenuta pur perdendo il significato originale. La chimica organica diventava così **la chimica dei composti del carbonio**, definizione che è tuttora valida. Il mantenimento della distinzione era ed è giustificato dal fatto che tutti i cosiddetti composti organici contengono il carbonio, che i composti del carbonio sono molto più numerosi (alcuni milioni) dei composti di tutti gli altri elementi messi insieme e che il carbonio ha reattività e caratteristiche del tutto particolari, in virtù della propria configurazione elettronica.

Gli idrocarburi

Tranne rarissime eccezioni (ad esempio, CO), **il carbonio forma sempre 4 legami**. Abbiamo già dato una giustificazione della tetravalenza del carbonio studiando dettagliatamente i diversi tipi di ibridazione che caratterizzano i composti del carbonio. Sarebbe anche opportuno rivisitare i due tipi di legame covalente, *sigma* e *pi greco*. Gli idrocarburi sono i più semplici composti del carbonio con l'idrogeno. Sono le molecole di base della chimica organica poiché, oltre ad essere molto numerosi, tutti gli altri composti si possono considerare come derivati da essi per sostituzione di un atomo di idrogeno con un cosiddetto **gruppo funzionale**, quel gruppo chimico, cioè, che conferisce al composto proprietà caratteristiche, diverse da quelle dell'idrocarburo di origine e peculiari di una classe di composti.

I composti organici possono essere suddivisi in tre grandi gruppi:

- Alifatici e Aliciclici

- Aromatici
- Eterociclici

Il primo gruppo comprende i composti *alifatici* (dal greco *"aleifar"* = olio, grasso), sinonimo di composti **a catena aperta** (detti anche aciclici) e gli *aliciclici*, o ciclici, composti **chiusi ad anello**, con proprietà relativamente simili agli alifatici. Gli idrocarburi alifatici si suddividono a loro volta in **alcani**, **alcheni** e **alchini** (figura).

Gli *alcani* contengono esclusivamente legami di tipo σ e sono detti pertanto **saturi**. Sono caratterizzati da una certa inerzia chimica: il termine alternativo di *paraffine* (dal latino *"parum affinis"*) deriva appunto dal fatto che questi composti hanno scarsa tendenza a reagire, perfino con acidi e basi forti. Quando reagiscono danno principalmente **reazioni di sostituzione**.

Alcheni e *alchini* sono invece idrocarburi **insaturi**, in quanto contengono legami multipli: un doppio legame gli alcheni, un triplo legame gli alchini. Le loro reazioni caratteristiche sono **reazioni di addizione**, che tendono a portare la molecola nella condizione satura, con ibridazione sp^3.

Idrocarburi Alifatici	SATURI	ALCANI (o Paraffine)	solo legami σ tutti atomi di C sp^3
	INSATURI	ALCHENI (o Olefine)	doppio legame C-C (ibridazione sp^2)
		ALCHINI (o Acetilenici)	triplo legame C-C (ibridazione sp)

Fig.22- Suddivisione degli idrocarburi alifatici

Gli idrocarburi *aromatici* sono composti caratterizzati da proprietà chimiche del tutto particolari che, come vedremo, ne fanno un gruppo omogeneo, completamente distinto dagli altri idrocarburi. Gli aromatici in senso stretto sono gli idrocarburi che contengono almeno un anello benzenico.

Gli *eterociclici*, infine, sono composti **ciclici** che contengono nell'anello atomi **diversi dal carbonio**.

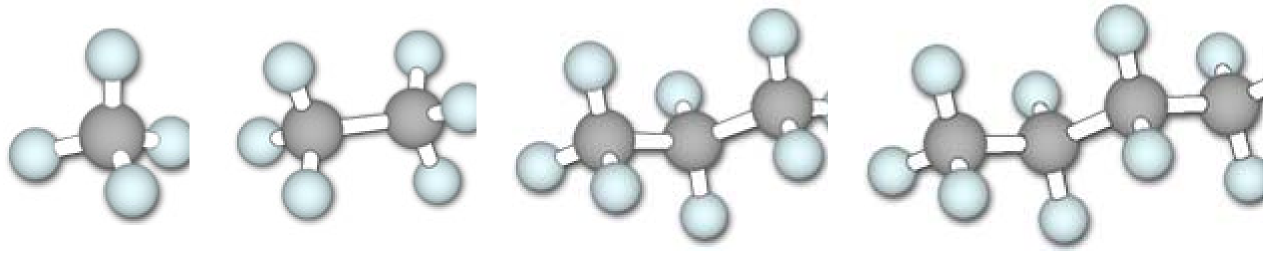
I gruppi funzionali
Per gruppo funzionale si intende quel gruppo chimico che determina le proprietà chimico-fisiche e la reattività di un composto. I composti che contengono lo stesso gruppo funzionale, hanno caratteristiche molto simili fra loro, tanto da costituire una classe di composti organici. Ad esempio, il gruppo –COOH (carbossilico) caratterizza la classe degli acidi carbossilici, tutti composti con proprietà acide; il doppio legame carbonio-carbonio è il gruppo funzionale degli alcheni, tutti caratterizzati dal fatto di dare reazioni di addizione e così via.
Nella tabella 10 sono riassunti i gruppi funzionali tipici delle principali classi di composti organici. Oltre a questi, vi sono importanti composti che contengono gruppi funzionali "misti", come ad esempio gli *eteri* e gli *esteri*.
Diversi composti organici possono contenere due o più gruppi funzionali, come ad esempio gli **idrossiacidi** (ossidrile + carbossilico), i **chetoacidi** (chetonico + carbossilico), gli **amminoacidi** (amminico + carbossilico), i **carboidrati** (aldeidico o chetonico + due o più ossidrili).

Tabella 10 - I gruppi funzionali tipici delle principali classi di composti organici

gruppo	*funzionale*	*classe di composti*	*note*
$C=C$	doppio legame C-C	**alcheni**	
$C\equiv C$	triplo legame C-C	**alchini**	
-X	un alogeno qualsiasi	**alogenuri alchilici**	quando sostituisce un H in un alcano
		alogenuri acilici	quando sostituisce un -OH in un gruppo carbossilico
-OH	ossidrile	**alcoli**	quando è legato ad un carbonio sp^3
		enoli	quando è legato ad un carbonio sp^2
		fenoli	quando è legato ad un anello aromatico
-SH	solfidrilico	**tioli**	legato a C sp^3
$-C(=O)H$	aldeidico	**aldeidi**	
$>C=O$	carbonilico	**chetoni**	
$-C\equiv N$	nitrile	**nitrili**	
$-C(=O)OH$	carbossilico	**acidi carbossilici**	
$-SO_3H$	solfonico	**acidi solfonici**	
$-NH_2$	amminico	**ammine primarie alifatiche**	quando sostituisce un H in un alcano
		ammine primarie aromatiche	quando è legato ad un anello aromatico
		ammidi	quando sostituisce un -OH in un gruppo carbossilico

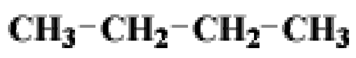
Idrocarburi saturi: Gli Alcani

Si definiscono così gli idrocarburi che contengono solo legami semplici nella catena. Il primo termine della serie è il *metano* (CH_4), cui seguono *etano* (C_2H_6), *propano* (C_3H_8) e *butano* (C_4H_{10}).

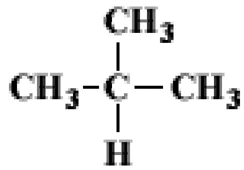


metano etano propano butano

È importante memorizzare subito questi quattro nomi, che ricorreranno costantemente nella nomenclatura dei loro derivati. I termini successivi si ricordano più facilmente poiché vengono chiamati genericamente *n-ano* (dove *n* = penta, esa, epta, otta etc.). A partire dal butano si incontra negli alcani il fenomeno della **isomeria**. *Si ha **isomeria** quando due molecole che hanno la stessa formula molecolare, hanno struttura diversa.* Il **butano** ha due isomeri: *normal* butano (*n*-butano) e *iso*butano (o 2-metilpropano). Il *n*-butano è qui rappresentato mediante la **formula razionale**, l'*iso*-butano mediante la **formula di struttura**.



n-butano



iso-butano

Si definisce "normale" la struttura lineare, mentre si parla di forme "iso" quando la catena è ramificata e più precisamente quando, comunque si consideri la molecola, la massima lunghezza è sempre la stessa: le forme iso degli alcani portano sempre un metile laterale legato al *secondo* carbonio della catena *normale*.

La Nomenclatura IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) degli Alcani

1. Si sceglie come struttura base la catena più lunga possibile.
2. Si considera il composto come derivato da questa struttura per sostituzione degli atomi di idrogeno con gruppi alchilici.

Si dicono **alchilici** quei gruppi che *contengono un idrogeno in meno del relativo alcano*. Un generico gruppo alchilico si indica comunemente con una **R**. Il nome di questi gruppi si ottiene semplicemente sostituendo con *-ile* il suffisso -ano dell'alcano corrispondente:

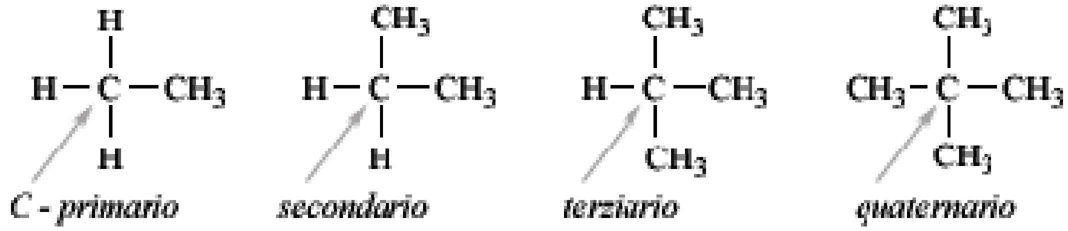
CH_3-, metile; CH_3-CH_2-, etile; CH_3-CH_2-CH_2-, propile; etc.

3. Si numerano gli atomi di carbonio della catena principale cominciando dall'estremità che permette di usare i numeri più bassi per indicare i sostituenti.

4. Se lo stesso gruppo compare più di una volta come catena laterale, si aggiunge il prefisso *di-*, *tri-*, *tetra-* etc.

5. Se vi sono gruppi alchilici diversi legati alla catena principale, si elencano in ordine di grandezza crescente (prima i metili, poi gli etili, i propili, i butili etc.).

Classificazione degli atomi di carbonio
È spesso utile classificare un atomo di carbonio di un alcano *in base al numero di altri atomi di carbonio a cui è legato.* Un atomo di carbonio potrà quindi essere definito **primario**, **secondario**, **terziario** o **quaternario**, a seconda che leghi uno, due, tre o quattro altri atomi di carbonio.



Proprietà fisiche degli alcani

Gli alcani sono composti *apolari* in quanto contengono solo legami covalenti pressoché omopolari, disposti in modo del tutto simmetrico. Poiché le attrazioni intermolecolari sono dovute unicamente a deboli forze di Van der Waals, tanto più forti quanto più grande è la molecola, i loro punti di fusione e di ebollizione sono piuttosto bassi ed aumentano con le dimensioni della molecola. I primi quattro termini della serie sono tutti *gassosi* a temperatura ambiente. Non potendo formare legami a idrogeno, gli alcani non sono solubili in acqua, mentre lo sono nei solventi apolari, quali benzene, etere etc.

Reazioni degli alcani

Gli alcani sono chimicamente **inerti** verso la maggior parte dei reagenti e danno solo poche reazioni che avvengono *in condizioni drastiche, con produzione di miscele di prodotti.* Poiché negli alcani sono presenti legami covalenti pressoché omopolari, essi non danno reazioni di tipo ionico. Danno invece *reazioni radicaliche*, che procedono con meccanismi *a catena di radicali liberi* e sono esplosive se l'alcano è di basso peso molecolare. Un esempio di questo tipo di reazioni è l'**alogenazione**. In presenza di luce o alte temperature (250-400°C) gli alcani reagiscono con gli alogeni allo stato gassoso per formare una miscela di prodotti mono, di, tri, tetrasostituiti. Dalla reazione del metano con il cloro si ottiene, ad esempio, cloruro di metile, dicloruro di metilene, cloroformio e tetracloruro di carbonio.

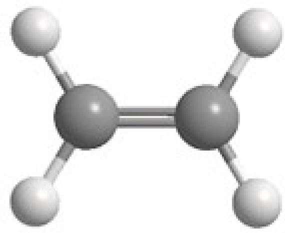
Un'altra reazione caratteristica degli alcani è l'**ossidazione** (combustione):

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$

La combustione totale fino a H_2O e CO_2 è una proprietà caratteristica dei composti organici; viene anzi spesso usata per la determinazione del contenuto di C e H in una sostanza organica. Altrimenti l'ossidazione per combustione non ha altra importanza che per la **produzione di calore**: la combustione degli idrocarburi produce infatti notevoli quantità di calore (ad esempio, il *calore di combustione* del metano è di 213 kcal/mole).

Idrocarburi insaturi: Alcheni

Gli **alcheni** sono gli idrocarburi caratterizzati dalla presenza di un *doppio legame* carbonio-carbonio. Il primo termine della serie è l'***etene***, o etilene: $CH_2{=}CH_2$



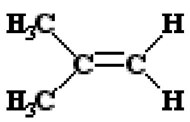
Il doppio legame carbonio-carbonio è formato da un forte legame σ (energia di legame 83 kcal/mole), derivante dalla sovrapposizione di due orbitali sp^2 dei due atomi di carbonio e da un più debole legame π (energia di legame 62 kcal/mole), dovuto alla parziale sovrapposizione dei due orbitali *p* non ibridati. Il doppio legame è quindi più forte di un legame semplice (145 contro 83 kcal/mole) e la distanza di legame risulta inferiore (1.34 contro 1.54 Å).

I termini successivi di questa famiglia di idrocarburi sono:

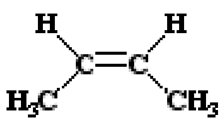
Propene, o propilene: $CH_2{=}CH{-}CH_3$

Butene, o butilene: $CH_2{=}CH{-}CH_2{-}CH_3$

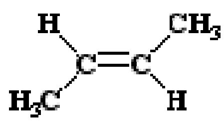
Con il butene "inizia" il fenomeno dell'***isomeria*** negli alcheni. A seconda della posizione del doppio legame, il butene può esistere come 1-butene o 2-butene; il 2-butene può a sua volta esistere in **tre** strutture diverse (l'isobutene non è in realtà un 2-butene, ma piuttosto un 2-metil propene):



isobutene



cis-2-butene



trans-2-butene

L'isomeria cis-trans I 2-buteni *cis* e *trans* sopra illustrati non sono semplicemente *isomeri*, ma sono **stereoisomeri**. Si definiscono infatti così quegli isomeri che differiscono *soltanto* per la disposizione nello spazio degli atomi. Più precisamente sono **diastereoisomeri** perché *non sono l'uno l'immagine speculare dell'altro* (non sono *enantiomeri*). Se osserviamo bene, possiamo notare che la loro isomeria è dovuta all'impossibilità di libera rotazione intorno al doppio legame carbonio-carbonio. Questo tipo di isomeria si definisce *isomeria geometrica* e quindi i 2-buteni sono **isomeri geometrici**.
Il fenomeno della isomeria geometrica è possibile in tutte le classi di composti che contengono *un doppio legame*.

Nomenclatura IUPAC degli alcheni

Le regole di nomenclatura seguono lo schema già indicato per gli alcani. Gli alcheni prendono il loro nome dai corrispondenti alcani di pari numero di atomi di carbonio: è sufficiente sostituire la desinenza –ano con *–ene*: quest'ultima dovrebbe acquistare il *sapore* di composto insaturo, contenente quindi almeno un doppio legame.

La numerazione della catena idrocarburica è in questo caso imposta dalla posizione del doppio legame (il gruppo funzionale degli alcheni): si deve infatti numerare la catena in modo che il primo carbonio impegnato nel doppio legame abbia il numero più basso possibile.

Alcuni gruppi alchenilici caratteristici, *vinile* (CH_2=CH–) e *allile* (CH_2=CH–CH_2–) hanno nomi correnti, non derivati dai corrispondenti alcani e dovrebbero pertanto essere ricordati poiché sono spesso usati nella nomenclatura di alcuni alcheni-derivati (vedi ad esempio l'alcol vinilico):

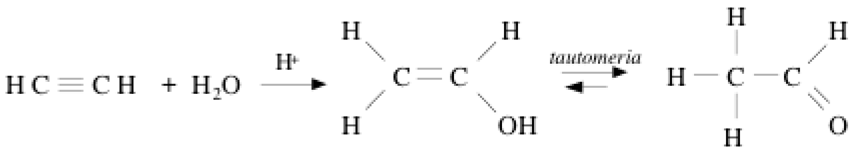
Reazioni caratteristiche: Addizione elettrofila

Mentre le proprietà chimico-fisiche degli alcheni (punti di fusione e di ebollizione, solubilità) sono molto simili a quelle dei corrispondenti alcani, la loro reattività è molto diversa. Per il fatto di contenere un doppio legame carbonio-carbonio e quindi un gruppo insaturo, gli alcheni *sono molto reattivi* e danno reazioni tipiche che impegnano il doppio legame. Una reazione caratteristica del gruppo funzionale C=C è la *reazione di addizione*, che porta alla formazione di composti saturi.

Idrocarburi insaturi: Alchini

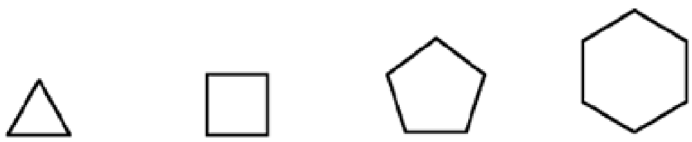
Gli **alchini** sono gli idrocarburi caratterizzati dal triplo legame carbonio-carbonio. A differenza del doppio legame che si incontra in numerose molecole di interesse biologico, il triplo legame è assai raro nel regno vivente. Per questo motivo, ci limiteremo solo a poche nozioni su questi composti. Il primo termine della serie è l'**acetilene** o *etino*, H-C≡C-H. Per quel che riguarda la nomenclatura, si fa riferimento al corrispondente alchene di pari numero di atomi di carbonio, cui si sostituisce la desinenza –ene con *–ino*. A differenza di alcani e alcheni, che sono tra le sostanze meno acide che si conoscano, gli alchini sono caratterizzati da una **debole acidità**: l'atomo di carbonio impegnato nel triplo legame si comporta infatti come se fosse più elettronegativo di un carbonio impegnato in un legame semplice o doppio. Per questo motivo gli alchini possono reagire con i metalli dei gruppi IA e IIA (ad esempio, Na e Ca) per dare composti di natura ionica: acetiluri e carburi:

Anche gli alchini, essendo composti insaturi, danno reazioni di addizione. Ad esempio, dall'addizione di acqua all'acetilene si ottiene alcol vinilico, un *enolo*, che tautomerizza spontaneamente ad aldeide acetica:



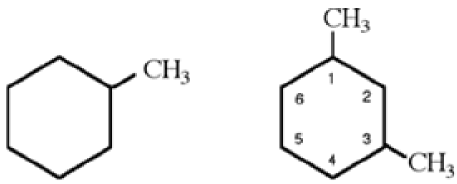
I **Cicloalcani**

I cicloalcani appartengono alla categoria degli idrocarburi aliciclici, quei composti cioè caratterizzati da una struttura ad anello costituito esclusivamente da atomi di carbonio. Vengono anche detti *omocicli,* in contrapposizione agli eterocicli, il cui anello contiene anche atomi diversi dal carbonio. Hanno caratteristiche che ricordano in larga parte quelle degli idrocarburi alifatici. Dato il loro limitato interesse biologico, ci occuperemo quasi esclusivamente della loro struttura, in particolar modo di quella del cicloesano, la cui conoscenza ci sarà utile in seguito per comprendere meglio la struttura dei monosaccaridi. Per quanto riguarda la nomenclatura, basta anteporre il prefisso *ciclo-* al nome del corrispondente idrocarburo alifatico. La loro struttura si può rappresentare semplicemente con una figura geometrica, omettendo gli atomi di carbonio dell’anello e gli idrogeni ad essi legati:



ciclopropano ciclobutano ciclopentano cicloesano

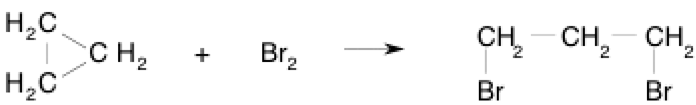
Si dovranno tuttavia mettere in evidenza eventuali sostituenti:



metil-cicloesano 1,3-dimetil-cicloesano

Reazioni dei cicloalcani

Ciclopropano e ciclobutano sono molecole in forte tensione (*tensione angolare*) a causa del fatto che gli angoli di legame degli atomi dell'anello sono molto distanti dal valore dell'angolo tetraedrico (109.5°), caratteristico dell'ibridazione sp^3. Per questo motivo, il ciclopropano e il ciclobutano sono molto reattivi e tendono a dare facilmente reazioni di addizione che provocano l'apertura dell'anello:



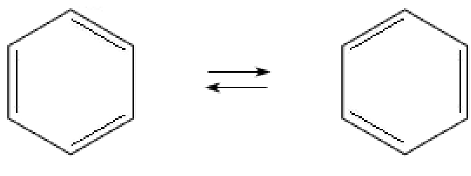
1,3-dibromopropano

Ciclopentano e cicloesano sono invece stabili e tendono a dare piuttosto reazioni di sostituzione radicalica, tipiche dei composti saturi. Attraverso il naturale ripiegamento dell'anello, ciclopentano e cicloesano possono assumere infatti angoli di legame pressoché tetraedrici.
Ad esempio, il cicloesano può esistere in tre diverse **conformazioni**, "a sedia", "a barca" e "twist", tutte prive di tensioni angolari. Delle tre, quella *"a sedia"* è la più stabile.

Idrocarburi Aromatici : **Il benzene**

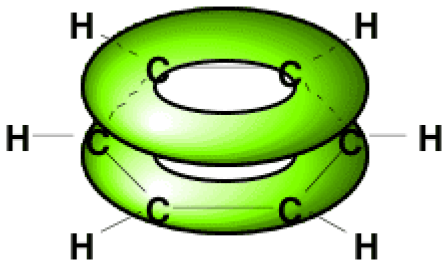
Il termine *«aromatico»* fu usato inizialmente per designare i composti organici dotati di *odore gradevole*. Oggi il termine ha piuttosto un significato "strutturale", poiché con esso si indicando molecole caratterizzate da **un particolare assetto elettronico**, che conferisce loro un determinato comportamento chimico. Il primo termine di questa famiglia è il *benzene*, che ha formula molecolare C_6H_6, con un rapporto C:H uguale a 1. La struttura della molecola del benzene ha rappresentato un enigma per i chimici, a partire dalla seconda metà del diciannovesimo secolo. La sua formula molecolare, C_6H_6, indicava che il benzene doveva essere un composto altamente insaturo (il corrispondente alcano a 6 atomi di carbonio contiene 14 idrogeni) e pertanto avrebbe dovuto dare con facilità le reazioni tipiche degli idrocarburi insaturi.
Fu ben presto chiaro che il benzene si comportava come se contenesse tre doppi legami. Questi doppi legami mostravano tuttavia un'insolita inerzia chimica, tale da non poterli equiparare a "normali" doppi legami carbonio-carbonio. Il termine **aromatico** iniziò ad assumere un significato volto piuttosto a descrivere il loro particolare comportamento chimico, cioè la tendenza a dare

reazioni di sostituzione nonostante l'elevato grado di insaturazione. Il problema era quindi quello di definire una struttura del benzene in grado di accordarsi con le osservazioni sperimentali.
Il primo a ipotizzare che il benzene avesse una struttura ciclica fu Kekulé (1865). Successivamente, egli suggerì che la molecola si trovasse in uno stato di equilibrio tra due forme; un equilibrio talmente rapido che nessuna delle due poteva essere isolata:

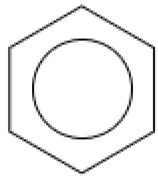


Struttura di Kekulè del benzene

In un certo senso, l'ipotesi di Kekulé anticipava l'idea della risonanza, anche se lo faceva attraverso quell'interpretazione che si deve assolutamente evitare nella descrizione del fenomeno: ovvero, immaginando che la molecola passasse metà del proprio tempo in una forma e metà nell'altra. A Kekulé si deve comunque riconoscere il merito di quella geniale rappresentazione –era il 1872–, che peraltro rimase per molti anni la miglior descrizione della molecola del benzene. I dati sperimentali sono perfettamente in linea con questa rappresentazione: ogni legame C-C è equivalente e la lunghezza di legame (1.39Å) è intermedia a quella prevista per un legame semplice (1.54Å) e uno doppio (1.33Å). L'ordine di legame è 1.5; la molecola è planare con angoli di 120°; la forma è quindi quella di un esagono regolare. Ogni carbonio ha ibridazione sp^2 e i rimanenti orbitali *p* non ibridati, uno per atomo, sono disposti perpendicolarmente al piano e parallelamente fra loro. In questo modo, i sei elettroni rimanenti possono delocalizzarsi in *un unico orbitale π esteso a tutto l'anello*.



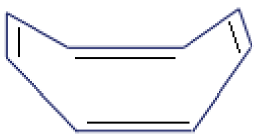
È allo scopo di mettere in evidenza questo aspetto che si usa rappresentare il benzene come un esagono con un cerchio al centro.



Questo particolare assetto elettronico giustifica la reattività anomala di un sistema immaginato come insaturo, ma che in realtà non può considerarsi tale. In questa osservazione è implicito che la molecola del benzene è **molto più stabile** di quello che ci si aspetterebbe per strutture come quelle rappresentate dalle formule canoniche di risonanza. L'aspetto veramente notevole, legato al fenomeno dell'aromaticità, è proprio l'*elevato valore dell'energia di risonanza* della molecola del benzene. Si preferisce in questo caso parlare di stabilizzazione per delocalizzazione, piuttosto che di stabilizzazione per risonanza.

Condizione di aromaticità: (4n+2) elettroni π in un sistema ciclico planare

Basandosi su calcoli applicati alla meccanica quantistica, Erich Hückel dimostrò che per essere aromatico un composto deve avere nuvole elettroniche **cicliche** contenenti **4n+2 elettroni π** delocalizzati (regola di Hückel). La delocalizzazione elettronica in un sistema ciclico non è quindi condizione sufficiente per l'aromaticità, ma occorre un determinato numero (2, 6, 10, 14, etc.) di elettroni π. Un'ulteriore condizione di aromaticità è la **planarità** dell'anello. Ad esempio, un composto come il cicloottatetraene non può avere carattere aromatico, non solo perché contiene 8 elettroni π, ma anche perché non può assumere una struttura planare. I dati sperimentali confermano questa ipotesi.

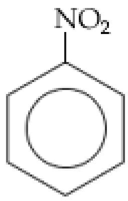


cicloottatetraene

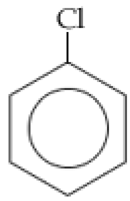
Studi cristallografici hanno mostrato che nel *cicloottatetraene* i legami sono alternativamente lunghi e corti (singoli e doppi): questa molecola è quindi un semplice poliene ciclico. Poiché gli angoli interni di un ottagono regolare sono di 135°, il tentativo di far assumere al cicloottatetraene una struttura planare, implicherebbe una forte tensione angolare dei legami dell'anello in cui tutti i carboni sono ibridi sp2 e tendono quindi a formare angoli di legame di 120°.

Nomenclatura

Normalmente i derivati del benzene si indicano aggiungendo il suffisso *-benzene* al nome del sostituente:

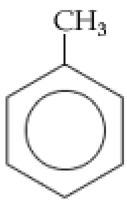


nitrobenzene

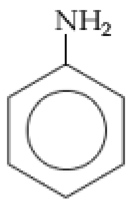


clorobenzene

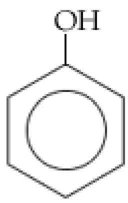
Molti derivati hanno tuttavia *nomi di fantasia:*



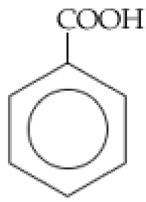
toluene



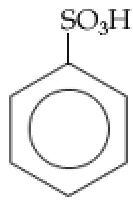
anilina



fenolo

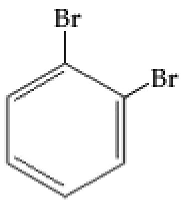


acido benzoico

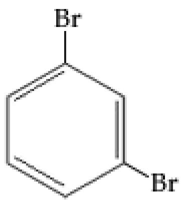


acido benzensolfonico

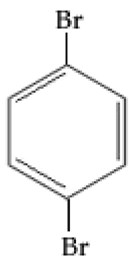
Nel caso sia presente più di un sostituente, le posizioni vengono identificate mediante i prefissi orto- (*o*-), meta- (*m*-), para- (*p*-):



o-dibromobenzene (orto)

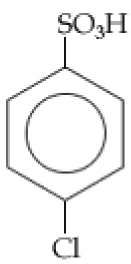


m-dibromobenzene (meta)

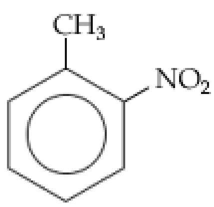


p-dibromobenzene (para)

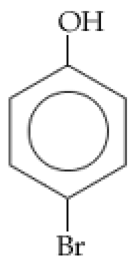
Se i gruppi sono diversi, si premette il nome dei sostituenti al suffisso *-benzene*. Se uno dei sostituenti dà un nome particolare al derivato, allora si premette il nome del sostituente a questo nome:



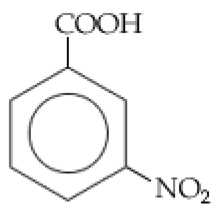
acido p-cloro benzensolfonico



o-nitrotoluene

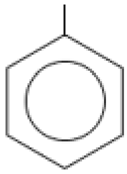


p-bromofenolo

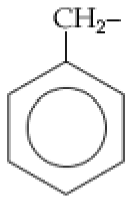


acido m-nitro benzoico

Quando l'anello del benzene deve essere considerato un sostituente, piuttosto che il composto base, il gruppo che deriva da esso per rimozione di un idrogeno, prende il nome di **fenile**. Si chiama invece **benzile** il gruppo che deriva dal toluene per rimozione di un idrogeno del metile:



fenile

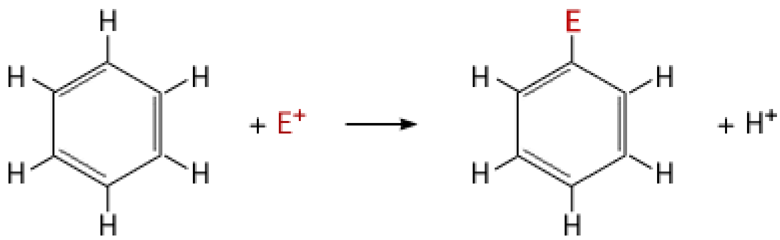


benzile

Reazioni di sostituzione elettrofila

Il benzene non dà reazioni di addizione poiché queste lo trasformerebbero in un prodotto meno stabile, distruggendo il sistema aromatico dell'anello. Qualsiasi reazione di addizione sul benzene, richiedendo condizioni drastiche, porta alla completa saturazione di tutti i legami π. Per questo motivo, il benzene tende a dare piuttosto **reazioni di sostituzione**.

La reazione di sostituzione elettrofila avviene sostanzialmente con lo stesso meccanismo, indipendentemente dal sostituente: *l'elettrofilo va a sostituire un idrogeno dell'anello che esce come protone*. La diversità tra una sostituzione e un'altra consiste esclusivamente nella *preparazione del reagente elettrofilo* (E^+).



ESERCIZI SUL BILANCIAMENTO DELLE REAZIONI REDOX E CALCOLO STECHIOMETRICO

1) Bilanciare la seguente reazione :

$$Zn + As_2O_3 + H_2SO_4 \longrightarrow ZnSO_4 + AsH_3 + H_2O$$

e calcolare il volume, a 0.75 atm e 27 °C, di AsH_3 che si forma facendo reagire 10 gr. di Zn con 0.494 gr. di As_2O_3.

2) Bilanciare la seguente reazione :

$$PbS + HNO_3 \longrightarrow PbSO_4 + NO_2 + H_2O$$

Calcolare la quantità di solfato di piombo che si forma facendo reagire 30gr. di solfuro di piombo con 30 gr. di acido nitrico.

3) Bilanciare la seguente reazione :

$$NaClO + I_2 + NaOH \longrightarrow NaIO_3 + NaCl + H_2O$$

Calcolare la quantità di iodato di sodio che si forma facendo reagire 30gr. di ipoclorito di sodio con 30 gr. di iodio.

4) Bilanciare la seguente reazione:

$$Cl_2 + NaOH \longrightarrow NaClO_3 + NaCl + H_2O$$

Calcolare la quantità in grammi di Cl_2 necessaria per produrre,.con eccesso di NaOH, 30.8 g. di $NaClO_3$, sapendo che la resa percentuale della reazione è 71.7%.

5) Bilanciare la seguente reazione :

$$KMnO_4 + K_2SO_3 + H_2O \longrightarrow MnO_2 + K_2SO_4 + KOH$$

Calcolare la quantità di biossido di manganese che si trasforma facendo reagire 20 gr. di permanganato di potassio con 20 gr. di solfito di potassio.

6) Bilanciare la reazione :

$$MnO_2 + FeSO_4 + H_2SO_4 \longrightarrow MnSO_4 + Fe_2(SO_4)_3 + H_2O$$

Determinare la purezza di un minerale contenente pirolusite (MnO_2), sapendo che 40,50 g. del minerale vengono ridotti completamente a solfato di manganese, in presenza di acido solforico, da 130,5 g. di solfato ferroso che si ossida a solfato ferrico.

7) Bilanciare la seguente reazione :

$$K_2Cr_2O_7 + KCl + H_2SO_4 \longrightarrow Cl_2 + Cr_2(SO_4)_3 + H_2O + K_2SO_4$$

Calcolare la quantità in grammi di cloro che può essere ottenuta facendo reagire 80g. di bicromato di potassio con 80 g. di cloruro di potassio in ambiente acido per acido solforico.

8) Bilanciare la seguente reazione:

$$FeSO_4 + K_2Cr_2O_7 + H_2SO_4 \longrightarrow Cr_2(SO_4)_3 + Fe_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + H_2O$$

Calcolare quanti grammi di solfato ferroso sono necessari per ridurre, in presenza di acido solforico 18,77 g. di bicromato di potassio a solfato di cromo.

9)Bilanciare la seguente reazione :

$$Fe(NO_3)_2 + HNO_3 \longrightarrow Fe(NO_3)_3 + NO + H_2O$$

Calcolare la quantità di nitrato ferrico che si ottiene facendo reagire 20 gr. di nitrato ferroso con 1 gr. di acido nitrico.

10) Il permanganato di potassio ossida l'acido ossalico, in ambiente acido, a biossido di carbonio secondo l'equazione :

$MnO_4^- + (COOH)_2 + H^+ \longrightarrow Mn^{2+} + H_2O + CO_2$

Dopo aver bilanciato l'equazione determinare la massima quantità di CO_2 che si forma da 1.742 g di permanganato di potassio e da 1.053 g di acido ossalico in presenza di un eccesso di acido solforico.

11) Bilanciare la reazione:

$K_2Cr_2O_7 + HCl + KI \longrightarrow CrCl_3 + I_2 + H_2O$

Determinare la quantità in grammi di ioduro di potassio necessaria per ridurre in ambiente acido per acido cloridrico, 3.8 g di bicromato di potassio a tricloruro di cromo con sviluppo di iodio.

12) Bilanciare la seguente reazione :

$NaClO + I_2 + NaOH \longrightarrow NaIO_3 + NaCl + H_2O$

Calcolare la quantità in grammi di ipoclorito di sodio necessaria per produrre con un eccesso di iodio, 30 g. di iodato di sodio, sapendo che la resa percentuale della reazione è 80 %.

13) 3 gr di un campione di ossido ferroso ed ossido ferrico vengono sciolti in acido cloridrico e titolati con 80 ml di permanganato di potassio 0,1N . Scrivere la reazione e determinare il contenuto di ossido ferroso presente nel campione.

14)Bilanciare la seguente reazione:

$K_2Cr_2O_7 + KBr + H_2SO_4 \longrightarrow K_2SO_4 + Cr_2(SO_4)_3 + Br_2 + H_2O$

Calcolare la quantità in grammi di bromo che può essere ottenuta facendo reagire 50g. di bicromato di potassio con 80 g. di bromuro di potassio in ambiente acido per acido solforico.

15) Bilanciare la seguente reazione:

$K_2Cr_2O_7 + KI + HCl \longrightarrow KCl + CrCl_3 + I_2 + H_2O$

Determinare la quantità in grammi di ioduro di potassio necessaria per ridurre in ambiente acido per acido cloridrico 3,83 g. di bicromato di potassio a tricloruro di cromo con sviluppo di iodio.

16) Bilanciare la seguente reazione:

$KMnO_4 + KCl + H_2SO_4 \longrightarrow MnSO_4 + Cl_2 + K_2SO_4 + H_2O$

Determinare il volume di cloro che si sviluppa dalla reazione alla temperatura di 30°C e alla pressione di 800 mmHg, facendo reagire 80g di permanganato di potassio con 150 g di cloruro di potassio in ambiente acido per acido solforico.

17) Bilanciare la seguente reazione :

$NaClO + I_2 + NaOH \longrightarrow NaIO_3 + NaCl + H_2O$

Calcolare la quantità in grammi di ipoclorito di sodio necessaria per produrre con un eccesso di iodio, 30 g. di iodato di sodio, sapendo che la resa percentuale della reazione è 80 %.

18) Il bromuro di potassio reagisce con l'acido solforico per dare bromo, biossido di zolfo acqua e solfato di potassio. Scrivere bilanciare la reazione e calcolare i litri a c.n. di biossido di zolfo che si formano se 5,94 g di bromuro di potassio reagiscono con la quantità sufficiente di acido solforico.

19) Il bicromato di potassio reagisce con il cloruro di potassio in ambiente acido per acido solforico, si sviluppa cloro e si forma solfato di dipotassio, trisolfato di dicromo e acqua. Bilanciare la seguente reazione e calcolare la quantità in grammi di cloro che può essere ottenuta facendo reagire

120g. di bicromato di potassio con 120 g. di cloruro di potassio in ambiente acido per acido solforico.

20) Bilanciare la seguente reazione secondo il metodo ionico elettronico :
$Zn + As_2O_3 + H_2SO_4 \longrightarrow ZnSO_4 + AsH_3 + H_2O$
e calcolare il volume, a 570 mmHg e 27 °C, di AsH_3 che si forma facendo reagire 20 gr.di Zn con 0.988 gr. di As_2O_3.

Esercizi di Calcolo Stechiometrico concentrazioni soluzioni e pH

1) 0.1 moli di idrossido di sodio vengono aggiunte ad 1 litro di acido acetico (Ka = 1.8×10^{-5}) 0.125M. Calcolare la concentrazione in ioni idrogeno della soluzione ed il pH della soluzione prima e dopo l'aggiunta dell'idrossido di sodio.

2) Un volume di 50 ml di soluzione acquosa 0,01 M di diidrossido di calcio (base forte) viene titolato con una soluzione acquosa 0,015 M di acido acetico (CH_3COOH; Ka (25°C) = $1,8 \times 10^{-5}$). Si calcoli il pH della soluzione al punto d'equivalenza a 25°C.

3)1 g. di zinco viene disciolto in 50 ml di acido cloridrico 0,645 N. Calcolare la normalità dell'acido dopo la dissoluzione dello zinco ed il peso di cloruro di zinco formato.

4) 0,1 moli di idrossido di sodio vengono aggiunte ad 1 litro di acido acetico (Ka = $1,8 \times 10^{-5}$) 0,125 M. Calcolare la concentrazione in ioni idrogeno della soluzione. Si consideri che l'addizione del sale solido non determini variazioni di volume.

5) Sapendo che 20,4 ml di una soluzione di acido cloridrico sono neutralizzati da 25 ml di una soluzione di idrossido di bario e che 12,5 ml di quest'ultima sono neutralizzati da 11,9 ml di acido solforico 0,102 N, determinare la normalità della soluzione di acido cloridrico.

6) Quanti grammi di cloruro di ammonio si debbono aggiungere ad 1litro di acqua per avere una concentrazione in ioni OH^- di 10^{-9} moli /litro? ($K_{NH3} = 1,8 \times 10^{-5}$)

7) Si vuole ottenere una soluzione costituita da acido acetico e acetato di sodio a pH4. Allo scopo si usano 100 ml di una soluzione acquosa di acido acetico 0,1M che vengono fatti reagire con idrossido di sodio. Calcolare quanti grammi di idrossido di sodio devono essere aggiunti alla soluzione per ottenere quanto richiesto. (Ka $=1,8 \times 10^{-5}$ mol x l^{-1}) . L'aggiunta di idrossido di sodio non varia il volume della soluzione.

8) Sapendo che 20,4 ml di una soluzione di acido cloridrico sono neutralizzati da 25 ml di una soluzione di idrossido di bario e che 12,5 ml di quest'ultima sono neutralizzati da 11,9 ml di acido solforico 0,051 M, determinare la normalità della soluzione di acido cloridrico.

9) Magnesio e zinco metallico reagiscono con gli acidi diluiti liberando idrogeno. Un campione di 2,448 g di una miscela dei due metalli sviluppa 1,248 l di idrogeno a 21°C e 754 mmHg raccolto su acqua. Qual'è la percentuale in peso di zinco nella miscela ? (La tensione di vapore dell'acqua a 21°C è 19 mmHg).

10) E' data una soluzione 0,500 M di acido orto fosforico, 100 ml della quale reagiscono con 40,9 ml di idrossido di sodio per dare il mono idrogenofosfato di disodio. Calcolare la normalità della soluzione di idrossido di sodio.

11) Calcolare il pH di una soluzione ottenuta aggiungendo 75 ml di acido acetico 0,1M a 50 ml di idrossido di sodio 0,1N . (Ka = $1,8x10^{-5}$).

12) Il pH di una soluzione 0,15 M di un acido debole HA vale pH = 4,5 a 25°C. Si calcoli quante moli del sale sodico NaA vanno disciolte in un litro della soluzione dell'acido per portare il valore del pH, sempre a 25°C, a pH = 9 .

13) Quante moli di cloruro di ammonio si debbono aggiungere ad 1 litro di acqua per avere lo stesso pH di una soluzione 0,1M di HCN ? (K_{NH3} = $1,8 \times 10^{-5}$; K_{HCN} = $2,1 \times 10^{-9}$).

14) Qual è la composizione percentuale in peso di idrossido di sodio presente in una soluzione 4 N di NaOH che ha una densità di 1,15 g/ml.

15) Una soluzione contiene 1,15g di una miscela di NaOH e KOH che viene neutralizzata da 48,3 ml di acido solforico 0,5N. In quali quantità le due basi sono rispettivamente contenute nella soluzione

16) Calcolare il pH di una soluzione contenente g. 1,07 di cloruro di ammonio, in 200 ml di acqua. La costante di dissociazione dell'ammoniaca è K_{NH3} = 1,8 x 10-5.

17) Calcolare come varia il pH di una soluzione costituita da acido acetico 0.08 M ed acetato di sodio 0.10 M quando a 100 ml di tale soluzione vengono aggiunti 100 ml di HCl 0.02 M. La costante di ionizzazione dell'acido acetico, Ka è 1.8×10^{-5}.

18) 2 ml di una soluzione di acido cloridrico al 10.2% in peso (d = 1.047 g/ml) vengono diluiti con acqua fino ad ottenere un litro di soluzione. Determinare il pH di tale soluzione.

19) Un acido organico biprotico H_2A ha le seguenti costanti di dissociazione : $K_1 = 7.94 \times 10^{-5}$; $K_2 = 1.68 \times 10^{-12}$. Calcolare la concentrazione di una soluzione di questo acido sapendo che il pH è 2.431.

20) Calcolare quanti grammi di nitrito di sodio devono essere sciolti in 200 ml di acqua per ottenere una soluzione avente pH = 8,5. La costante di ionizzazione dell'acido nitroso è Ka = $5,1\ 10^{-4}$.

Esercizi di Calcolo Stechiometrico elettrochimica

1) Descrivere i processi elettrodici di scarica e determinare quanti grammi di cromo si depositano da una soluzione acquosa di solfato di cromo al passaggio della stessa quantità di corrente che libera 31,4 grammi di piombo da una soluzione acquosa di nitrato di piombo. Si suppone che il rendimento di corrente sia eguale nei due casi.

2) Una corrente deposita 200 g di zinco in 8 ore. Per quanto tempo deve passare questa corrente attraverso una soluzione di cloruro di sodio per mettere in libertà un metro cubo di cloro a c.n. , assumendo che questa sia l'unica reazione all'anodo.

3)Una corrente passa per 15 minuti attraverso una soluzione diluita di acido solforico liberando 50 ml di idrogeno a 22°C e 750 mmgH.. Calcolare il numero di coulomb, l'amperaggio necessario per questa elettrolisi e descrivere i processi elettrolitici di scarica.

4)Il potenziale normale della semicoppia $AgCl + e^- \longrightarrow Ag + Cl^-$ é 0.2245 volt e quello della semicoppia $Ag^+ \longrightarrow Ag$ 0.80 volt. Calcolare il prodotto di solubilità del cloruro di argento

5) Che intensità deve avere una corrente per depositare 0.01 moli di oro da una soluzione di $AuCl_3$ in 2 ore? Che tensione si deve applicare se la resistenza della cella è di 5 ohm?

6) Per quanto tempo deve passare una corrente di 20 ampere attraverso una soluzione di $AgNO_3$ per avere un deposito di 40 g. di argento ? Quante moli di ossigeno si formano?

7) Una pila a concentrazione è costituita da una semicella in cui un elettrodo di Pt è immerso in una soluzione 1M di acido cloridrico e da una seconda semicella in cui un elettrodo di Pt è immerso in una soluzione 1M di acido acetico. Su entrambi gli elettrodi viene fatto gorgogliare idrogeno gassoso alla pressione di un'atmosfera. Sapendo che per l'acido acetico Ka = $1.76 x 10^{-5}$, calcolare la f.e.m. della cella e dire quale elettrodo funge da anodo.

8) Una corrente deposita 400 g di rame in 8 ore. Per quanto tempo deve passare questa corrente attraverso una soluzione di cloruro di potassio per mettere in libertà un metro cubo di cloro a c.n. , assumendo che questa sia l'unica reazione all'anodo.

9) Una cella Daniell è stata preparata immergendo una sbarretta di rame metallico in 0,100 l di una soluzione 0,100 M di solfato di rame e una sbarretta di zinco in 0,100 l di una soluzione 0,100 M di solfato di zinco. Le due semicelle sono state quindi collegate mediante un circuito esterno . Dopo un certo periodo di funzionamento della cella si è trovato che la concentrazione della soluzione di solfato di rame era 8,00 x 10^{-2} M. Calcolare quanti coulomb sono stati erogati dalla cella.

10) Quale volume di solfato ferroso 0,1 N viene ossidato da una corrente di 1 ampere in due ore?

11) Quanto tempo impiega una corrente di 4 A per depositare 24 g. di nichel da una soluzione di solfato di nichel ?

12)La soluzione di un metallo è stata elettrolizzata; calcolare il peso equivalente del metallo dai seguenti dati :
a) aumento di peso al catodo g 0,675;
b) intensità della corrente 0,75 ampere;
c) tempo di elettrolisi 45 minuti

13 Calcolare la f.e.m. della seguente cella a concentrazione:
Ag / Ag_2SO_4 (soluz. Satura) // $Ag+$ (0,1 M) / Ag
il prodotto di solubilità del solfato di argento è 1,6 x10^{-5}.

14) Calcolare la concentrazione idrogenionica H_x^+ ed il pH di una soluzione sapendo che a 30 °C la f.e.m. della seguente pila :

Pt, H_2 / soluz. H_x^+ // Hg_2Cl_2 (KCl sat.) / Hg , Pt

è 0,521 volt ed il potenziale dell'elettrodo a calomelano saturo è 0,251 volt.

15) Il funzionamento di una cella a combustibile è basato sulla seguente reazione:

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

La cella è costituita da due elettrodi di carbone poroso immersi in una soluzione di KOH e il reparto catodico è separato da quello anodico mediante un setto poroso. Su uno degli elettrodi viene fatto gorgogliare H_2 , sull'altro O_2. Dato che la reazione è molto lenta, si unisce al carbone impiegato per la preparazione degli elettrodi una miscela di catalizzatori. Calcolare il volume di H_2 e di O_2 (a 25 °C e 1atm) consumati durante l'erogazione di 100 A per 3 minuti.

16) nelle batterie al piombo impiegate nelle automobili la semireazione anodica è:

$$Pb_{(s)} + HSO_4^- + H_2O \longrightarrow PbSO_4 + H_3O^+ + 2e^-$$

Calcolare il peso di Pb necessario perché la batteria sia in grado di erogare 50 amperora.

17) Una cella a concentrazione è così costituita:

$$Pt \mid H_2 \ (1atm), HCl\ (1M) \ \mid\mid\ HCOOH\ (1M), H_2\ (1atm) \mid Pt$$

Calcolare la costante di dissociazione dell'acido formico sapendo che la f.e.m. della cella è 0,111 V.

18) Calcolare la f.e.m., a 25°C , della seguente pila :

$$Pt\ (H_2, P = 1{,}0\ atm.) / NaOH\ 0{,}1\ M \mid\ \mid CH_3COOH\ 0{,}1\ M / (H_2, P = 1{,}0\ atm.)\ Pt$$

sapendo che il grado di dissociazione di CH_3COOH è l'1%.

19) Su di un elettrodo di Pt immerso in una soluzione di HCl 1M viene inviata una miscela di H_2 e di He alla pressione di un'atmosfera. Il potenziale della semicella risultante è di 0,070 V. Calcolare la pressione parziale di H_2 nella miscela. ($E°_{H+/H2} = 0{,}00$)

20) Dopo 50 minuti di elettrolisi, in una soluzione contenente disciolto un sale di argento, il catodo, di nichel, della superficie di 100 cm^2 è ricoperto da uno strato di Ag dello spessore di 10 μ ($1\mu = 10^{-4}$ cm). Noto che la densità dell'argento vale d = 10,5 g/cc, e che il rendimento di corrente è del 90%, si calcoli l'intensità media della corrente di elettrolisi.

<u>METODOLOGIA DELL'APPRENDIMENTO</u>

A cura di
prof. Valerio Chiovaro

Si dichiara che il presente elaborato è originale e che è stato predisposto in funzione dell'attività formativa relativa ai Percorsi di potenziamento delle competenze di base anno 2009.

Lungo la via.
Spunti per una vita (universitaria) serena

CHIOVARO Valerio

Sommario

INTRODUZIONE

Queste poche pagine si affidano ai docenti e agli studenti dei precorsi di metodologia dell'apprendimento. Si tratta di semplici e sintetici appunti che hanno per fine una certa organicità nell'insegnamento/accompagnamento lungo questa manciata di ore utili all'impostazione della vita universitaria. È chiaro che lo scritto non ha presunzione di completezza. Così, la parte del cervello è trattata in maniera semplice senza addentrarsi in argomentazioni che sarebbero state di difficile presentazione ai non addetti ai lavori. Ancora, ad esempio, non ci si sofferma sui processi psicodinamici dell'apprendimento che si danno per conosciuti da chi, da diversi anni, opera nell'ambito della didattica.

La prima scelta da operare nel redigere uno scritto di questo genere è la prospettiva di fondo che è da tenersi costantemente presente. Si può offrire un approccio neurologico con la spiegazione dei processi cerebrali che portano all'apprendimento o alla memorizzazione; un approccio psicologico che spieghi il dinamismo psichico dell'apprendimento in riferimento, magari, alla crescita del soggetto. Ancora, si potrebbe offrire un approccio filosofico che, ad esempio, attraverso la gnoseologia e la filosofia del linguaggio, conduca ad una riflessione sul rapporto tra l'apprendibile, l'apprendente e l'apprensione. Vi può essere un approccio pedagogico sul come educare all'apprendimento; o uno tecnico che spieghi le diverse "metodiche" per meglio studiare.

La nostra scelta di base la potremmo definire esistenziale.

Siamo convinti, infatti, che l'inserimento dello studio nel progetto di realizzazione personale, di scoperta e risposta alla propria vocazione; la percezione dello studiare come tempo/strumento utile al proprio quotidiano sviluppo di felicità possano aiutare la persona a collocare lo studio nel giusto ambito della propria vita e soprattutto a stimolarlo ad una vita serena e responsabile.

Nota per i docenti

Non me ne vogliate per queste indicazioni - saranno scontate -, ma non vogliono essere retoriche. È ovvio che un buon corso di metodologia dell'apprendimento esige, da parte del docente, una buona prassi didattica. Non si può accompagnare all’apprendimento se non ci si interroga sulla qualità del proprio insegnamento. Non solo dal punto di vista dei contenuti quanto, piuttosto, da quello della modalità di comunicazione degli stessi; della capacità di entrare in sintonia con lo studente. Ecco, allora, alcune indicazioni pratiche per lo svolgimento del corso.

a) più che insegnare devi accompagnare;
b) prima di “solleticare” l’intelletto con dotti concetti, accogli la persona nella sua totalità;
c) cerca di capire e conoscere chi hai davanti, i suoi progetti, le paure, i punti di partenza. Non parli ad oggetti, hai davanti delle persone;
d) i giovani che si affacciano al tuo parlare ti donano la risorsa più preziosa che hanno: il loro tempo. Sii loro grato e restituisci con responsabilità quanto più sai, quanto più puoi, quanto più sei;
e) ti stai incontrando con persone che stanno cominciando una nuova avventura: motivali a viverla nella maniera migliore possibile;
f) educa alla disciplina dell’ascolto: non perché debbano ascoltare te ma perché quello che dici può essere per loro importante;
g) non banalizzare la fatica dei tuoi colleghi, non venire in ritardo, sii attento ai tuoi comportamenti: chi hai davanti ti giudica più per questi che per il tuo sapere;
h) sii umile: sarai ascoltato con più attenzione perché ci si accorgerà che non parli di te e per te, ma comunichi te a loro e per loro;
i) ringrazia la tua storia per il tuo sapere e mettilo a servizio dei tuoi studenti perché, alla fine del corso, possano essere migliori anche per ciò che hai dato loro;
j) chiediti sempre perché hai accettato di tenere questi corsi. Se la motivazione non riguarda il vantaggio che arrechi agli alunni saprai perché alla fine sarai stanco e infelice (anche per queste indicazioni).

Nota per lo studente

Stai cominciando una delle stagioni più belle, complesse e fondamentali della tua vita. Questi cinque anni di vita/studio decideranno chi sarai per tutta la tua esistenza. Vivili con serenità, serietà, pienezza. Questo tempo-storia-vita non te lo restituirà nessuno!

Il più lungo cammino comincia dal primo passo, fallo bene. *I grandi sogni hanno piccoli passi*, falli ben saldi e non dimenticare il tuo sogno lungo il tuo cammino: ti perderesti per strada o non avresti la forza di rialzarti.
Tu diventi anche ciò che studi, scegli prima di tutto chi vuoi diventare. Stai gettando le fondamenta della tua storia: su queste costruirai il tuo futuro e quello con le persone che ami. Le fondamenta, pure se non si vedono, sostengono tutto l'edificio. Progettale e realizzale robuste, perché l'edificio non crolli e perché, anno dopo anno, tu possa aggiungere piani al grattacielo accogliente della tua vita.
Studia non solo molto, ma soprattutto bene. Scegli quanto tempo dedicare allo studio, cosa studiare, come farlo e con chi farlo. Ma tieni sempre presente il perché lo fai. Ricorda: molti concetti - specialmente quelli che acquisisci nelle discipline di base - si ripeteranno in tante materie. Meglio farli tuoi subito, bene e una volta per tutte: risparmierai tanto tempo.
Studiare è pensare in maniera efficace ed efficiente: non annebbiare il tuo pensare con inutili diversivi alla vita che ti impaludano nella *ebetudine* della stupidità. No all'alcool, no al fumo, no a tutto ciò che brucia cervello e tempo: è dire "sì" alla vita.
Riconosci le persone che ti possono dare una mano: crea attorno a te un ambiente che sia motivante ed educativo, intellettualmente vivo. Respiriamo il nostro ambiente e tutto diventa più facile se questo è pulito e stimolante.
Fidati di chi con severità ti educa alla disciplina, vuole il tuo bene ed è disposto a sembrarti antipatico. *Non ti fidare dei perditempo*: ti chiamano solo quando hanno finito quello che dovevano fare o perché gli manca il quarto per giocare a briscola o perché vogliono ammutolire il loro senso di vuoto che deriva loro dal non fare nulla (aver compagni al duol scema la pena!). *Non ti fidare di docenti che non* fanno lezione, che non ti danno il massimo, che sono troppo accondiscendenti, che promuovono facilmente. Non stanno facendo il tuo bene. Sii educato con tutti, riconosci chi vale la pena seguire.
Prendi ogni cosa con giusto equilibrio: discerni ciò che è urgente e ciò che è importante.
Non ti scoraggiare ai primi fallimenti: sono questi che ti orienteranno ai più grandi successi.

Nota biografica

Valerio Chiovaro nasce a Reggio Calabria il 28-04-1971. È sacerdote della diocesi di Reggio Calabria - Bova, dove ricopre l'incarico di responsabile diocesano della pastorale universitaria e di segretario del consiglio presbiterale.
Nel 1996 consegue il baccalaureato in teologia presso l'Istituto San Tommaso di Messina. Nello stesso anno si laurea in chimica all'Università di Messina. Nel 2000 si specializza in teologia

biblica presso lo Studium Biblicum Franciscanum di Gerusalemme. Continua l'attività di archeologo cominciata nel 1998 in Giordania, partecipando a diverse campagne e progetti di restauro archeologico tra i quali il restauro della basilica del Santo Sepolcro a Gerusalemme, della chiesa di Betsaida, dell'Hisham Palace di Gerico. Nel 2004, sempre a Gerusalemme, si specializza in scienze bibliche ed in archeologia. Prosegue, nel frattempo, gli studi in chimica specializzandosi in scienze applicate al restauro all'Istituto Centrale per il Restauro di Roma. Nel 2001 conclude un master in gestione delle risorse umane e direzione del personale alla LIUC di Castellanza. Dal 2001 al 2007 insegna chimica applicata al restauro all'Università Mediterranea di Reggio Calabria. Dal 2002 ad oggi è titolare del corso di interfacoltà di abilità relazionali e competenze trasversali. Collabora con l'Università di Reggio Calabria in particolare per le attività di Orientamento in ingresso ed in itinere. Insegna, inoltre, ebraico, esegesi e teologia biblica presso l'Istituto Superiore di Scienze Religiose e lo Studio Teologico di Reggio Calabria. Ha pubblicato diversi articoli in riviste nazionali e internazionali. È giornalista pubblicista e guida ufficiale di Terra Santa.
Nel 2001, insieme a quattro giovani, ha fondato l'associazione Attendiamoci ONLUS che si occupa della prevenzione del disagio e del potenziamento delle risorse giovanili e che cura, in collaborazione con l'Università i campus di Orientamento Universitario e di Metodologia dell'apprendimento. Attendiamoci dal 2008 ha fondato e gestisce a Reggio Calabria *la Casa dei giovani*, una struttura che accoglie duecentocinquanta giovani la settimana e che si propone come ambiente educativo e stimolante alla crescita globale della persona. Nel 2009 ha progettato e fondato *la Bet Midrash* (casa dell'istruzione), una comunità giovanile per la sperimentazione di percorsi personalizzati per la formazione di eccellenza. Dello stesso anno è la nascita di *Edizioni Attendiamoci*, una casa editrice per la pubblicazione di strumenti utili alla formazione e destinati a giovani, educatori e famiglie.

1 LO STUDIO E LO STUDIARE

1.1 Alcune domande

Sono le domande che orientano la ricerca, che muovono la vita. Eccone un paio: *perché* studio? *Cosa* è lo studio? Sono le domande alle quali rispondere prima di raccontarci *come* si studia. Non si può, infatti, "aprire il libro" se non si risponde prima alla domanda di senso. È vero per ogni cosa, ancor più per la fatica dello studio.

1.2 Per una definizione di studio

Ci sono veramente tante definizioni di studio. Già nel corso della classicità romana Cicerone lo specificava come un'occupazione costante e piena di energia della mente: *Animi assidua et vehementer ad aliquam rem adplicata magna cum voluptate occupatio* (De Inventione, lib 1,25).
La stessa etimologia di studio rimanda al concetto di *desiderare*, *appassionarsi*, *avere cura*, ed anche *appoggiarsi*, *applicarsi a qualcosa con desiderio*.
Dante definisce lo studio come "applicazione dell'animo innamorato", citando implicitamente S. Tommaso che nella Summa Teologica (II-II q. 166 a.1) qualifica lo studio come *vehemens applicatio mentis*.
Desiderare, applicarsi, appassionarsi: tutti verbi che richiamano alla compromissione di una fatica che non è solo fare qualcosa, ma fare qualcosa con trasporto, con energia, con slancio. Fare qualcosa con ciò che si è per diventare ciò che si vuole essere. Ecco l'orizzonte lungo il quale ci muoviamo. Ci vuole passione!

1.3 Una definizione di studio

Tra le tante definizioni di studio ne riporto una, forse un po' tecnica, ma, mio avviso, abbastanza completa:

> Lo studio è una forma consapevole di apprendimento finalizzata alla scoperta e alla manipolazione intelligente della realtà attraverso le discipline (matematica, chimica, ecc.), in vista della propria umana realizzazione.

Queste poche righe dicono *cosa è* lo studio (una forma consapevole di apprendimento) e a *cosa serve* (scoperta e manipolazione intelligente della realtà), ma anche *la via* per raggiungere questo fine (attraverso le discipline) e *l'orizzonte* continuo di questa attività: la realizzazione personale.

Cominciando da questa definizione diciamo subito che per studiare bisogna essere *consapevoli*: di ciò che si è, di dove si vuole arrivare, del perché delle nostre attività. Non studia chi, in maniera bestiale, si mette davanti ad un libro per leggere e ripetere. Ci vuole consapevolezza. Lo studio, ancora è un'attività di apprendimento. Si tratta di apprendere con un metodo, con delle facoltà. Ma sull'apprendimento ci fermeremo parecchio dopo. Non si studia per studiare, lo studio non è fine a se stesso, né al superamento degli esami, né al conseguimento di un titolo. Si studia per scoprire e manipolare. Scoprire richiama al senso dello stupore, della fatica di chi ricerca. La manipolazione intelligente è dare forma alla realtà, umanizzarla. Ciò avviene attraverso le diverse discipline. Già il termine disciplina evoca l'utilizzo di una volontà ferrea alla quale ci si deve educare con determinazione. L'idea che l'uomo di scienza, o di cultura sia uno scapestrato indisciplinato è più un'invenzione romanzesca che una realtà. Lo dimostra la biografia delle persone di successo. Le diverse discipline (matematica, chimica, filosofia, storia, ecc.) sono diverse finestre aperte sullo sconfinato panorama della realtà, dell'esperibile, dell'apprendibile. Più discipline si possiedono, più linguaggi si conoscono, più approcci si hanno, più finestre apriamo sulla realtà, più la conosciamo secondo i diversi aspetti del suo aprirsi a noi. Vivere in una stanza con le finestre chiusa (non possedere la disciplina) è stare al buio convincendosi che l'unico panorama della realtà siano le tenebre. Questi sono gli anni nei quali spalancare delle finestre sul mondo, aprirne tante, aprirle al posto giusto, aprile ben bene. In vista della propria realizzazione personale, studiare, apprendere, scoprire, manipolare non sono azioni finalizzate a guadagnare soldi bensì a guadagnare in vita, in realizzazione. Per questo non va mai dimenticato il principio di fondo: siamo vocati alla felicità la quale, oltre ad essere un diritto, è un dovere, una condizione da costruire con scelte opportune. Altrimenti sarebbe come disegnare un quadro senza la tela: in tal modo si spreca il colore e l'opera d'arte che ci si attende non verrà mai in essere.

1.4 I tipi di studio

La tua esperienza ti dice che ci sono diversi tipi di studenti[1] e almeno tre tipi di studio: quello *meccanico-mnemonico*; lo studio *assimilativo-concettuale*; lo studio *critico-personale*.

Il primo tipo di studio è piuttosto bestiale, si tratta di leggere e ripetere, condizionando il proprio cervello a ritenere idee spesso scollegate tra di loro e con il nostro vissuto. È lo studio "spugna": assorbo una quantità massima di informazioni

---

[1] E tu che tipo di studente sei? Se vuoi verificarlo puoi utilizzare l'autodiagnosi di Casucci riportata in appendice.

da rilasciare alla strizzata dell’esame. Poi si passa ad altre cose da assorbire. È lo studio utile per l’interrogazione, ma inutile per crescere in cultura.
Il secondo tipo di studio è quello assimilativo-concettuale. Si comincia a distinguere, ad esempio nella lettura, ciò che è importane da ciò che non lo è. Si cerca, più che di memorizzare parole, di assimilare concetti, magari ripetendoli con parole proprie e incastonandoli nella mente, attraverso l’associazione con l’esperienza e con l’immaginazione.
Il terzo tipo di studio è sicuramente quello più maturo. Lo studio critico personale. È l’attività che mette al centro la persona, la sua esigenza di completezza, la consapevolezza che si diventa ciò che si studia. Che cultura è ciò che rimane quando ho dimenticato tutto. La persona è mossa da domande forti e da motivazioni profonde. È equilibrata. Questo studio consiste nel continuo associare ciò che si va studiando con la realizzazione dei propri sogni; con la coerenza col proprio progetto; con il prosieguo del proprio percorso. Si tratta di associare continuamente esperienze pregresse e previste, in un senso di presente che è quello di rendere ogni cosa presente a se stessi. È alimentato dal custodire i volti, le persone per le quali si studia, quelle del presente e quelle del futuro. Ha, quindi, una propulsiva carica affettiva. Si ciba nel gustare la fatica del divenire sempre più e sempre meglio la persona che si vuole e si è deciso di essere. È lo studio che vince i condizionamenti limitanti, la fatica, lo scoraggiamento, nella convinzione che per raggiunger la meta non basta camminare, ma bisogna scegliere anche la via giusta e la corretta attrezzatura da viaggio. Bisogna farsi guidare e sapersi lasciare accompagnare, perché i percorsi più impervi, le giungle più insidiose e i deserti più aridi si attraversano con successo solo in carovana. È di questo studio che parleremo di seguito. Lo studio inteso come fatica umanizzante.

1.5 Lo studiare, una fatica umanizzante

Lo studiare coinvolge tutte le nostre dimensioni: non solo quella intellettuale ma anche la fisica, la psichica, l’affettiva, la spirituale. Per questo spesso può essere difficile studiare, perché per studiare non basta aprire il libro, leggere, ripetere, ricordare. Studiare è diventare qualcuno, diventare la persona che sarai a fronte del cammino di fatica, ascesa, soddisfazione, fallimento, che farai nel tuo percorso di umanizzazione.
Si! Studiare è un percorso di umanizzazione. È crescere nella propria umanità, rispondere alla fondamentale esigenza di felicità. Studiare è diventare. Pertanto non si può prescindere dalla domanda di senso: tu chi sei? Chi vuoi diventare? Studiare, prima che un *fare*, è un *diventare*. Se hai chiaro *chi* vuoi diventare saprai *perché*

studiare. Forse ancora non saprai *come* studiare, ma se non conosci il senso delle cose non saprai pianificare il cammino verso la meta. Capita, a volte, di sapere dove andare, ma di non sapere quale sia il senso dell'andare. Per questo è utile sempre conoscere, alimentare, ricordare la motivazione di base: tu, studiando, diventi migliore, più efficacemente *tu – nel - mondo*; più veramente *tu – per – gli - altri.*
Prima domanda, allora: ***Chi vuoi diventare?*** Il mondo, oggi più che mai, non ha bisogno di ingegneri, chimici, avvocati, ma di persone che sanno pensare da ingegneri, da chimici, da avvocati. Non si tratta di occupare un posto in un organigramma aziendale. Il mondo del lavoro, oggi più che mai, ha bisogno di persone flessibili, capaci - prima di tutto - di pensare.
Lo studio ti educa a pensare, ti fornisce non solo i concetti e le idee, ma la flessibilità nell'armonizzarle, la capacità di articolarle, la possibilità di svilupparle. Si tratta di un percorso che cominceremo con gradualità perché, alla fine del cammino, tu possa avere gli elementi non solo per studiare, ma soprattutto per avere chiaro *il perché* dello studio e *il per chi* studiare. Per far questo bisogna partire da te.

1.6 È l'uomo che studia! Lo schema antropologico

Chi è l'uomo? **Chi sei tu?** Sono le domanda previe[2]. Non si può guidare un autoveicolo se non se ne conoscono le parti, se non si sa dove sia il manubrio, se non si conosce se sia un diesel o un gpl. Chi sei tu? È una domanda alla quale rispondere e non una volta per tutte. È una domanda che esige la fatica della ricerca e la capacità della meraviglia. Fatica, stupore… È la domanda che ti sei dovuto fare prima di iscriverti al tuo corso di laurea, valutando le tue tendenze, il tuo carattere, i tuoi carismi, le tue prospettive, i tuoi limiti.
Già dovresti avere un quadro abbastanza chiaro della persona che sei. Ma, prima di cominciare a muoversi, è bene specificare ciò che mi sembra utile al cammino.
L'uomo non è un *cosa*, ma un *chi*. Come *cosa* l'uomo è spiegabile, come *chi* egli è insieme mistero e sorpresa[3]. La domanda (chi è l'uomo, chi sei tu?) è facile e necessaria. La risposta, complessa e articolata. La prima risposta potrebbe essere:

---

[2] Per approfondire i contenuti di seguito presentati si può fare utilmente riferimento a: A. J. Heschel, *Chi è l'uomo?*, Milano, 1976. Per l'approccio psicologico V. E. Frankl, *Logoterapia e analisi esistenziale*, Brescia, 1977. Per le questioni antropologiche J. Gevaert, *Il problema dell'uomo*. Torino 1989. Più in generale V. Chiovaro, "Dal neoumanesimo della frantumazione al neoumanesimo della nostalgia e della profezia. Spunti per un cammino significativo" In *Ricerca di Senso. Analisi esistenziale e logoterapia frankliana* (febbraio 2005) e "Per un cammino di umanizzazione". In *La chiesa nel tempo. Rivista quadrimestrale di vita e di cultura*: (Gennaio-Aprile 2005).
[3] A. J. Heschel, *Chi è l'uomo?*, pag 43.

l'uomo è un essere che pone domande su se stesso. Quindi, dalla qualità e dalla consistenza delle domande che ti fai, scopri l'uomo che sei e, in qualche misura, diventi più o meno uomo.
È di certo impossibile studiare l'albero scavandone le radici: non si può comprendere l'uomo disarticolandolo e analizzandolo nelle sue parti. Faremmo dell'uomo un cadavere e risponderemmo alla domanda "*chi è un morto?*" e non alla nostra "*chi sei tu?*". Si tratta di rispondere alla questione fondamentale guardandoci mentre viviamo. L'uomo, io, tu, siamo vivi. Si tratta di fermarsi all'osservabile per raccogliere quanto incontriamo di noi e degli altri. Bisogna saper guardare e, a ben vedere, ecco alcuni elementi di risposta alla domanda "*cosa vedo quando osservo un uomo?*".
Li enucleo semplicemente: preziosità; unicità; possibilità; potenzialità; indefinibilità; processo ed eventi; solitudine e solidarietà; responsabilità e reciprocità; gioia e dolore; delirio e santità.
Non mi fermo su questi *osservabili*, approfondendo di seguito alcuni schemi antropologici e, in particolare, due: quello *delle tre potenze* e quello *delle multidimensioni*. Si tratta appena di schemi, di cornici di riferimento che non possono contenere l'opera d'arte che ciascuno di noi è pur permettendone una certa visione di insieme per una forma di "organizzazione" del mistero.

1.6.1 Le tre potenze

Secondo questo modello antropologico l'uomo è il continuo esercizio di tre potenze fondamentali: memoria, intelletto, volontà.

La memoria

La memoria, il "ri-cor-dare", consiste nel dare costantemente al cuore ciò che si vede, si sente, si esperisce, ciò che fa parte di noi, del nostro passato, del nostro futuro. È mettere nel cuore e nel cervello il giusto carburante, ciò che permette di farci diventare quello che veramente siamo. Una memoria disordinata, disorganizzata, piena di spazzatura inibisce il cuore, il pensiero; restituisce alla vita un senso di instabilità, fallimento, tristezza. Prima di cominciare un nuovo percorso, una nuova vita, un nuovo rapporto, bisognerebbe purificare la memoria, riorganizzarla, ri-cor-dando ciò che è utile, buono, giusto, bello. Lasciando da parte il resto…bisogna gettare via la spazzatura, gli ingombri inutili, le abitudini inefficaci. Anche lungo il percorso di studio/vita il cuore e il cervello - intesi come organi del discernimento, dell'elaborazione, delle emozioni- vanno costantemente monitorati e manotenuti. Una debole analogia potrebbe essere quella con il disco rigido del nostro computer: vanno fatte le giuste partizioni, va organizzato il materiale in cartelle specifiche, va cancellato ciò che diventa inutile, va fatto il back-up… Insomma se tutto ciò è utile per il pc, quanto più lo saranno la memoria, il cuore, il cervello per la nostra vita? Non ci si può permettere di stivare cose, volti, emozioni, progetti, in un sistema di elaborazione dei dati che non sia efficiente e pronto. **1° passo: purifica il cuore, il cervello. La memoria.**

L'intelletto

L'intelletto (*intus legere*) è la capacità di leggere dentro le cose per capirle (con-tenerle); com-prenderle (farle diventare parte di se) per diventare abili (capaci di…). Un intelletto pronto coglie i particolari e li inquadra in sistemi più generali. Guarda, vaglia, distingue, discerne. Raccoglie dati per elaborarli secondo procedure inconsce o consapevoli. Sa andare oltre l'increspatura del mare agitato per cogliere la corrente sottomarina che spinge i flussi oceanici ripopolando di vita gli abissi. Usare l'intelletto è uno stile di vita! L'atteggiamento di chi va oltre ciò che appare, servendosi di ciò che appare; di chi scarta la confezione per cogliere il contenuto. L'uomo intellettuale (e nessuno può essere uomo se non è intellettuale) è esperto di segni dei quali va cogliendo il significato. Non si ferma ad una vita "così come viene", priva di progettualità, di profondità. Non si ferma alla soddisfazione di bisogni primari e primitivi. Non si accontenta di ciò che solletica l'ombelico. L'uomo intellettuale cerca, ricerca, scava, trova per cercare ancora… in profondità, oltre. **2° passo**: **cerca, ricerca, scava, trova per cercare ancora… in profondità, oltre.**

La volontà

La volontà è la capacità di scegliere, di decidere, di fare unità tra pensiero e azione. Mentre alla memoria e all'intelletto fanno eco verbi come *ri-cor-dare* ed *intellegere*, alla memoria fa eco il verbo *amare*. Può volere veramente chi ha un'affettività ordinata. Il volere è più nella sfera della affettività che nell'esercizio reiterato di azioni. Spesso si pensa che per imparare a volere bisogna volere. Tale pensiero fa scadere, banalmente, in una contraddizione in termini. Tante volte mi si chiede: come imparo a volere? La risposta non può essere "*volendo volere*", perché se non so volere, come posso volere di volere? Senza incartarci troppo, possiamo subito dire che il volere è l'esercizio della libertà e la libertà nasce dalla affettività. Affettività deriva da affetto: essere colpiti, in qualche misura segnati, tracciati. Se sappiamo predeterminare i colpi, lasciarci colpire da ciò che ci fa bene, lasciarci tracciare da esperienze positive, eliminando, o quanto meno mitigando, le altre, ci educhiamo ad una buona affettività. Vivere istintivamente, così come viene, senza regole, non ci educa alla libertà, non ci fa maturare nella affettività, e ciò comporta inesorabilmente un difetto di volontà. Vive un difetto di volontà chi è anarchico, in costante subbuglio, agitato, sentimentalmente instabile. Ti sarà capitato di non riuscire ad applicare la volontà quando vivi una situazione sentimentale poco chiara, o, al contrario, a fronte di un volto, di un amore, di un affetto di volere/agire più intensamente facendo l'impensabile. È la forza dell'amore, l'energia dell'affetto che, se rettamente orientata, permette di scalare montagne e travalicare passi altrimenti impercorribili. L'amore ben vissuto spinge bene; l'amore mal vissuto spinge male, inibendo i centri del volere, alimentando emozioni e stati d'animo che spingono all'inefficienza. Dimmi se ami, come ami, e chi ami e ti dirò se puoi volere. Se ami male vuoi male. **3° passo La volontà è mossa dall'amore, dall'affettività. Un'affettività ordinata permette una volontà ferrea.**

1.6.2 Le multi dimensioni

Un altro schema antropologico di utile riferimento è quello della persona intesa come essere dinamico e multidimensionale.

Secondo questa prospettiva l'uomo è un poliedro di più dimensioni, una sinfonia di più linee melodiche che si con-fondono. Tanto più queste dimensioni sono armonizzate tanto più siamo sereni, pacificati, sicuri. Più che di stati da raggiungere, si tratta di dinamismi da vivere. Non siamo "così come siamo" una volta per tutte, non corriamo verso punti di arrivo che non siano essi stessi punti di partenza. Non siamo uno stabile equilibrio raggiunto una volta per tutte. Ogni equilibrio è dinamico, è una somma di situazioni che riguardano ciascuna delle dimensioni che mi costituiscono e l'armonico insieme delle stesse.

Sul numero delle dimensioni costitutive della persona vi sono diverse teorie. Noi ci soffermiamo su quella che ne enuclea otto: la fisico-corporea; la psichica; l'intellettiva; la spirituale; l'affettivo-relazionale; la storica; la sociale; l'etica.

La dimensione *fisico-corporea* riguarda la propria fisicità, il corpo inteso non come ciò che ho, ma come parte di ciò che sono, anche come linguaggio che mi può dire.

La dimensione *psichica* riguarda tutti i meccanismi psichici consci e inconsci che ci caratterizzano, i nostri determinismi; i comportamenti; le fobie; i complessi; i condizionamenti, ecc.

La dimensione *intellettiva* consiste nell'insieme di processi logico-formali che mettono ordine ai nostri pensieri. Sono l'insieme delle nostre conoscenze e la loro applicazione nel sistema di significato che diamo a cose ed eventi.

La dimensione *spirituale* riguarda il nostro insieme di convinzioni e di credenze che caratterizza le nostre scelte, la nostra visione della vita e la rilettura dell'esperienza entro un sistema di significati che includono e trascendono l'esperibile e che riguardano la dimensione di apertura alla trascendenza e di riconoscimento della intro-missione della trascendenza nella nostra vita.
La dimensione *affettivo-relazionale* attiene al mondo degli affetti, a come viviamo i rapporti sia prossimi che meno intimi, alla nostra capacità di affacciarci al mistero dell'altro per lasciarci coinvolgere dallo stupore dell'in-contro.
La dimensione *sociale* riguarda la nostra collocazione all'interno di rapporti più esterni e formali, il nostro status sociale, il nostro essere riconosciuti all'interno di un insieme ampio di persone, la nostra collocazione professionale, ecc…
La dimensione *storica* riguarda lo sviluppo della nostra persona, la sua capacità di riconoscersi dentro un progetto, di creare eventi che la coinvolgono e che coinvolgono gli altri. Questa dimensione riguarda l'essere dentro al dinamismo dello sviluppo nel quale il *mentre* è il punto di contatto tra il *prima* e il *dopo*; il *prima* è slancio al *dopo* nella continuità del progetto; il *dopo* è previsto nel *prima*.
La dimensione etica, infine, è l'insieme dei valori che determinano i giudizi, i riferimenti ermeneutici, le scelte, i comportamenti secondo criteri di giustizia, libertà, convivenza.
Tutte queste dimensioni caratterizzano l'uomo: un essere multidimensionale lanciato verso l'altro. L'insieme e lo sviluppo armonico di queste dimensioni, la loro commistione organizzata, restituisce la serenità, il senso di realizzazione. Non si può essere pienamente uomini se si è solo corso, o solo affetto o tanto storia-progetto e poco etica; se si è avviluppati da incontrollati meccanismi psichici o se si razionalizza ogni cosa con un approccio meramente intellettualistico. L'uomo è l'insieme armonico di questi aspetti e quello spirituale è la pacificante dimensione di sintesi, di rilettura di significato, di ermeneutica esistenziale di tutte le altre. È il campo di operazione - ed a volte di battaglia - dove l'uomo si scontra in sé e con l'altro e dove i combattimenti dell'anima aprono alla varietà di modulazione della reazione dell'uomo alle situazioni anche avverse della vita.
Man mano che si "cresce" - non si finisce mai di "crescere"- le diverse dimensioni trovano la a loro maturazione. Ma la vera maturazione è l'equilibrio tra queste. Per un'età la dimensione fisico-corporea è la più coinvolgente (si pensi all'adolescente che si "vede allungare il corpo" in breve tempo), poi quella affettiva, poi quella spirituale. Ogni età ha i suoi equilibri e quella dell'uomo adulto è l'età dell'equilibrio sintetico. Ogni dimensione, ben compaginata con l'altra, definisce la ricchezza e l'unicità della persona, ormai capace di "gestirsi" in termini di responsabilità e reciprocità.

Ma nessuno è chiuso in se stesso. Volutamente, finora, non ho usato il termine *individuo*. L'individuo è un essere indiviso in se stesso e diviso rispetto al resto. La persona, invece, è tale perché in relazione con l'altro. In altri termini non si dà *uomo-persona* se non si dà l'*altro- uomo - persona*. Non c'è io se non dentro la coppia fondamentale io-tu.
In sintesi: abbiamo proposto due quadri di riferimento antropologico: le tre potenze: memoria, intelletto, volontà; l'uomo come multi dimensione di otto caratteristiche fondamentali. L'uomo maturo è colui che usa le tre potenze e che articola armonicamente le otto dimensioni. In ogni caso la persona è un dinamismo che non si può cogliere se non nella relazione con l'altro.

1.7 La persona che studia

È proprio questa persona che teniamo presente. Non ha senso parlare di studio ma di persona che studia; non di metodo si studio o dell'apprendimento ma di persona che, attraverso un metodo, studia e apprende. Ed è per questa persona che scriviamo, convinti che lo studio non riguarda la sola dimensione intellettiva, né tantomeno la sola dimensione psichica. Lo studio, in quanto attività eccellentemente umana, riguarda tutte le dimensioni dell'uomo e tutte le sue potenze.
È questione di *corpo*: ossigenazione; alimentazione; processi neurologici; postura.
È questione di *psiche*: meccanismi di apprendimento; memoria; ansie; emozioni; stress; motivazioni.
È questione di *storia*: il proprio percorso di apprendimento; di scolarizzazione, la gestione del tempo; la progettualità.
È questione di *intelletto*: i processi di apprendimento; la capacità di elaborazione; di analisi; di sintesi; di collegamento, ecc.
È questione di *spiritualità*: la capacità di gestire i fallimenti e le vittorie, di disciplina, di distinzione tra fine e mezzi, di apertura all'Altro, è la forza di dare significati alti ad ogni minima azione.
È questione *sociale*: di discernimento del proprio ruolo nel mondo, di professionalizzazione nella società, di prospettiva lavorativa.
È questione *affettiva*: vorrò studiare se mi innamorerà di chi diventerò studiando, se mi applicherò con passione ed affetto a ciò che vado apprendendo e allo steso apprendere.
È questione *etica*: la ricerca della verità, l'insieme dei valori, la capacità di abituarsi alla fatica e allo stupore della scoperta.
Non è il solo corpo a studiare, o il solo cervello… Tutto ciò che sono nella mia multidimensionalità, nel mio mondo di relazioni ed affetti, nel mio progetto di vita e

nel corredo di significato che do alla mia storia. Tutto ciò che sono (e sono davvero tanto) studia. Per questo, per imparare a studiare efficacemente, non devo sottendere alla complessità di ciò che sono e devo rispettare ogni parte di me, considerarla con attenzione e benevolenza.

1.8 Lo studio e le motivazioni

L'uomo è un essere alla perenne ricerca del significato della sua vita ed è solo attuando un tale significato che egli può ottenere la piena realizzazione di sé e delle sue potenzialità (V. E. Frankl)

Proprio perché lo studio, prima che tecnica, o disciplina, o metodo, è crescita integrale della persona, è bene fermarsi su alcune domande di senso: Perché studio? Per chi studio?

Spesso ci viene chiesto "*cosa studi?*". O, ancora, "*dove studi?*". Poche volte ci viene domandato "*come studi?*" o "*perché studi?*", o "*per chi studi?*".

Ancora, fin da quando siamo bambini, genitori, professori, educatori ci dicono: *devi studiare*! Perfino ci viene detto *cosa* studiare. Pochi ci dicono *come* studiare. Tanti sono i professori che ci *insegnano la materia* da studiare, ma non lo spirito *col quale* studiare.

Mi si dirà che parto da lontano, ma, dopo la nostra impostazione antropologica, mi sembra utile rispondere a qualche domanda o, meglio, ribadire la convinzione che la vita è spinta e sostenuta dalla forza delle domande. Sono le domande ad orientare la nostra energia di ricerca, a dare senso alla nostra fatica di scoperta. E le domande sono sostenute e a loro volta spinte dalle motivazioni.

Le motivazioni

La stessa parola *motiv-azione* ci dice di cosa stiamo parlando: i motivi che spingono all'azione. Lo studio è un'azione complessa, faticosa, che coinvolge tutte le nostre dimensione e tutte le nostre potenze. Ci assorbe completamente, per questo non si può fare contemporaneamente ad altre attività. Non si può studiare senza motivi, deve valere la pena della fatica, dobbiamo conoscere perché tanto tempo, tante rinunce, tante energie sono investite in questa solitaria attività della nostra totalità. Altrimenti sarebbe come spendere un capitale senza averne alcun contraccambio. Quali sono i motivi per i quali studio? Potremmo dire subito: una soddisfazione del bisogno di sapere, e, in prospettiva, una possibilità di guadagno che mi permetta di realizzare il mio senso di autonomia. Di certo la motivazione economica, per quanto necessaria, non è la principale, o la più spingente. Può essere una conseguenza dello studio, più che una motivazione allo studio. Il novero di motivazioni può essere ricondotto alla sfera della realizzazione personale, che include quella professionale-sociale. Studio per affinare la mia condizione, per conoscere, riconoscere, applicare, trasformare… Studio per migliorare continuamente. Studio per rispondere ad un'esigenza reale, quanto improcrastinabile, di felicità.

La felicità

Il tema della felicità è alquanto complesso e non è il luogo per trattarlo come meriterebbe. È comunque innegabile il rapporto tra studio e felicità. Uno studente non può essere felice se non studia. Chi sceglie di migliorarsi attraverso lo strumento dello studio non può sentirsi realizzato se non studia. Ma cosa è la felicità? Ne diamo appena una definizione: *la felicità è un tesoro posseduto o assicurato per ottenere il quale bisogna: darsene pensiero; esercitare la volontà di possederlo e accrescerlo; nutrire un continuo senso di soddisfazione*[4]. La felicità è vivere il presente con unità, con pienezza, con prospettiva. Vivere Il presente informato da ciò che il passato e il futuro restituiscono in termini di memoria e profezia. Vivere in unità tra pensiero e azione; progetto e atto; strategia e significato, per una pienezza di soddisfazione, di pace e di senso. Tutto questo ha nello studio, almeno per lo studente, il suo strumento cardine. Ma torniamo alla motivazione che, dopo ciò che abbiamo detto, potremmo enucleare in due blocchi: studio per essere felice; studio per migliorarmi e così per migliorare il mondo. Più diffusamente: *studio per vivere la felicità, per diventare la parte migliore di ciò che sono e per migliorare quanti amo, o conosco, quanti amerò e incontrerò. Studio per migliorare il mondo.* Sì! Mi sembra questo il miglior motivo: avere la consapevolezza che la mia felicità si gioca nel presente ben vissuto e nella utopia possibile che il mondo migliora se comincio a migliorare io e se contribuisco a migliorarlo con l'esercizio sempre più efficace delle mie potenze e con il progresso della persona che vado diventando nel - mondo e per – il - mondo. Per fare ciò devo apprendere sempre e da ogni cosa. Lo studio, appunto, è una delle attività a maggior prospettiva di apprendimento.

---

[4]N. Irala. *Il controllo del cervello,* Roma 1970, pag 26.

2 STUDIARE E APPRENDERE

2.1 Ma come si studia? O Meglio come si apprende

Si apre con queste domande l'argomento del metodo di studio, o di apprendimento. Prima di tutto chiariamo la differenza tra studio e apprendimento. Dello studio abbiamo già detto. L'apprendimento è qualcosa di più generale. È un atteggiamento fondamentale di chi, attivati tutti i sensi, diviene capace di prendere, di imparare, da ogni cosa.

Ad - prendere è l'atteggiamento dinamico di chi *ad - prende*; di chi si muove "ad", verso ciò che gli viene incontro; di chi sa accogliere lo svelarsi di un qualcosa-qualcuno che si spinge verso di lui. L'apprendere esige così due atteggiamenti fondamentali: il dinamico muoversi; e lo stabile accogliere.

Il muoversi è una propensione fortemente "energetica". È la vittoria sulla pigrizia, sulla inerzia di chi è abituato a parziali punti di vista; è la coraggiosa capacità di avvicinarsi ed aprire altre finestre dalle quali osservare, con stupore, quella parte di panorama che, dalla solita apertura, ormai è scontata, familiare, banale. Muoversi è la capacità di lasciare parte di sé, di scommettere su altro, di non alimentarsi sempre della "stessa pappa"; è scrollarsi di dosso precomprensioni, presunzioni, preconcetti; è liberarsi dalle superfetazioni e dalle incrostazioni del già detto, già visto, per andare oltre i luoghi comuni, per "imbattersi" in un'altra parte di verità, in altre possibilità di conoscenza. Muoversi è orientare le energie; favorire l'immaginazione; sviluppare la creatività; sapere dove "mettere i piedi"; perfino correre il rischio di cadere.

Ma dicevamo che apprendere, contemporaneamente a muoversi, é anche accogliere.

Accogliere è lo stabile atteggiamento di chi, sconfitte alcune resistenze, si lascia incontrare; di chi vince il disordine, anche interiore, che non lascia spazio e impara, con umiltà e gratitudine, a ricevere. Accoglie colui che sa di non bastare a se stesso, che ha finalmente capito che è costitutivamente necessitato al miglioramento continuo. Non è facile accogliere: è sicuramente più facile dare. Accogliere è saper attendere, offrirsi come campo da arare e seminare, perché il seme nascosto germogli secondo il tempo della sua maturazione. Ci vuole fiducia, in sé e nell'altro, pazienza; necessita la capacità di orientare la vela secondo il vento, pur mantenendo la rotta verso il porto da raggiungere. Accogliere è discernere, capire ciò che va com-preso distinguendolo da ciò che è inutile ritenere. È fare ordine tra il prima e il dopo, l'essenziale e l'accidentale, il necessario e l'accessorio. È riconoscere le persone giuste e seguirle con coraggio e determinazione. Potremmo continuare ancora parecchio per descrivere con immagini e metafore cosa sia apprendere. Ma lo svilupperemo durante le pagine che seguono. Apprendere è anche gradualità!

Come si apprende?

Prima di parlare di metodi particolari è il caso di fermarsi sul processo dell’apprendimento. Lo faremo secondo diverse prospettive. Qui ne indichiamo due: una antropologico-filosofica; l’altra neurologica.

2.2 Il processo dell’apprendimento, una prospettiva antropologica

Diciamo, già da adesso, che apprendere è un atteggiamento umano che richiede i cinque sensi: gusto, olfatto, tatto, udito, vista; ma anche un certo “sesto senso” che è, per sua stessa natura, indefinibile. Questo è un insieme di intuizione, creatività, passione, determinazione, coraggio, ecc.

Secondo la cultura mediorientale si direbbe che, nel processo dell’apprendimento, ci vuole cuore. Il cuore è l’organo del discernimento, la fucina nella quale si elaborano, si determinano, si decidono le scelte. È un “organo interno” che non può, pertanto, ricevere i dati direttamente dall’esterno. Ha bisogno di “canali”, di vie di comunicazione esterno-interno, di vie di collegamento che portino i dati dall’esterno vissuto all’interno elaborante. La stessa idea di conoscenza (in ebraico come in greco) sottende la necessità della esperienza. Conosco ciò che esperisco, ed esperisco ad un maggiore grado di consapevolezza solo se apprendo.

Per esperire, dicevamo, devo usare i sensi: il guardare/osservare; il toccare/manipolare; l’odorare/fiutare; il sentire/ascoltare; l’assaggiare/gustare. Queste attività sensoriali permettono di sperimentare, quindi di conoscere, di corredare il cuore di input da elaborare per output/scelte che, pre-informate dalla esperienza, la possano trans-formare e umanizzare attraverso le azioni poste in essere a valle della scelta.

Apprendere, così, non è un mero intellettualismo, ma, più diffusamente, il processo del:

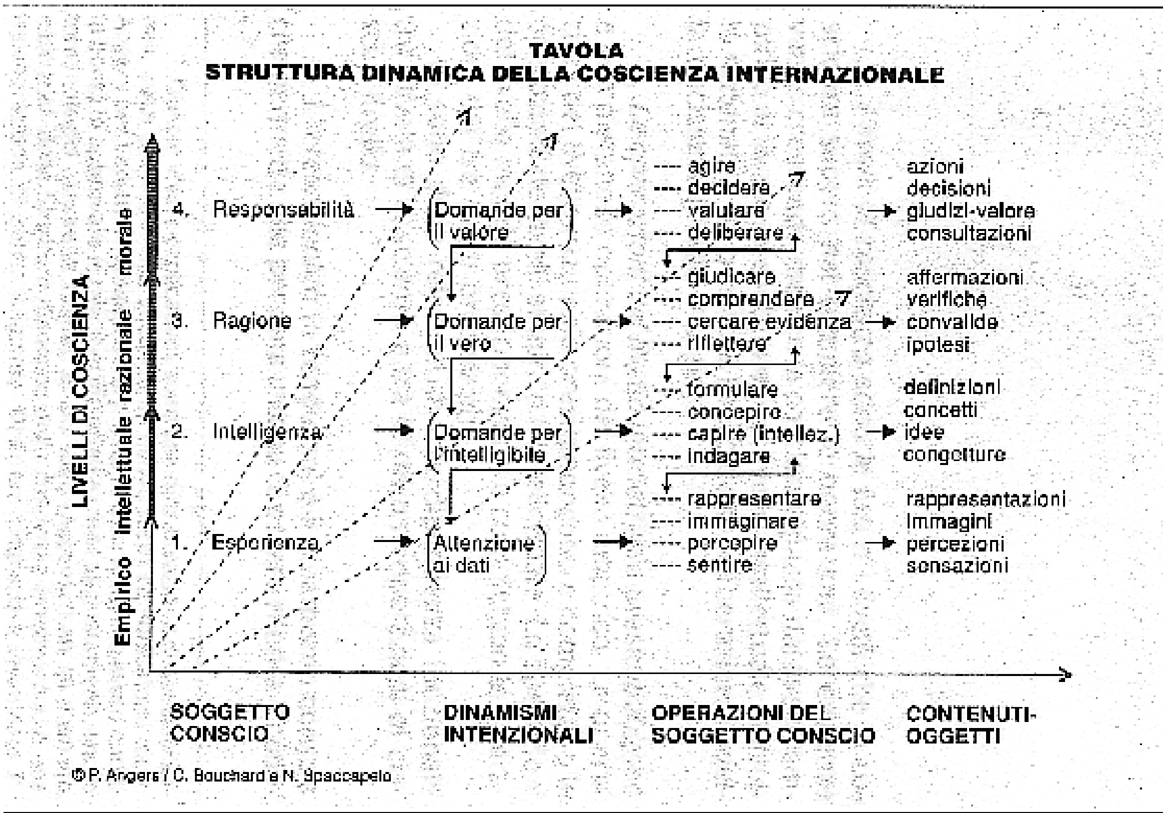
- esperire nella vita;
- raccogliere i dati attraverso i sensi;
- inviarli nel cuore attraverso vie organizzate e sgombere da altro;
- valutare, elaborare, discernere nel cuore;
- agire con le braccia per modellare l’esperienza;

Le pre-condizioni dell’apprendimento, in questo senso, sono:

- la capacità di esperire la vita (cioè di accorgersi della vita);
- l’organizzazione e la pulizia delle vie di acceso al cuore;
- l’efficienza del cuore;
- la possibilità dell’agire;

Un buon metodo di studio/apprendimento è più uno stile di vita che non un insieme di consigli utili ad affrontare gli esami. Si tratta di riscoprire e vivere la propria vocazione intellettuale e l'ineluttabile necessità dell'apprendere sempre e da ogni cosa.

Una più sistematica esposizione del processo della conoscenza è quella elaborata da Angers e Buochard e rappresentata nel seguente schema.



Modello delle operazioni della conoscenza

(R. Spaccapelo (a cura di), P. Angers, C. Bouchard, L'auto-appropriazione, EDB, Bologna 1994).

Ai successivi livelli di coscienza (empirico, intellettuale, razionale e morale) corrispondono diverse potenze del soggetto conscio (esperienza, intelligenza, ragione, responsabilità) con rispettivi dinamismi intenzionali, operazioni e oggetti. Tutto in un progresso che coinvolge i diversi stadi di coscienza del soggetto mosso dalla forza delle domande che egli stesso, l'ambiente, l'altro, gli pongono (come, perché, fino a quando, quali relazioni, cosa fare, come fare?…). Anche qui il processo collega due estremi - le percezioni/sensazioni e le azioni - e affetta i diversi ambiti esistenziali, dalla esperienza alla responsabilità. In estrema intesi: non v'è apprendimento completo se non vi è azione. Apprendere non è capire la realtà, ma agire trasformandola secondo ciò che si è compreso per portala ad un livello maggiore di umanizzazione[5].

2.3 Il processo dell'apprendimento. Un approccio neurologico

La precedente prospettiva antropologico-esistenziale -più votata al *perché* che non al *come*- non può farci sottendere un riferimento, seppur rapido, al funzionamento della "conoscenza-apprendimento". E per fare ciò non possiamo non accennare al funzionamento del cervello.

2.3.1 Il cervello

Il cervello è l'organo più difficile da studiare. Ce lo portiamo in giro chiuso in questa scatola sulle spalle che è molto scomoda per fare ricerche. (E. Fuller Torrey)
È anche vero che impieghiamo più tempo a scoprire come funziona il nostro cellulare che non a interrogarci sul funzionamento del nostro cervello.
Il cervello "moderno" rappresenta il prodotto della stratificazione di tre strutture anatomiche, assimilabili a tre tipi di cervello apparsi e sommatisi nel corso della trasformazione evolutiva dei vertebrati:

a) il cervello più antico, specializzato nel controllo delle funzioni automatiche (come la vigilanza, la respirazione e la circolazione) che comprende le parti del midollo che si allungano e che terminano nel tronco dell'encefalo (bulbo, ponte e mesencefalo);
b) i centri che si sono sovrapposti a queste strutture -come il talamo, l'amigdala e i nuclei del putamen - e che fanno parte del cosiddetto cervello emozionale (Circuito di Papez e lobo limbico). Dalle loro funzioni dipende il comportamento emotivo e motivazionale ed i meccanismi del rinforzo psicologico (soprattutto quelli del piacere e del dolore) che sono alla base dei processi di apprendimento;
c) la corteccia cerebrale è la parte evolutivamente più recente. Si presenta come lo strato corrugato di cellule nervose che ricopre i centri del cervello più antichi. La corteccia cerebrale integra e coordina le funzioni di tutte le altre strutture nervose ed è la sede delle funzioni psichiche superiori, come l'intelligenza razionale e il linguaggio.

---

[5] Da S. Casucci, *Apprendere, Comunicare, lavorare in gruppo*, Morlacchi, Perugia 2006. Pag 3. Questo testo è una ricchissima e completa sintesi di diversi studi sull'apprendimento. Molte fonti, come Mazzeo, sono comuni al testo da me presentato.

Le aree della corteccia cerebrale sono state studiate durante l’ultimo secolo con l’elaborazione di diverse teorie tra le quali quella frenologica e la suddivisione citoarchitettonica di Broadmann.

Broadmann scoprì che, pur essendo la corteccia cerebrale macroscopicamente monotona ed omogena sia per spessore che per numero di strati, lo spessore relativo degli strati cambiava da regione a regione. Le aree sensitive primarie, ad esempio, **hanno il quarto strato più sviluppato, quelle motorie hanno il quinto strato più spesso.** Suddivise e classificò, quindi, la superficie corticale in aree omogenee per l'aspetto citologico degli strati, numerandole, cominciando con 1 ed incrementando la numerazione ogni volta che incontrava una configurazione diversa. Broadmann non **prese in considerazione la corteccia dentro i solchi, convinto che il passaggio da** un'area all'altra avvenisse sul fondo del solco.

2.3.2 Gli emisferi cerebrali

Il cervello è composto da due emisferi connessi tra loro dal corpo calloso, costituito da un fascio di fibre nervose che si intrecciano da e verso la corteccia.
La parte sinistra del cervello controlla i muscoli della parte destra del corpo mentre la parte destra del cervello controlla i muscoli della parte sinistra del corpo.
Ancora, l’emisfero destro e sinistro sono deputati a diverse tipologie di attività: il destro al ritmo, alla consapevolezza, alla Gestalt (immagine intera), all’immaginazione, al “sogno ad occhi aperti”, al colore, alla dimensione; l’emisfero sinistro è deputato alle parole, alla logica, ai numeri, alla sequenzialità, alla linearità, all’analisi, all’elencazione in liste. Più semplicemente: l’emisfero sinistro è quello dei processi logico-razionali; quello destro è per le attività creative, intuitive.

2.3.3 Come funziona il cervello

Il cervello svolge queste tre operazioni fondamentali: raccoglie, generalizza e cancella. Il neurone è l'unità di base del sistema nervoso: una cellula altamente differenziata e specializzata per la raccolta, l'integrazione e la conduzione di impulsi nervosi. Ogni neurone rappresenta un'unità anatomica e funzionale distinta. Un cervello umano contiene circa 28 miliardi di neuroni e oltre 100 miliardi di cellule nervose. Ognuna di esse entra mediamente in contatto con 50.000 o 100.000 altri neuroni. Il numero totale dei contatti nervosi che si stabiliscono in un cervello umano supera quello stimato di tutti i corpi celesti presenti nell'universo. Il cervello elabora, così, fino trenta miliardi di informazioni al secondo e vanta l’equivalente di novemilaseicento chilometri di fili e cavi. Ciascuno di questi neuroni è un minuscolo computer autosufficiente, capace di elaborare un milione di informazioni. I neuroni agiscono indipendentemente, ma comunicano tra loro mediante uno straordinario reticolo di centosessantamila chilometri di fibre nervose. In dieci volte meno che un battito di ciglia (ventimillisecondi) una reazione di un neurone può trasmettersi a centomila altri neuroni che possono agire tutti allo stesso istante. L'interazione tra neuroni avviene attraverso lo spazio "vuoto" infinitesimale che esiste tra queste cellule: la sinapsi.

2.3.4 La sinapsi

La sinapsi è una struttura altamente specializzata che consente la comunicazione tra le cellule del tessuto nervoso. Attraverso la trasmissione sinaptica, l'impulso nervoso può viaggiare da un neurone all'altro o da un neurone ad una fibra neuromuscolare (placca neuromuscolare).
In relazione agli elementi neuronali che entrano in contatto nella sinapsi, si possono distinguere sinapsi asso-dentritiche -in cui l'assone di un neurone contatta l'albero dendritico di un altro neurone-; sinapsi asso-assoniche -in cui due assoni sono a contatto-; e sinapsi asso-somatiche -che si stabiliscono tra l'assone di un neurone ed il corpo cellulare (soma) di un secondo neurone-.
Dal punto di vista funzionale, in natura, esistono due tipi di sinapsi: le sinapsi elettriche e le sinapsi chimiche. Nei vertebrati superiori prevalgono le sinapsi di tipo chimico.

2.3.5 Alcune operazioni "semplici"

Olfatto
Persino questo compito apparentemente semplice, che sembra una sciocchezza in paragone con il dimostrare un teorema di geometria o con l'apprezzare un quartetto d'archi di Beethoven, coinvolge circa 6 milioni di neuroni, ciascuno dei quali può ricevere 10.000 stimoli dai suoi simili.

Linguaggio
Grazie a regioni cerebrali specializzate -dette aree del linguaggio- gli esseri umani sono dotati di eccezionali capacità di comunicazione. A quanto pare quello che vogliamo dire viene organizzato dalla regione dell'emisfero cerebrale sinistro nota come area di Wernicke. Questa è in comunicazione con l'area di Broca (area di Broadmann 44 e 45) che applica le regole grammaticali.
Gli impulsi arrivano poi ad alcune vicine aree motorie che controllano i muscoli facciali e aiutano a formare dovutamente le parole. Queste aree, inoltre, sono connesse, attraverso i corpi genicolati, con il sistema visivo del cervello così che

possiamo leggere; con il sistema uditivo così che possiamo udire, capire quello che gli altri ci dicono e agire di conseguenza; e, fatto non meno importante, con le banche dati della memoria, così che possiamo immagazzinare pensieri significativi.

2.3.6 Come si impara? Le neuroassociazioni

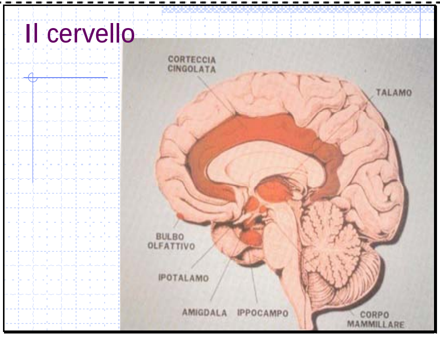
"Quello che davvero distingue gli esseri umani dagli altri animali è la capacità di imparare un'incredibile varietà di comportamenti, fatti e regole, non solo in relazione agli oggetti fisici dell'ambiente in cui si trovano, ma soprattutto in relazione alle altre persone e a ciò che le spinge a comportarsi in un determinato modo". (Journey to the Center of the Brain).

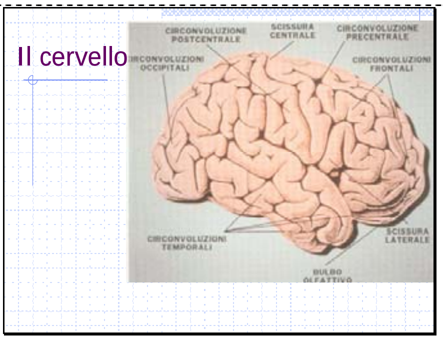
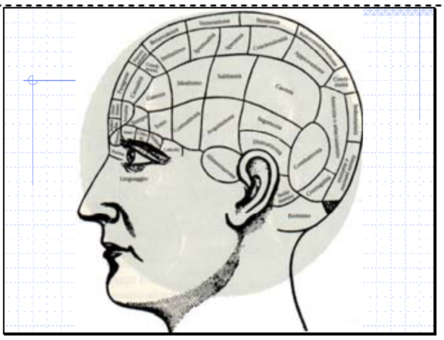
Le neuroassociazioni sono le associazioni dei neuroni, il "modo" di funzionamento del cervello, ma anche il "modo" che determina le emozioni e quindi gli stadi d'animo. Scienze come la Programmazione Neuro Linguistica considerano l'assunto che il linguaggio è generato dal cervello, ma anche che lo stesso linguaggio trasforma il cervello (creando delle neuro associazioni). Così, anche le emozioni sono generate da neuroassociazioni ma, allo stesso tempo, generano neuroassociazioni. Vi è un rapporto biunivoco tra linguaggio/emozione e neuroassociazione. Parlare in termini positivi, alimentare emozioni belle, vivere buone abitudini, modellare il proprio stato d'animo, determinare lo stile decisionale, favoriscono delle buone neuroassociazioni permettendo un maggior grado di positività cerebrale e restituendo un positivo stato d'animo. In termini più semplici: l'uso di un linguaggio positivizzante e magnificante restituisce la percezione di una vita positiva e magnifica.

Le neuroassociazioni sono, ovviamente, anche il "modo" dell'apprendimento. Questo è tanto più efficace quanto più i due emisferi entrano in associazione tra loro, tanto più quanto più la parte destra e la parte sinistra del cervello si collegano attraverso questi "canali" neuronali. La stessa associazione di colore, ironia, esagerazione, dolore, piacere, ecc. rendono un dato fatto, o un dato concetto più impresso nella memoria, meglio appreso.

Ma il corretto utilizzo del cervello è fondamentale anche perché lo stile di vita di colui che apprende sia sano e positivo. Così, una corretta gestione delle emozioni - come una corretta e positiva valutazione di sé- nascono da una certa igiene mentale.

In sintesi: se è vero che è tutta la persona ad apprendere attraverso il mirato utilizzo dei cinque/sei sensi, va anche detto che è principalmente il cervello l'organo dell'apprendimento ed un corretto e disciplinato stile di vita permettono a questo organo di funzionare meglio. Un buon stile di apprendimento parte da una buona igiene cerebrale che si ottiene con una vita equilibrata, con un pensiero positivo, con una buona alimentazione, con una serena vita emotiva e relazionale, con una corretta modalità di riposo/sonno, non usando alcol e droghe, con la reiterazione di buone abitudini, con una gestione attenta del tempo, ecc. Tutti argomenti da non sottovalutare per uno stile di apprendimento efficace che diventa uno stile di vita ben vissuta.

<table>
<tr>
<td>Figura 1</td>
<td>
</td>
<td>Localizzazione cerebrale dei centri delle emozioni.

Le aree e i nuclei evidenziati sono le strutture fondamentali del cosiddetto cervello emozionale, che comprende anche importanti fibre nervose di comunicazione. Nel cervello emozionale sono presenti le strutture più interessante all'azione delle droghe e in esso è compreso il sistema di ricompensa cerebrale, l'apparato cerebrale da cui dipendono i fenomeni di dipendenza alle droghe.</td>
</tr>
<tr>
<td>Figura 2</td>
<td>
</td>
<td>Questa illustrazione permette di osservare la superficie corrugata che racchiude il cervello: le circonvoluzioni (o giri) cerebrali, dove si realizzano le funzioni psichiche superiori e si controllano tutte le funzioni cerebrali svolte dai centri inferiori.</td>
</tr>
<tr>
<td>Figura 3</td>
<td>
Teoria frenologica (XIX secolo)</td>
<td>Teoria frenologica: Localizzazione delle funzioni cerebrali sulla superficie del cervello umano.
Le singole funzioni psichiche dipendono da particolari zone o "regioni" del cervello. Così, dalla valutazione di particolarità morfologiche del cranio di una persona (linee, depressioni, bozze) si potrebbe giungere alla determinazione delle qualità psichiche dell'individuo e della sua personalità.</td>
</tr>
</table>

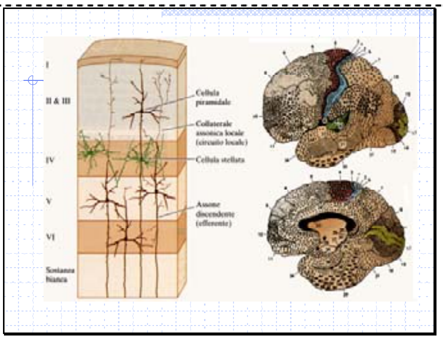
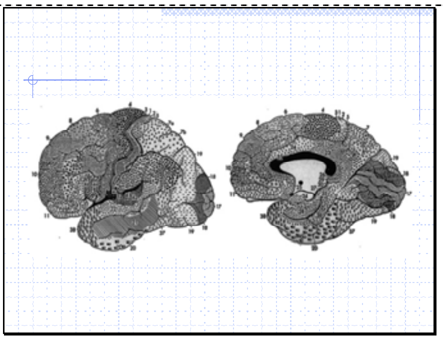
		Ad esempio, le caratteristiche del carattere si sviluppano in aree specifiche del cervello, che si espandono man mano che le stesse si sviluppano. Espansione di zone localizzate della corteccia, comparsa di solchi e rilievi sulla superficie del cranio determinerebbero il carattere delle persone. "Fondamenti delle Neuroscienze e del Comportamento". Casa Editrice Ambrosiana,1999.
Figura 4		Suddivisione citoarchitettonica di Brodmann. Neuroni assiali e piramidali
Figura 5		Diverse aree di Brodmann

Figura 6

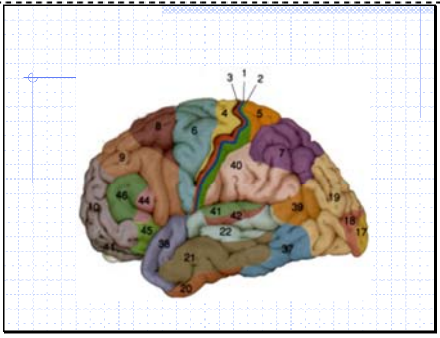
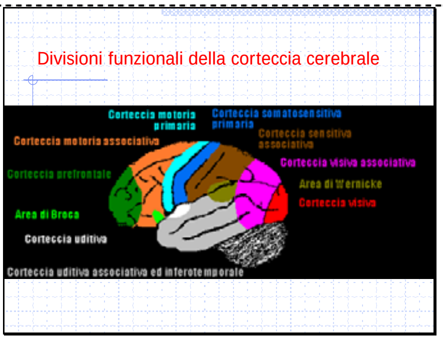


Figura 7



Divisioni funzionali della corteccia cerebrale

Figura 8

Regione corticale	Funzioni
Cor. Prefrontale	Risoluzione di problemi, emozioni
Cort motoria associativa	Coordinazione di movimenti complessi
Cort motoria primaria	Avvio del movimento volontario
Cort. somatosensitiva primaria	Ric delle informazioni sensitive provenienti dal corpo
Cort sensitiva associativa	Elaborazione polimodale delle informazioni sensitive
Cort visiva associativa	Elaborazione delle informazioni visive
Cort visiva	Riconoscimento di stimoli visivi semplici
Area di Wernicke	Comprensione del linguaggio
Cort uditiva associativa	Elaborazione delle informazioni visive
Cort uditiva	Riconoscimento delle qualità dei suoni (volume, tono)
Cort inferotemporale	Alcuni aspetti della memoria
Area di Broca	Produzione ed articolazione del linguaggio

Funzioni delle diverse regioni corticali

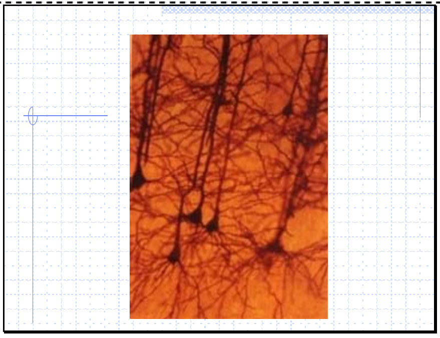
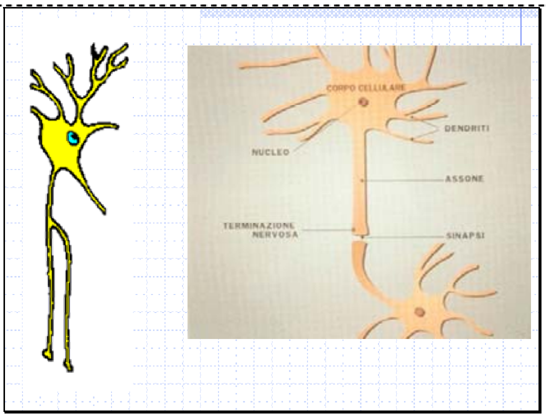
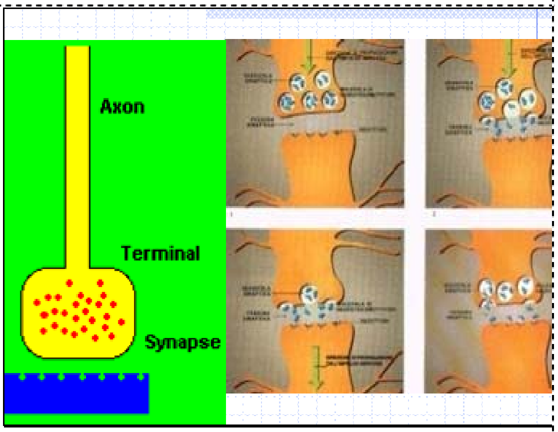
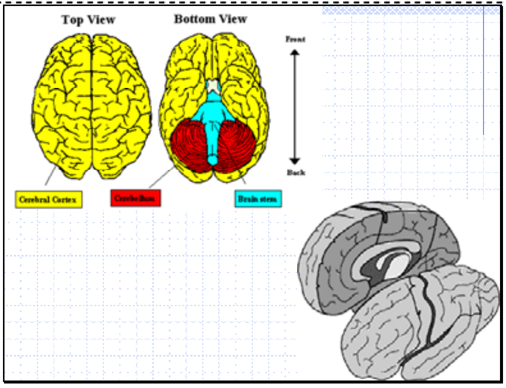
Figura 9		Neuroni piramidali della corteccia cerebrale I neuroni sono qui messi in risalto con il metodo di colorazione messo a punto da Camillo Golgi
Figura 10		Neurone Il corpo cellulare (SOMA) sintetizza le sostanze chimiche necessarie alla crescita del Neurone e alla trasmissione nervosa. I dendriti convogliano verso il corpo cellulare del neurone i segnali nervosi provenienti dalle altre cellule nervose con cui il neurone è un contatto. L'assone trasporta i segnali nervosi dal neurone alle altre cellule nervose con cui questo comunica al livello della sinapsi.
Figura 11		Schema della neurotrasmissione Le vescicole sinaptiche del neurone situato sul versante superiore della fessura sinaptica contengono le molecole per la neurotrasmissione elaborate nel corpo cellulare. Sul neurone del versante opposto invece sono evidenziati schematicamente i recettori, le strutture specializzate per legarsi chimicamente con il neurotrasmettitore.

Figura 12		Il cervello è diviso in due emisferi dal corpo calloso, costituito da un fascio di fibre nervose. Questa lamina di sostanza bianca unisce i due emisferi cerebrali alla base della scissura interemisferica; le sue propaggini o radiazioni callose si affondano nella sostanza cerebrale. È costituito da fibre di associazione che collegano fra loro zone corrispondenti della corteccia dei due emisferi.

3 LA GESTIONE DEL TEMPO

Trova il tempo di lavorare, è il prezzo del successo
Trova il tempo per riflettere, è la fonte della forza
Trova il tempo di giocare, è il segreto della giovinezza
Trova il tempo di leggere, è la base del sapere
Trova il tempo di essere gentile, è la strada della felicità
Trova il tempo di sognare, è il sentiero che porta alle stelle
Trova il tempo di amare, è la vera gioia di vivere
Trova il tempo di essere contento, è la musica dell'anima

(Antico testo irlandese)

Di fatto, spesso, più che trovare il tempo, lo perdiamo. Una vita piena è una vita dove tutte le attività personali trovano spazio. Scorrendo velocemente il testo irlandese: lavorare; riflettere; giocare; leggere; essere gentile; sognare; amare; essere contento. Un tempo vissuto male è un tempo non vissuto, è un tempo troppo sbilanciato solo su *una* delle attività elencate o solo su *una* dimensione della persona.
Per la disciplina dello studio, come in un vita ben vissuta, è di fondamentale importanza la gestione del tempo.

3.1 Il tempo, un tentativo di definizione

È difficile definire cosa sia il tempo. Varvelli[6], nel suo *Gestire il tempo*, distingue quattro generi di definizione:

- il tempo - come grandezza misurabile/oggettiva - è quello dell'orologio, i secondi, i minuti, ecc;
- il tempo - come principio di uguaglianza- è quello che ci fa tutti uguali, perché un'ora è per tutti 60 minuti;
- il tempo - come risorsa irripetibile/ soggettiva- è il tempo che dipende dall'uso e dal valore personale che ciascuno attribuisce;
- il tempo come fattore critico di successo: anche dalla gestione del tempo dipende il successo personale.

Ci sono dimensioni più esperienziali del tempo: è ciò che passa, è ciò che puoi impiegare, è ciò che puoi riempire, è ciò che ti può essere rubato. È la porzione di vita che, vissuta con consapevolezza e pienezza, ti può rendere migliore. Così, vi sono diversi tipi di tempo, tanti quanti sono i modi di viverlo. Vi è il tempo vegetale,

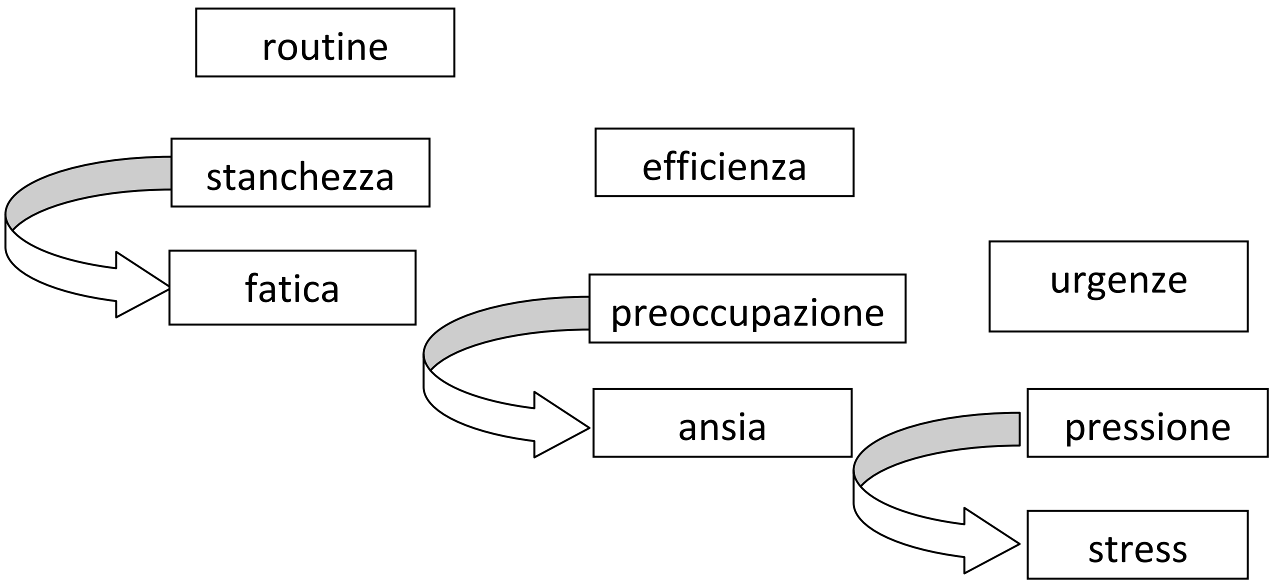
[6] L. Varvelli, *Gestire il tempo. Come migliorare l'utilizzo del proprio tempo e diventare padroni della propria vita*. Il Sole 24 0re, 2001.

quello in cui cresci (invecchi - muori) in ogni caso, svuotato di consapevolezza e criticità; vi è il tempo bruciato, quello sprecato in cose inutili, disorganiche ed improduttive; vi è il tempo finalizzato, impiegato per il raggiungimento di obiettivi; vi è il tempo con-diviso, quello vissuto-insieme, usato come dimensione di con-fronto, reciprocità, responsabilità, amore. È certo che una corretta gestione del tempo restituisce un senso di pienezza e serenità e dà tanto altro tempo da vivere con uguale passione.

3.2 Tempo e stati d'animo

Una delle esperienze frustranti della vita è quella di non vivere, cioè di sprecare del tempo.

Un tempo vissuto male genera stati d'animo negativi come (in ordine di crescente influenza): la *stanchezza* generata dalla routine che genera fatica; la p*reoccupazione* generata da esigenze di maggior efficienza genera ansia; la *pressione* generata da urgenze che genera stress.



Per interrompere questa escalation di ingestibili stati d'animo (fatica, ansia, stress) che comportano una maggiore difficoltà di gestione del tempo e una minore godibilità della vita, si può intervenire a diversi livelli: evitare stanchezza, gestire le preoccupazioni; non cedere alla pressioni, ma anche evitare di scadere nella routine; pianificare standard di efficienza realizzabili; non ridursi all'urgenza programmando il tempo secondo un principio di importanza e un buon scadenzario.

3.3 La gestione del tempo

Sempre secondo Varvelli, gli obiettivi di una corretta gestione del tempo sono quatto:

- la conoscenza dell'uso che se ne fa: spesso non si è consapevoli di come si usa il tempo;
- l'analisi del tempo occupato, perduto, rubato, cioè la capacità di riconoscere il tempo vissuto in ragione dell'occupazione alla quali si attende;
- la scelta della qualità e della quantità dei costi da pagare per una migliore gestione: cosa e come fare per migliorare la produttività del tempo;
- le strade per il miglioramento come, ad esempio, la previsione, la progettazione, la pianificazione, la verifica e soprattutto la valutazione di valore e di "personalizzazione" del tempo, la possibilità di riempire il tempo altrimenti "neutro" con l'originalità e l'unicità della persona che lo vive. Fare del tempo il tuo tempo, il nostro tempo;

Ci sono tanti espedienti per realizzare questi quattro passi: ad esempio, per diventare consapevoli di come si vive il tempo, si potrebbero elencare le proprie attività indicandole sinteticamente con un verbo e un sostantivo e ordinandole per priorità con l'assegnazione del tempo proprio ad ogni singola attività.

3.4 Per non perdere tempo

Vi sono quattro motivi generali che comportano lo sciupio del tempo:

- le rilavorazioni: il tempo perduto a rifare cose fatte male da se stessi o da altri;
- i lavori inutili: tempo sprecato per attività superflue;
- i doppi lavori: tempo sprecato perché altri stanno facendo la stessa cosa;
- i ruba-tempo: il tempo sottratto da altri;

e cinque possono essere dei tentativi di soluzione.

1. *Iniziare la giornata con un piano di azione*. Iniziare la giornata sapendo cosa si chiede, senza cedere ad improvvisazioni ed imponendosi una seri di obiettivi da raggiungere. Altrimenti si è alla mercé degli eventi, succubi del tempo libero o di quello sprecato dagli altri alla ricerca di complici per lo sciupio. Infatti, se nella vita c'è un vuoto di leadership nella gestione del tempo, qualcuno/qualcosa lo occuperà.

Senza una pre-visione della giornata potresti aver lavorato duramente, ma non avere fatto un numero sufficiente di cose giuste, o le cose che andavano fatte. In tal senso gestione efficace del tempo non significa fare le cose sbagliate in meno tempo. Questo ci fa solo perdere tempo più velocemente. Gestione efficace del tempo significa: fare nel tempo giusto le cose giuste, cioè allineate con gli obiettivi da raggiungere.

2. *Vivere la vita con equilibrio*. Dare cittadinanza nel tempo a tutte le dimensioni che ci costituiscono persona. Un tempo di solo lavoro, un tempo di solo ozio, un tempo “spanciato” in una sola dimensione è un tempo che non è colmo di tutta la vita. Non è necessario spendere del tempo ogni giorno in ciascuna dimensione o spendere lo stesso ammontare di tempo per ogni area. Se, però, nel lungo periodo, non dedichiamo tempo sufficiente (sia qualitativamente, sia quantitativamente) a qualunque area, la nostre vita non sarà in equilibrio.
Funziona più o meno come un tavolo: se una gamba è più lunga delle altre, tutto il tavolo diventa instabile.

3. *Lavorare su una scrivania (o un'area di lavoro) ordinata*. Alcuni studi hanno dimostrato che le persone che lavorano in un ambiente disordinato sprecano in media un'ora e mezza al giorno cercando cose o lasciandosi distrarre dalle cose. Sono sette ore e mezza a settimana. E non si tratta di un blocco continuo di tempo perso, ma di un'ora e mezza somma di tanti minuti sprecati per ogni ora: un minuto adesso, uno tra un po’: è come un rubinetto dell'acqua calda che perde. Goccia a goccia: non sembra una grande perdita, ma alla fine della giornata abbiamo buttato litri di acqua calda che paghiamo per usarne diversamente.
Si dice: "Lontano dalla vista, lontano dalla mente". Ma è vero anche il contrario: "Sotto i nostri occhi, nella nostra mente". Tenere in ordine la scrivania (il proprio posto di lavoro, il desktop del computer, gli appunti, i libri, il proprio ambiente di vita ecc.) è riflettere un ordine interno, ma anche crearsi, dall’esterno, un’igiene mentale tanto più funzionale quanto più organizzata e ordinata.

4. *Dormire a sufficienza*. Alcuni studi hanno mostrato come circa il 75% di noi si lamenta regolarmente, giorno dopo giorno, di sentirsi esausto. La maggioranza delle persone dorme per un tempo sufficiente, ma il loro sonno manca di qualità. Altri non dormono abbastanza, privandosi di quella parte di sonno che diventa alimento e riposo indispensabile per la persona. I giorni delle persone dal sonno disordinato sono pieni di stress, squilibrati. Ciò comporta sbalzi umorali e difetti di percezione: ogni cosa viene sentita come più pesante. Si ha l’impressione di lavorare di più (c’è

maggiore necessità di sforzarsi), ma si percepisce una minore efficacia. Nella pianificazione della giornata è fondamentale il tempo del sonno prolungato (quello notturno). Ed in ogni caso, anche per i così detti caratteri lunari (per i quali il rapporto produttività/tempo è maggiore nelle ore notturne), è chiaro che le notti vanno trascorse producendo e non gironzolando, o giocando, o comunque utilizzando copiose quantità di energie in attività improduttive solo perché si pensa che sono ore sottratte al sonno. Il sonno è un'attività produttiva, una necessità che rende ogni altra azione consapevole più ricca di umanità.

5. *Prendere una pausa per il pranzo*. Molte persone non si prendono una pausa per il pranzo: lavorano nella speranza che questo gli dia più tempo per produrre risultati. Alcuni studi hanno dimostrato che potrebbe funzionare meglio il contrario. Dopo aver svolto il nostro lavoro per alcune ore, cominciamo ad essere meno efficaci. Certamente potremmo lavorare all'ora di pranzo ed essere produttivi. Ma non è questo il problema.
Il problema è "quanto più produttivi" potremmo essere? Una pausa pranzo, anche soltanto di quindici minuti, ci dà la possibilità di ricaricare le nostre batterie per essere più efficaci nell'affrontare e gestire tutte le sfide che ci proporrà il pomeriggio. Più in generale, una buona gestione del tempo esige anche la capacità di "staccare" al momento opportuno per opportune attività. Non è vero che più si studia (in termini di tempo) e meglio si assimila. Nella vita dello studente (la vita di una persona ancora in formazione), lo studio non può essere l'unica attività.

3.5 Il come della gestione del tempo

Come i quattro errori possono essere evitati e i cinque consigli realizzati? Sempre Varvelli consiglia tre verbi per il *come* della gestione del tempo: *prevedere; pianificare; programmare*. A questi tre verbi va aggiunto, previamente, la buona capacità di definire gli obiettivi.

La definizione degli obiettivi
Spesso gli obbiettivi vengono confusi con le visioni, o con le intenzioni, o con più generali ipotesi che afferiscono maggiormente all'ambito della teoria che non a quello della prassi. L'obiettivo è qualcosa che pro-poni, qualcosa che, cioè, metti prima dell'agire. Ma è anche qualcosa che tieni costantemente presente per una verifica continua dell'operato ed è anche ciò che, una volta raggiunto, ti lasci alle spalle per un ulteriore obiettivo.

Le caratteristiche fondamentali di un obiettivo sono cinque, memorizzabili con l'acrostico **SMART**.
Un obiettivo, così, deve essere: **S**intetico, estremamente chiaro per chi lo propone e quindi facilmente comunicabile. Non può essere articolato con *ma*, *però*, *se*, verbi al condizionale, ecc.
Deve essere **M**isurabile: deve contenere nel suo enunciato degli indici di immediata verificabilità (indici di quantità, di qualità; elementi di oggettività, ecc.). Ancora un obiettivo deve essere **A**ffascinante, deve spingere all'azione con passione, deve comportare il raggiungimento di qualcosa di buono, appetibile, giusto, che motivi la fatica del percorso e che dia senso alle necessarie rinunce.
L'obiettivo deve essere **R**aggiungibile: commisurato, cioè, alle proprie risorse, capacità o al limite -per gli obiettivi più coraggiosi- deve superare di poco le capacità che la persona ha fino ad allora sperimentato. Deve vincere i condizionamenti limitanti e commisurarsi con la realistica possibilità di essere ragionevolmente, seppur con fatica e determinazione, raggiunto.
Infine, un obiettivo deve essere **T**emporalizzabile: deve contenere dei riferimenti, degli indici temporali che ne permettano la verifica sia in itinere che finale.
Ecco alcuni esempi di *non obiettivo*: mi voglio laureare; voglio guadagnare tanti soldi, voglio scalare l'Everest. Si tratta più di intenzioni, di sogni, di visioni che di obbiettivi.
Un obiettivo potrebbe essere: entro la fine dell'anno accademico (Temporalizzabile) devo dare tutte le materie nel piano di studi (Misurabile in ragione del numero delle materie; Raggiungibile in ragione del piano di studi), per poter andare in vacanza sereno e di modo che mi possa laureare nel giusto tempo (Affascinante).
Questo obiettivo è chiaro, facilmente comunicabile. La pianificazione e la programmazione spingeranno ad una attività di studio quotidiano che sarà costantemente verificabile. E alla fine si potrà fare un'appetibile vacanza. Ma da qui si entra nel come della gestione del tempo, e più in specifico della autorganizzazione.

3.6 L'autorganizzazione

La sana prassi dell'autorganizzazione si può avvalere di tre verbi: *prevedere; pianificare; programmare*.
Prevedere: è saper "vedere prima" la possibilità e la probabilità di un evento, la validità e la necessità di un obiettivo. *Prevedere* nello studio, ad esempio, è ipotizzare la quantità degli esami da sostenere; la quantità e la qualità di studio necessario per il raggiungimento dell'obiettivo esame. Prevedere alcune variabili che possono capitare

(o che è probabile che capitino) nello svolgimento del programma di studio. Prevedere quale appello sia più utile per sostenere l’esame, ecc.
Pianificare: è l’elaborazione di piani, strategie, percorsi per raggiungere gli obiettivi definiti. Nel caso dello studio e dell’obiettivo precedentemente enunciato si tratta di raccogliere i testi di studio delle singole discipline, tutte le informazioni utili per lo studio efficace. Si tratta di pianificare un percorso valutando anche le informazioni di chi ha già battuto quella strada; di conoscere il tracciato entro al quale muoversi, ad esempio di trovare il calendario degli esami, di valutare la necessità di frequentare le lezioni. In sintesi, la pianificazione afferma: *intendo fare così per raggiungere questo obiettivo*.
Programmare è riconoscere, distribuire, temporizzare le attività utili al raggiungimento degli obiettivi. Si tratta, ad esempio, di definire piani di azione annuali, mensili, settimanali, giornalieri che fissando attività e scadenze, sminuzzino l’obiettivo generale in azioni per obiettivi parziali allineati con la previsione iniziale. Ogni giorno è così vissuto come parziale realizzazione del proprio obiettivo/previsione SMART e questo restituisce un positivo senso del tempo e la serenità della consapevolezza che ciò che si è fatto/vissuto è parte della bella storia di realizzazione personale. ”La programmazione sarà realistica e affidabile solo se saranno chiari gli obiettivi da perseguire(previsione) e il percorso per raggiungerli (pianificazione)” (Varvelli, pag 78).

3.7 Strumenti pratici per la gestione del tempo

Si tratta di utilizzare calendari, scadenziari, agende, tabelle, outlook, palmari, ecc. con i quali organizzare e monitorare facilmente e costantemente la nostra gestione del tempo.
Una utile programmazione - lo dicevamo - parte dalla previsione: quanti esami voglio sostenere?
Si passa così alla pianificazione. Intendo: raccogliere più informazioni possibili per realizzare la previsione. Da ciò so che: l’esame è tra quattro mesi, il corso è bene seguirlo, i tutor fanno un ottimo servizio di accompagnamento, il manuale da utilizzare è di 400 pagine, ecc.
Quindi passo alla programmazione: devo frequentare le lezioni, andare a ricevimento, studiare 400 pagine in tre mesi. Tre mesi sono 90 giorni. Ma io di domenica non voglio studiare quindi considero 78 giorni (90-12). I miei colleghi mi hanno detto che è il caso, una volta letta, di ripetere la materia due volte, quindi lascio 18 giorni alla ripetizione, ne rimangono 60. Per leggere 400 pagine in 60 giorni ne devo leggere (400/60) circa 7 al giorno. Una quantità abbastanza modesta. Così farò per ogni

materia che voglio preparare nell’arco del semestre, con la consapevolezza che se non leggo le 7 pagine al giorno non potrò sostenere l’esame… avrò sprecato una giornata.
Tutto ciò lo programmo con un cronogramma settimanale nel quale organizzerò il tempo dello studio personale, delle frequenze a lezione, dei ricevimenti, ma anche le altre mie attività: gruppo, formazione integrale, sport, svago, ecc.
Il cronogramma settimanale ha come base la giornata tipo: il quadro di riferimento quotidiano nel quale indico i grossi blocchi di attività della giornata. È sistemando i grossi blocchi di attività che troverò il tempo per fare ogni cosa. L’esemplificazione che spesso si fa è quella del recipiente da riempire con sassi, sabbia e acqua. Se prima riempio con sabbia non ci sarà spazio per le grosse pietre. Così, se riempio prima con acqua questa verrà fuori quando aggiungerò il resto. Ma se metto prima i massi, poi la sabbia, quindi l’acqua riuscirò a sistemare meglio ogni cosa. In sintesi, nell’elaborazione del cronogramma quotidiano (giornata tipo) le scelte fondamentali sono: a che ora mi alzo; a che ora mi corico; a che ora mangio; quanto tempo devo dedicare quotidianamente alle lezioni; quanto allo studio? Il resto si sistema secondo le cadenze settimanali: inglese due volte a settimana nell’orario che deciderò; così per lo sport; l’integrazione formativa ecc.
È chiaro che vedendo il cronogramma annuale, mensile, settimanale, quotidiano si capisce quali sono gli obiettivi annuali e come si organizzano nel corso dei dodici mesi. Ricorda quanto abbiamo detto in precedenza: devi crescere integralmente, quindi nella tua gestione del tempo devi dare spazio a tutte le dimensioni che ti costituiscono. Devi prevedere obiettivi in ciascuna di queste dimensioni e pianificare attività coerenti, programmando il tempo da dedicare. La mia esperienza nell’accompagnare studenti alla formazione mi dice che tanto tempo è lasciato alla improvvisazione. Oppure si pianificano attività per obiettivi marginali. È più facile incontrare giovani che programmano la palestra, o lo svago, o le vacanze che non giovani che prevedono chi vogliono diventare entro l’anno e come raggiungere questo macrobiettivo. In tutto questo non dimenticare di ragionare in termini di formazione integrale. L’eccellenza non sta nel dare tutte le materie, ma nel diventare eccellente. Per questo: la frequentazione di ambienti culturalmente e intellettualmente stimolanti, di persone in gamba “un po’ più avanti di te”, di maestri e punti di riferimento; la lettura di un buon libro, esperienze prolungate di formazione (campi residenziali, fine settimana formativi, summer school, ecc.); di vita comune, il servizio agli altri… sono tutte attività che ti aiutano a crescere e ad affinare una serie di sensibilità e competenze che il percorso di studio non ti può dare. Questo è apprendimento.

3.8 In sintesi, 16 consigli pratici per la gestione del tempo

1. **Scegli uno scopo.** Se non hai uno scopo, non sai ciò che devi fare. Se hai lo scopo chiaro, pianifichi, arrivi puntuale, fai.
2. **Vinci l'ansia.** L'ansia aumenta tanto più quanto si rimanda, tanto più quanto più ciò che è importante diventa urgente. Non pensare che sei in ansia, agisci.
3. **Abbatti la paura di fare troppe cose insieme.** La complessità della vita e il sano equilibrio di un'umanità matura impongono la multi operatività. Il cervello può fare 5+-2 operazioni. Non lo sottovalutare. E ricorda: se non occupi il cervello il cervello si auto occupa.
4. **Organizzati.** Non lasciare niente al caso e prevedi ciò che è prevedibile, perché, per l'improvvisazione, bastano gli imprevisti. Metti ogni cosa al posto giusto: la tua vita non è il cassetto delle cose che stanno in giro. Conserva l'ordine e l'ordine ti conserverà.
5. **Tieni desta la motivazione e la fiducia.** Tieni presente il perché globale delle singole azioni che fai: il tempo di oggi è per la realizzazione del tuo *sogno.* L'entusiasmo attrae le persone. Se sei motivato sai gestire il tempo e le relazioni. La mattina guardateti allo specchio, autogratificati e fatti una bella risata.
6. **Non interrompere ciò che vai gustando.** Le interruzioni di ciò che stai facendo ti portano a dover cominciare sempre tutto di nuovo. Se devi fare qualcosa niente e nessuno ti può distrarre. In pratica, attento al: telefono; cellulare; computer; musica; TV, perditempo, ecc. Scegli tu il *come,* il *quando,* il *quanto* e *il con chi.*
7. **Impara a dire di no.** C'è qualcuno che fa qualcosa per te perché non riesce a dire di no? Non è la motivazione migliore!

Gestisci il tuo tempo di servizio agli altri e non improvvisarlo a meno delle rarissime urgenze. Farai meglio a te e agli altri. La partita di calcetto, lo shopping e tutte le altre "urgenze" dei perditempo, non possono essere le tue priorità. Stai attendo a chi ti propone di fare qualcosa quando lui ha finito di fare quello che doveva fare e non gli passa dalla mente se anche tu hai fatto ciò che dovevi fare. In sintesi: non permettere l'organizzazione del tuo tempo a partire dal tempo libero degli altri.

8. **Organizza gli appuntamenti.** Perché un medico riceve su appuntamento? Perché non può permettersi di perdere del tempo. Organizza chi, come, quando, per quanto tempo visitare e farti visitare.
9. **Raccogli le informazioni utili e non affogare.** Se sai recepire ed elaborare le informazioni tante cose non le devi sapere sempre per la prima volta… Se non conosci l'orario del treno, solo per una fortuita occasione non dovrai aspettarlo. Se conosci i tempi delle persone sai ottimizzare i tuoi incontri con loro.

10. Educati all'autodisciplina. Fai scelte semplici e concrete (es: programma della giornata) e mantienile. Quali sono le tue regole? Esercitati. Non c'è giudice migliore di te stesso. Non essere troppo severo né troppo magnanimo. E attento ai due eccessi: il legalismo scrupoloso; il lassismo fiacco.

11.Porta sempre a termine i compiti. Se uno studente per un esame non studia le ultime sette pagine perché crede di sapere già tutto, all'esame gli chiederanno sicuramente quelle pagine. E lui dovrà ristudiare tutto da capo: tempo buttato via. Comincia subito e finisci tutto ciò che puoi fare.

12.Alimenta la concentrazione. Se non sei concentrato non riesci a fare niente. La nostra mente è programmata per essere concentrata. Fai esercizio di concentrazioni e poniti nelle condizioni esterne per essere favorito.

13.Non sciuparti in chiacchiere. Bla bla bla… Le chiacchiere non servono a niente. Parla delle cose importanti che vivi, che hai e che sei: della tua famiglia, della tua attività, dei tuoi sogni e progetti, dei tuoi valori e del significato che dai alle cose.

14.Impara ad ascoltare. Parla per imparare. Ascolta per insegnare. Più parli e più non sei nessuno. Puoi imparare da ogni cosa se sai ascoltare.

15. Non soccombere all'indecisioni. In economia vige una legge: si perdono più affari per indecisione che per decisioni errate. Se sei un eterno indeciso non raggiungerai mai niente nella vita. Analizzare sì, ma non spaccare il capello.

16. Abbi pazienza, non voler conoscere tutto e subito. Cosa ti interessa sapere? Attento al tutto di tutto/i…e subito. Fai il tuo compito con una visione globale poi, passo dopo passo, tutto sarà più chiaro.

4 METODO E METODI

4.1 Il metodo, gli elementi generali e alcuni buoni consigli

La parola *metodo* deriva dal greco: *metà hòdos*, *lungo la via*, ma anche *attraverso la via*, *per la via*. Il metodo, così, non è qualcosa che si impara sui libri e una volta per tutte. Esige il camminare attraverso la via, lo sperimentare lungo il percorso. Non è dato una volta per tutte, né è un insieme di regole, di dogmi. Certo, le indicazioni servono a rendere più sicuro il cammino, ma il vero senso sta nel camminare non nel fermarsi ai segnali stradali. Il metodo non si insegna: in qualche misura ci in-segna (ci segna dentro); al metodo si accompagna. Per i metodi ci vogliono, più che i libri, i maestri (ma non troppi maestri). Per il metodo bisogna seguire una traccia, un percorso, più che fermarsi ad una teoria. Ed è attraverso la via che si impara, non solo lungo la via. È lungo la strada che ci si educa a camminare, ed è lo stesso camminare che educa; è nel mare che si impara a nuotare e non si può nuotare se non entrando in acqua. Con ciò non si dice che bisogna mettersi in cammino senza il corredo minimo dell'intelligente viandante, come non bisogna partire in automobile per un lungo viaggio senza fare una buona revisione dell'autoveicolo. Bisogna pre-vedere; pre-munirsi. Ma è lungo il cammino, e attraverso questo, che si impara il met-odo. È lungo il cammino che si affina la traiettoria, il percorso, magari fermandosi ogni tanto ad un area di servizio per fare rifornimento o ad una panoramica area di sosta per contemplare il percorso già fatto e per godere dei paesaggi scoperti, per trovare forza ed energia da uno sguardo rinnovato[7].

4.2 Gli elementi fondamentali di un metodo

Rispetto al metodo vi sono diverse tendenze: c'è chi lo assolutizza (senza metodo non si può apprendere); e c'è chi lo banalizza (i metodi non servono a niente); c'è chi lo

---

[7] Per l'elaborazione di questo capitolo, di fondamentale importanza sono state le opere di Rosario Mazzeo: *Un metodo per studiare.* Il Capitello. Torino. 1990; *Insegnare un metodo di studio*. Il Capitello. Torino. 1997 e soprattutto *L'organizzazione efficace dell'apprendimento. Personalizzazione e metodo di studio*. Erickson, 2005. L'ultimo testo è una miniera di informazioni teoriche e pratiche che sicuramente saranno di grande utilità a quanti, docenti e studenti, vorranno approfondire le poche cose riportare nel nostro testo. Testi che riguardano anche l'elaborazione di tesi, di ricerche, di elaborati scritti sono: per le discipline umanistiche: B. A. Bellerate, J. M. Prellezo, *Il lavoro scientifico in scienze dell'educazione. Guida alla tesi di laurea e al dottorato di ricerca*. La Scuola, 1989. Più generale e scolastico: G. Cravotta, *Metodologia per lo studio e la ricerca scientifica. Per studenti di scuola secondaria superiore e per universitari*. Coop. San Tommaso, 2000.

soggettivizza (non ci sono metodi generali, ciascuno ha il suo); c'è chi lo oggettivizza (i metodi sono un insieme di regole oggettive da applicare).
La nostra prospettiva è quella del mezzo utile al fine. Cioè considerare il metodo come uno strumento, appunto come un mezzo, e non come un fine. Si tratta, sulla scorta della propria e dell'altrui esperienza, di formulare una serie di regole flessibili che permettano un personale ed efficace approccio alla realtà.
In tal senso, l'apprendimento è un'iniziativa personale che dipende dalle motivazione; dalla disponibilità; dalla maturazione delle capacità; dallo stile di vita della persona.
Il metodo si compone di una parte di competenze generali (lo stile di vita, la gestione del tempo, la gestione delle emozioni; l'esercizio della volontà; l'orientamento ai risultati; la capacità di leggere e ritenere; il miglioramento dello stesso metodo attraverso l'esperienza; ecc.) e di altre competenze più specifiche alla disciplina che si va studiando. In tal senso, il metodo deve essere *funzionale*, cioè deve rispettare l'oggetto che si va apprendendo: il metodo di studio per discipline scientifiche non può essere uguale al metodo da applicare nello studio di discipline giuridiche. La matematica va studiata in maniera differente dalla chimica.
Il metodo, ancora, deve essere *efficace*: va verificato in ragione dei risultati che ci si propone, non deve comportare un dispendio di fatiche maggiori rispetto ai benefici ottenuti (principio del minino sforzo), e ancora il rapporto nozioni-competenze apprese/tempo impiegato deve essere il maggiore possibile (principio del minor tempo).
Ancora, il metodo deve essere *affascinante.* Perché ciò si verifichi sono necessarie tre condizioni: che lo studiare sia <u>consapevole</u>, cioè tenga presente le risposte alle domande "perché studio?" e "cosa studio?"; che si abbia la massima certezza del <u>raggiungimento</u> dell'obiettivo; che non comporti <u>più fatica</u> del dovuto.
Il metodo di apprendimento, ancora, <u>non deve assolutizzare lo studio</u>. Come dicevamo, studiare non significa circondarsi solo di libri, non vedere o non pensare altro all'infuori dello studio e degli esami, rimanere ore ed ore attaccati alla scrivania. Il metodo, nella pianificazione delle attività e nella gestione del tempo,come avremo modo di dire, deve aprire a tutta la realtà: al gioco, allo sport, alla natura, agli amici, alla musica, ecc. È buon studente chi sa vivere, cioè chi sa imparare da tutto e da tutti: sa fare delle valide ed interessanti esperienze dentro e fuori l'ambito accademico. Chi sa imparare da ogni cosa. Chi alimenta costantemente il senso della consapevolezza, dello stupore, dell'intelligenza vivendo la propria giornata, interrogando e lasciandosi interrogare dalle cose, esercitando il più possibile l'attenzione in ogni attività, riflettendo sul personale *io in azione*.

Infine, un buon metodo è una vera e propria educazione alla capacità di ascolto e all'attivazione costante del fattore attenzione[8].

4.3 Otto consigli pratici e generali

1. non pretendere di fare mille cose contemporaneamente;
2. prendi le distanze da persone, rumori, cose, situazioni che ti potrebbero distrarre durante lo studio. È bene, perciò, oltre che spegnere la TV e simili, ripulire il tavolo dal materiale (fogli, libri, adesivi, manifesti, riviste, ecc.) che non riguarda l'attività dello studio;
3. prima di cominciare lo studio concentrarti per un momento come fanno gli atleti prima delle gare;
4. impegna tutta la tua attenzione subito e mantienila istante dopo istante;
5. crea in aula un clima di amicizia e di solidarietà tra insegnanti e colleghi;
6. durante lo studio aiutati con "trucchi" del tipo:
    - sottolineare, visualizzare, schematizzare;
    - concedersi dai tre ai dieci minuti di riposo al termine di ogni ora di studio;
    - iniziare lo studio dagli argomenti o dalle materie più difficili e noiose;
    - cercare di anticipare le conclusioni dei fatti o dei ragionamenti che il testo ti sottopone;
7. prepara con una lettura esplorativa o con domande personali l'argomento che sai verrà sviluppato il giorno dopo a lezione;
8. cura l'alimentazione, la respirazione e il sonno.

4.4 Un buon metodo esige delle buone domande

Un buon espediente è quello di interrogare i libri di testo o gli insegnanti e i tutor. Di fatto, studiare un capitolo o gli appunti di una lezione vuol dire fare emergere domande, valutarne la portata, verificarne le risposte. Per interrogare occorre essere capaci di ascoltare,leggere con attenzione, senza pregiudizi, tutto.
Quando interroghi i professori, ricorda: le domande si fanno per capire, non per farsi notare. Non importa come vengano formulate: ciò che conta è che siano il più possibile chiare. Non avere paura né vergogna e tieni presente che: gli insegnanti sono pagati perché tu possa imparare, cioè perché le tue domande abbiano una risposta e diventino sempre più numerose e precise; non esistono domande stupide:

---

[8] Wiseman Richard, "*Dov'è il gorilla? Fattore attenzione: impara a cogliere tutte le opportunità che la vita ti offre*", Sonzogno, 2005.

sono stupidi soltanto gli studenti che si astengono dal fare domande quando non hanno capito; è utile prendere nota delle domande che nascono anche nello studio a casa per poterle rivolgere dopo all'insegnante.
Per imparare a porre domande a sé e agli altri è opportuno prestare attenzione alle interrogazioni. Frequentare le lezioni e le sessioni di esame può essere un'occasione per approfondire l'argomento, per chiarire i punti oscuri e per esercitarsi nella formulazione, nell'annotazione delle domande, anche i quelle che verranno fatte durante la verifica dell'esame.
Per quanto riguarda la gestione del tempo, la previsione, la pianificazione, la progettazione delle attività di studio, dedicheremo a tutto questo un intero capitolo. Anticipiamo qui che l'efficacia dello studio e la serenità dello studente dipendono fortemente dalla capacità di vivere il tempo cioè, più semplicemente, di vivere.

4.5 Le poche regole per il metodo dello studente professionista

Accetta e stima te stesso: nello studio *"ciò che importa è conoscersi ed accettarsi"* (J. Guitton). È necessario che uno veda se stesso per quello che è, che non presuma troppo da sé, ma nemmeno che sottovaluti le proprie forze.
Impara sempre, da tutti e da tutto: occorre essere pronti a fare esperienza di quello che si incontra nelle diverse circostanze della vita. Il vero studente, infatti, è uno che sa imparare da tutto e da tutti cioè sa vivere.
Non sciupare né errori né insuccessi: lo studio, come ogni altra attività umana, richiede impegno. È per questo che, prima o poi, urta contro svariate difficoltà ed un mucchio di errori. In questa situazione è facile cadere nello scoraggiamento ed essere tentati di abbandonare il campo. Occorre non sciupare la risorsa errore: si impara anche da questo e una delle cose più utili da apprendere è "come non reiterare l'errore?", "come trovare soluzioni, più che fermarsi a problemi?".
No al semilavoro, né al semiriposo: "Non tollerare né semilavoro né semiriposo. Datti tutto intero o distenditi in modo completo. Che non ci siano mai in te mescolanze del genere." (J. Guitton). Ma anche: non vivere gli eccessi. Alcol, droghe, e altri generi di cose o attività che generano dipendenza, o alterazioni della coscienza.
Non rimanere solo: chi studia rimanendo sempre solo perché si pensa "staccato" da tutti è uno studente in pericolo. Da qui l'invito a cercare l'appoggio e il contatto con altri (compagni, docenti, amici, tutor, genitori, ecc.)

4.6 I metodi

Presentato in maniera sintetica ciò che riguarda il metodo nei suoi tratti pressoché generali, offriamo una serie di metodi coniati da diverse scuole di pensiero nel corso

degli anni perché ciascun lettore, “prendendo un po’ qua e un po’ là” possa verificarne l’applicabilità e l’efficacia e, partendo da questi, possa magari crearsi un metodo personale.
Anche la letteratura antica è costellata da testi e saggi che riguardano l’apprendimento. Uno dei testi più antichi è il libro di Ptahhotep[9], una sorta di vademecum didattico per una vita serena. Anche la bibbia, tra i suoi libri, ha una serie di testi didattici e sapienziali che hanno per oggetto norme e consigli finalizzati all’apprendimento della sapienza (del gusto di vivere in pienezza)[10].
Nella nostra cultura, i filosofi (Talete, Socrate, Platone, Eraclito e Cicerone, Seneca, ecc.) dei quali abbiamo studiato vita e opere si formano tutti all’interno di una scuola dove vi erano comprovati metodi di studio e di apprendimento che si realizzavano principalmente attraverso il rapporto/sequela tra discepolo e maestro. L’elemento personale qui era il cardine sul quale si poggiava tutto l’impianto educativo[11]. Il discepolo diventa maestro e continuava l’opera del maestro verso altri nuovi discepoli, magari fondando un’altra scuola.

4.7 Ugo di San Vittore, San Tommaso, San Bernardino da Siena

Correndo rapidamente lungo i secoli, tra i doni più grandi del presunto buio medioevo, vi sono, con il monachesimo, le scuole istituite da Carlo Magno. E le Università - nate da ambienti e strutture religiose -, vere e proprie forme di istituzionalizzazione del sapere e della didattica.
È in questi ambienti che troviamo le prime metodologie dello studio “moderne”. Ad esempio il Didascalion, scritto da Ugo di San Vittore a Parigi nel 1128. Un metodo per apprendere leggendo. Secondo questo, tre sono le cose necessarie a coloro che si applicano allo studio: la natura (capacità di ingegno e memoria); l’esercizio (la costanza dell’impegno); la disciplina.
È sull’ultima che Ugo si sofferma in maniera puntuale: la disciplina. Questa, come coltivazione delle disposizione migliori per imparare, richiede: spirito umile; impegno nella ricerca; indagine silenziosa; povertà; terra straniera. Le regole del leggere, per Ugo, sono così anche le regole per vivere in maniera armonica. Tra queste regole/atteggiamenti, fondamentale è l’umiltà: come condizione preliminare alla disciplina/fiducia verso il maestro e all’ascolto scevro da pregiudizi.

---
[9] C. Jacq, *L’insegnamento del saggio egizio Ptahhotep. Il libro più antico del mondo*, Milano, 1998.
[10] A. Lemaire, *Les écoles et la formation de la Bible dans l’ancien Israel*. OBO 39. Göttingen 1981.
[11] “Dobbiamo applicarci allo studio e avere familiarità coi maestri di saggezza per imparare i frutti delle loro ricerche e ricercare le verità non ancora scoperte. Così, sottraendo l’animo alla più misera schiavitù, si rivendica la propria libertà” (Seneca, *Lettere morali a Lucilio*, 104,16).

> È proprio l'umiltà la condizione dell'apprendere e del conoscere. I suoi connotati sono: l'atteggiamento positivo, la disponibilità ad imparare sempre, da chiunque, in qualsiasi campo del sapere, la prontezza a riconoscere e gestire le proprie difficoltà di comprensione. È proprio essa principio di ogni umano apprendimento, anche quello favorito dalla lettura diretta e personale. (Didascalicon III,13)

Un altro testo di fondamentale importanza, che riportiamo integralmente in appendice, è la lettera di San Tommaso d'Aquino ad uno studente (*De modo studenti*). Si tratta di una sorta di breve regola per una vita ordinata che ha per quadro di fondo un'istanza culturale, esistenziale, etica, e per la quale la dimensione affettiva è profondamente collegata con quella intellettiva.
È nel 1220 che nascono le Università (nel 1180 Université de Notre-Dame e nel 1257 l'Université de la Sorbonne) con la finalità del "*vivere socialiter et collegialiter et moraliter et scholariter*". Si tratta di comunità eterogenee che, come si evince dai documenti fondativi, hanno un triplice scopo: combattere l'ignoranza; porre parole e opere alla luce della verità; essere utili sia alla comunità che all'individuo impegnato a raggiungere la sua felicità[12]. Il rapporto con il docente consisteva in un rispetto dei ruoli, pur nell'appartenenza alla stessa "*comitiva*".
Tra i tanti maestri dello studio ne riportiamo uno, santo frate francescano: Bernardino da Siena (1380-1440). Questi suggerisce sette regole per imparare con metodo:

1. *Stimazione*: s'impara ciò che si stima e si stima ciò per cui si prova diletto; ciò che è giusto, ciò che è utile. Ciò che ha valore, come lo studio che è "cosa onesta" sia a livello personale che sociale;
2. *Separazione*: la capacità di separarsi da tante cose, di saper rinunciare, di allontanarsi anche da compagnie moleste, da tutto ciò che non permette un uso efficace del tempo;
3. *Quietazione*: mettere a tacere ansie, preoccupazioni, rumori esterni ed interni, la fretta, il cattivo umore, le passioni disordinate, ecc;
4. *Ordinazione*: applicare una scala di priorità, avere metodo, organizzare il tempo,fare le cose con gradualità, avere e seguire dei criteri;
5. *Continovazione*: si deve avere costanza, continuità e tenacia. Cominciare e finire un argomento, un problema, non lasciare in sospeso le cose; avere sistematicità nella frequentazione dei libri e dei maestri, acquisire familiarità con gli autori e con i docenti;
6. *Dilettazione*: bisogna sapersi appassionare a ciò che si fa e si apprende, trovare interesse e piacere, gustare lo studio, ruminarlo costantemente per meglio digerirlo;

[12] R. Mazzeo, *L'organizzazione*, 139.

7. *Discrezione*: consiste nella capacità di scegliere, di discernere il proprio metodo perché sia il più “buono”, anche sotto il profilo etico;

Sarebbe un po’ lungo commentare tutti questi consigli, ma siamo sicuri che già il solo elencarli possa aiutare tanti a rifletterci ed applicarli verificandone la validità.

4.8 I metodi di studio “di ultima generazione”

Si tratta di metodi proposti e verificati da autori o università, per lo più americane. Sono conosciuti con sigle composte dalle iniziali delle diverse attività sequenziali dello stesso metodo.

SQ3R

Survey: pre-leggere, scorrere preliminarmente il testo per individuarne gli argomenti principali e le parti in cui è strutturato.
Question: porre domande che riguardano gli argomenti fondamentali trattati nel testo.
Read: Leggere con attenzione il testo, cercando di dare delle risposte alle domande che ci siamo posti sull'argomento trattato.
Recite: ripetere recitando, cioè modulando con opportuno tono di voce o simulando quanto si dice.
Review: rivedere, ripassare con frequenza la parte studiata, cercando di ricordare i concetti più importanti.

PQ4R

È uguale al precedente. Qui P=Preview corrisponde a S=Survey. Si aggiunge una R tra read e recite: reflect, rifletti. Consiste nel riflettere su ciò che si è letto cercando di comporre degli esempi e di mettere in relazione ciò che si è letto con le proprie precedenti conoscenze.

DRT

Directed Reading and Thinking Activity, si basa su tre operazioni: previsione; lettura; verifica. Si prevede, attraverso un prelettura e mediante l’indice e con le domande che si pongono al testo, una batteria di obiettivi, concetti, risultati che si vogliono raggiungere e, dopo la lettura, si verifica se questi sono stati soddisfatti.

MURDER

Mood: ispirazione.
Understand: comprensione.
Recall: rievocazione.

Digest: assimilazione.
Expland: ampliamento.
Review: ripasso.

REAP
Read: leggere.
Encode: tradurre in parole proprie, secondo un proprio codice.
Annotate: annotare
Ponder: Ponderare

M4TA+ADAS
Un autore italiano Mazzeo, diffusamente utilizzato in questa dispensa, ha coniato un metodo siglato come ***M4TA+ADAS***. Questo metodo M4TA è un motore a quattro tempi per lo studio; ADAS è il carburante. M4TA sta per: Motore; 4A sono i quattro tempi di applicazione: sorprendere; comprendere; riprendere; intraprendere. Il carburante ADAS sono: Attenzione; Domanda; Accoglienza; Stupore (cfr. Mazzeo, *Un metodo per studiare*, 1990).

Operazione	**Descrittori**	**Attività**
I – *Sorprendere*	concentrarsi; interrogare e farsi interrogare accogliere con stupore; usare l'immaginazione.	Lettura esplorativa, ripresa degli appunti della lezione, formulazione di domanda, precisazione degli obiettivi, individuazione delle strategie.
II – *Comprendere*	afferrare con la mente in modo da prendere dentro di sé, stabilire collegamenti.	parafrasi (cercare di capire le parole, tradurre il testo con termini propri); lettura analitica: cogliere le informazioni principali, individuare i rapporti tra i concetti, schematizzare, riassumere
III- *Riprendere*	ritornare con la mente, fissare nella propria mente, memorizzare	Svolgere gli esercizi, "verbalizzare" gli schemi, ripassare, stare attenti alle interrogazioni

IV – *Intraprendere*	continuare in modo personale, rielaborare, esporre	confrontare, concretizzare i concetti, cogliere il nesso con la realtà delle cose e la propria esperienza, auto interrogarsi, "dire" la lezione studiata

Da Casucci, *Apprendere, Comunicare, lavorare in gruppo*, pag 51.

4.9 Per prendere appunti: il metodo Cornell

Un metodo utile per gli appunti è conosciuto come metodo Cornell. Consiste nel preparare il foglio degli appunti dividendolo in diversi campi, come si riporta in appendice.

Durante la lezione si REGISTRA (record) nella colonna principale della scheda il numero maggiore di fatti e idee. Appena possibile si SCHEMATIZZA (reduce): si ricapitolano i fatti e le idee concisamente (a parole o frasi) nella colonna di sinistra (colonna "indice" o "di suggerimento"). L'indice chiarifica il significato e le relazioni, dimostra la continuità e rafforza la memoria.

Successivamente, si copre l'area degli appunti e, usando solo le specificazioni della colonna indice, si ESPONGONO (recite) i fatti e le idee della lezione meglio che si può, non meccanicamente, ma a parole proprie. Quindi si RIFLETTE (reflect) sviluppando le opinioni personali a partire dagli appunti, mettendoli in relazione con altri contenuti e argomenti. La riflessione aiuterà a collegare e a non dimenticare. Si passa al RIPASSO (review) spendendo 10 minuti, periodicamente, per rivedere velocemente gli appunti e così si ricorderà della maggior parte di quello che si è imparato. Infine, si RIASSUME (recapitulate) scrivendo il riassunto nello spazio sotto la linea orizzontale, in fondo al foglio. Un riassunto per ogni scheda e, alla fine, il riassunto schematico dell'intera lezione

4.10 In conclusione: i metodi e il mio metodo

Tutti questi metodi offrono spunti, suggerimenti, suggestioni, occasioni di confronto perché il nostro apprendere sia arricchito e facilitato dalla esperienza di altri, ma lo ribadiamo: l'apprendimento è un processo personale; e personale è il coniare e l'utilizzare un valido metodo. È lungo la via - nell'applicazione di questo - oltre che per la via - per l'applicazione di questo - che bene verifichiamo l'efficacia. Ma lo ribadiamo: ogni cammino è una via deserta se non percorsa dall'uomo. Per questo è importante conoscer la strada ma è soprattutto importante conoscere dove si vuole arrivare e soprattutto chi e con chi la si percorre. Ogni metodo educa ad una vita che sia in sintonia con la scelta dello studio. Il metodo non sostituisce il necessario stile di vita, come la strada non sostituisce il viandante.

5 ALCUNI CONSIGLI “FISICI”

In questo capitoletto accenniamo ad alcuni consigli pratici per la “fisicità dello studio”.

5.1 L’alimentazione

Un’alimentazione sana esige un equilibrio tra le diverse famiglie nutrizionali: carboidrati (pane, pasta, zuccheri, ecc.); proteine (legumi, pesce, carne, uova, ecc.); vitamine (frutta, ortaggi, ecc.); lipidi (latticini, ecc.).
Nella nostra cultura vi sono tre pasti principali: colazione, pranzo e cena. In generale è preferibile ingerire zuccheri a colazione; proteine, carboidrati, latticini a pranzo; proteine e latticini a cena.
Comunemente una cattiva abitudine alimentare è non fare la prima colazione: ciò comporta una debolezza nella tarda mattinata, una merenda abbondante, poco appetito a pranzo e cena abbondante. Mangiare molto la sera, o mangiare cose di difficile digestione, impone al meccanismo un notevole sforzo che si traduce in difficoltà digestive ed in accumuli di grasso.
Di contro, una corretta alimentazione comincia con una prima colazione nutriente, uno spuntino leggero a metà mattinata, un pranzo equilibrato consumato con appetito, una merenda leggera nel pomeriggio e una cena equilibrata. Cinque pasti più o meno ricchi ben distribuiti nella giornata.

5.2 Il sonno

Rispetto al sonno abbiamo già detto altrove. Comunque bisogna garantire al proprio organismo almeno 7-8 ore di sonno continuato. È il periodo nel quale il nostro corpo si rigenera e il cervello, continuando a lavorare a diversa frequenza rielabora informazioni, si rigenera per essere pronto e sveglio alla fatica della consapevolezza.

5.3 L’uso di sostanze

La corretta alimentazione si può integrare con sostanze naturali o di sintesi in grado di aiutarci in situazioni di emergenze, o pi particolare affaticamento intellettivo. Vi sono integratori vitaminici, fitoterapici e sali minerali. Sostanze dannose, invece, sono gli euforizzanti (oppiacei, alcool, analgesici, tranquillanti, ecc.); psicostimolanti (cocaina, nicotina, anfetamine, ecc…); allucinogeni (LSD; derivati della canapa, kart e altri: Speed, Cheta, Trip; Crack; Popper, ecc.). A diversi livelli e con diversi meccanismi queste sostanze, oltre che generare dipendenza o alterare lo stato di coscienza, hanno effetti devastanti per il sistema neurologico provocando, tra l’altro, l'accelerazione della morte neuronale e la difficoltà di rimpiazzo con altre cellule efficienti. Altri effetti noti sono l'invecchiamento precoce; l'impotenza e/o l'infertilità; il deterioramento generale dell'organismo. Tutte conseguenze che, chiaramente, sconsigliano decisamente l'utilizzo di tale sostanze se si vuole avere una vita sana ed un apprendimento possibile.

5.4 La postura

Ci si deve abituare a posture che favoriscano una buona respirazione ed evitino sforzi all'apparato scheletrico e muscolare. Stando seduti l'ideale sarebbe una sedia senza spalliera, munita di un alto sedile, in maniera tale che il peso del corpo possa gravare più sui glutei che sulle ginocchia. Un utile esercizio può essere il rilassamento muscolare da fare di tanto in tanto nelle interruzioni dello studio, ad esempio alzando lentamente e abbassando rapidamente le braccia; o roteando il collo e le spalle; o facendo stretching, ecc. La postura deve favorire una corretta illuminazione del piano di lavoro. È bene che la luce sia naturale e che illumini omogeneamente il testo evitando che si creino zone di ombra (ad esempio per la mano). Se si studia dinanzi ad uno schermo è importante utilizzare tutte le precauzioni legate alla presenza di radiazioni.

5.5 La respirazione

L'ossigeno è uno degli alimenti del cervello, quindi una buona respirazione aiuta le facoltà cerebrali. È importante, pertanto, studiare in ambienti ben areati, dove non vi sia accumulo di anidride carbonica, residuo della respirazione. Vi sono degli esercizi di respirazione come inspirare profondamente, trattenere il fiato e rimandare via l'anidride carbonica. Vi sono anche esercizi fisici che migliorano la respirazione: l'allargamento del torace, il saltellare, ecc. La postura dello studente, come dicevamo, deve favorire il più possibile una buona respirazione.

CONCLUSIONI

QUEL MERAVIGLIOSO SENSO DI GRATITUDINE

È difficile verificare la validità di uno strumento di questo genere fermandosi alla sola lettura, figuriamoci se ci si ferma alla stesura. L'utilità di questo breve testo sarà vagliata dagli studenti che ne potranno usufruire e che, speriamo, ci possano dare tutti i consigli utili per migliorarlo.

A noi, che abbiamo dedicato un po' delle nostre vacanze estive a questa leggera fatica, non resta che ribadire la convinzione che studiare/apprendere è parte di una vita ordinata e rimandare i più interessati ad approfondire la parte motivazionale ed esistenziale utilizzando due testi per noi di fondamentale importanza: Sertillanges, *L'uomo intellettuale*, e Guitton. *Il lavoro intellettuale. Consigli a coloro che studiano e lavorano*. Ci congediamo affidando agli studenti la lettura del vademecum che riportiamo in appendice e ringraziando quanti, a vario titolo ci hanno sostenuto in questo lavoro. Oltre che agli autori citati, un ringraziamento particolare va al dott. Giuseppe Sciarrone, neurochirurgo che ha riletto il capitolo sul cervello, e ai tanti giovani che con le loro confidenze, i loro scoraggiamenti e il loro entusiasmo mi hanno consentito di pensare a suggerimenti e consigli pratici per venire fuori anche dagli impaludamenti del non senso.

Un grazie anche ai colleghi che hanno insegnato quest'anno e l'anno scorso ai corsi di metodologia dell'apprendimento. Sono dei corsi voluti con decisione in questi percorsi "Azzera", nella convinzione che accogliere gli studenti e offrirsi come accompagnatori nel loro itinerario di crescita sia una delle espressioni più belle di attenzione a questa nuova generazione che si prepara, tra incertezze e scommesse, ad essere il futuro della società. Avremo bravi amministratori, medici, uomini di scienza, di tecnica e di lettere se avremo motivati e bravi studenti: il futuro è nelle loro mani. Avremo bravi studenti se saremo bravi, disponibili, motivanti maestri: il futuro è nelle nostre mani.

Infine, un in bocca al lupo ai nostri studenti: cominciate con coraggio una nuova avventura, organizzatevi bene, organizzate mente, cuore e braccia perché è dalla costanza e dall'applicazione di scelte semplici e quotidiane che si costruiscono le grandi imprese.

APPENDICE

VADEMECUM PER GLI STUDENTI
CONTRO UNO STUDIO TRISTE E BESTIALE
(cioè da bestie)
Essenziali (e insufficienti) consigli per chi comincia, o ricomincia, lo studio universitario

CHIOVARO Valerio

Denken ist Danken
Capire è ringraziare
(Heidegger)

PRESENTAZIONE

Queste poche pagine nascono dall'esperienza decennale (sigh!) di uno studio che mi ha permesso di conoscere, apprezzare, applicare, diversi metodi di lavoro nel campo delle diverse discipline scientifiche e filosofiche e teologiche, oltre che psicologiche ed economiche. Anni che mi hanno permesso di venire a contatto con ambienti accademici di diversi livelli e matrici.

Le offro con la semplicità della incompletezza a quanti si affacciano o riaffacciano sul duro compito dello studio come acquisizione di saggezza, ricerca appassionata dell'umana verità e della Verità per l'uomo, come possibilità di riscatto culturale, che è liberazione dal bisogno nella maturità critica di chi sa ascoltare prima di accettare, capire prima di decidere. Le offro a chi si prepara a diventare sempre più l'uomo che è, provandosi nei sentieri irti della fedeltà ad una scelta, della fatica di un impegno per la realizzazione di un sogno che è progetto.

Le offro con la speranza che nulla venga assolutizzato (studio compreso), ma ogni cosa sia personalizzata e personalizzante.

Le dedico in particolare a quanti non posso accompagnare fisicamente da vicino lungo questo nuovo cammino, perché per loro, queste pagine di esperienza, siano occasione di compagnia e conforto durante il mutismo delle motivazioni iniziali, il limite dei metodi, l'inefficienza degli strumenti. E soprattutto quando la delusione segnerà la verità di una scelta fatta per il raccolto nel futuro più che per la soddisfazione del presente.

Ringrazio i tanti volti incontrati in questo cammino che mi hanno permesso di capire che studiare è un modo per incontrare gli uomini di ogni tempo, per dialogare con loro, e per imparare da loro a dire e dare il proprio contributo autorevole, partecipando al miglioramento della vita nel continuo atto fecondante e creativo che ogni gesto-parola di sapienza veicola.

Valerio Chiovaro

"O Dio, che hai chiamato gli uomini a cooperare,
mediante il lavoro quotidiano,
al disegno immenso della tua creazione,
fa che nello sforzo comune di costruire un mondo più giusto e fraterno
ogni uomo trovi un posto conveniente alla sua dignità,
per attuare la propria vocazione
e contribuire al progresso di tutti"
(liturgia Romana)

Essenziali (e insufficienti) consigli per chi comincia, o ricomincia, lo studio universitario

Lo studio, come ogni lavoro, richiede fatica. Nel caso specifico la fatica dell'intelligenza; la fatica del minatore che scende nelle profondità (intellegere = leggere dentro) alla ricerca della vena d'oro e che tiene presente che solo la presenza nascosta dell'oro -e non l'enorme quantità di terra da spostare- motiva la fatica. È la stessa fatica dell'alpinista che scala le pareti rocciose per guardare ogni cosa (e magari le stesse cose quotidiane) dall'alto.

Lo studio è avere nuove prospettive, nuove finestre aperte sul sinfonico abisso della Verità. È imparare ad ascoltare le diverse e armoniche voci dell'eterna sinfonia del Vero, che è sempre Bello e, come ogni cosa preziosa, difficile da raggiungere e ancor più da possedere. Ogni tentativo di possedere lo studio si eleva alla consapevolezza di essere posseduti dalla Verità, di esistere nella Verità e di vivere meglio nella misura in cui si "capisce qualcosa di più".

Ecco alcuni consigli utili per "affrontare" la "discesa" e l'"ascesa" dello studio: il lavoro più umanizzante.

DA CIÒ CHE SEI A CIÒ CHE SCEGLI

Parti da ciò che sei: dalle tue predisposizioni, dai tuoi sogni ad occhi aperti, dalla tua fantasia e creatività, dalle tue passioni e anche dai tuoi limiti. Considerati in primo luogo fortunato perché hai la possibilità di studiare, fortuna (purtroppo) non a tutti accordata. Fortunato per la tua intelligenza che ti permette di capire e assaporare (nonostante la fatica e la lotta alla pigrizia); fortunato per le tue condizioni economiche (o meglio quelle dei tuoi genitori) che ti permettono (forse a fronte di qualche sacrificio da parte loro) di investire nella cultura una barca di soldi (non ti preoccupare, soldi ben spesi!)

Non ti fermare a ciò che fai: lo studio è investimento sul futuro, per questo non bisogna fermarsi alle fatiche del presente ripagate dalla lungimirante realizzazione di un futuro migliore. Ciò che farai per cinque o più anni renderà (e a volte determinerà) il tuo "chi sarai" per tutta la vita.

Sulla stanchezza: quando sei stanco, pensa al futuro, non studi per studiare, studi per realizzare.

Piccola nota personale. Un giorno un mio collega disse ad un professore, con tono malcontento: *sono stanco di studiare. Fermiamoci un attimo*! Il professore rispose: *molti giovani della tua età lavorano per otto ore come muratori, o altro. Loro hanno il diritto d'essere stanchi. Tu hai la responsabilità d'essere fortunato.*

Delle lezioni del succitato professore questa mi è rimasta più impressa.

Vivi ciò che sei e ciò che hai scelto. Come ogni lavoro lo studio ha bisogno dei suoi tempi e della sua preparazione. In altri termini la vita dello studente dovrebbe essere ordinata e regolare. La giornata scandita da orari e attività che aiutino la crescita complessiva della persona. Non devono mancare occasioni di confronto (gruppi con programmi definiti e progetti da realizzare), attività sportive, tempi di sintesi e silenzio, momenti di verifica e rilettura della giornata, relax e divertimento (di quello che non stanca) ecc. Insomma una vita piena, ma non disordinata; gioiosa ma non chiassosa; semplice ma non banale; ricca ma non autosufficiente; con tante persone ma senza improvvisazioni o aggregazioni spontaneiste e "morfogreggiche" (tipo gregge).
Più lo studente sa gestire il suo tempo e le proprie energie, meno tempo perde ed energie disperde. In altri termini "imparare" a studiare è imparare a fare il proprio dovere, a realizzarsi, a vivere la lotta dell'impegno come propedeuticità ad una responsabilità diversa che ci attende quale risposta d'amore. Imparare a studiare è vivere la scuola dell'amore concreto e incarnato, che chiede rinunce e *no*, a fronte di *si* più maturi e maturanti!

SU CIÒ CHE DIPENDE DA TE

Le tre parole chiave: motivazioni; metodi; strumenti

Motivazioni

Uno studio maturo richiede motivazioni mature alle quali fare sempre riferimento, soprattutto in quei momenti nei quali l'assenza dei frutti, o la fatica della semina, sopraffanno la gioia del raccolto. Il campo delle motivazioni è quello più importante; è lo stimolo contro l'inerzia di stato che può caratterizzare un periodo dello studio universitario; è la soluzione alla stanchezza o alle delusioni che il confronto col mondo accademico possono comportare; è l'arma vincente nella lotta contro le forze opposte che, qualche volta, alimentano la pigrizia o l'illusione del tutto è facile e subito.
Motivazioni che pur essendo di vario genere e livello, sono sempre pre-esplicitazioni della realizzazione personale. Realizzazione di un progetto di felicità che ci trascende nel servizio agli altri e nella risposta ad un Dio che dona la potenza dell'intelligenza.
Motivazioni che hanno sempre per fondamento l'amore autentico verso se stessi, verso le persone che ci stanno vicine e che ci staranno accanto. Tale amore, lungi dall'essere egoistico e narcisistico, permetterà, nei sentieri del nostro sapere, nuove modalità di comunicazione umanizzante, nuove risposte alla problematicità della realtà dell'oggi, nuovi spazi di Vero nella realtà vissuta.
In altri termini studio per: migliorarmi e migliorare gli altri, studio per leggere e rispondere ai problemi della vita, studio per scoprire la Verità, spesso non immediata,

in ciò che è immediatamente reale. Studio per vivere (e non vivo per studiare), e per meglio amare.

Metodi

I metodi di studio sono sempre generici. La sperimentazione personale diventa la possibilità di "personalizzarli”.
Un metodo può avere:
Scadenze e obbiettivi concreti e a breve termine. Ad esempio: studiare un determinato numero di pagine al giorno; terminare lo studio della materia entro una certa data; fare un certo numero d’esercizi in un definito periodo. Genericamente va considerato il rapporto mole di studio (numero di pagine, capitoli, esercizi, revisioni) /tempo di studio.
Lettura e ripetizione: lo studio/lettura di un testo può essere condotto, con buoni risultati, solo dopo l’attenta lettura dell’indice (o del sommario) che ne dà la struttura e della presentazione che ne dovrebbe dare lo stile e la motivazione. Si passa quindi allo studio del testo.
Primo studio è una prelettura rapida, si sfoglia il libro verificandone le parti, le sottoparti, i capitoli, i paragrafi ecc. Fermandosi qua e la per capire la struttura di base e la modalità di sviluppo dei contenuti. Una seconda va fatta ad *alta voce* (la memorizzazione è così favorita), *lenta e attenta*. Rispettando le punteggiature e la struttura del periodo sarà più facile individuare la proposizione principale che in genere veicola il concetto più importante. Sarà più rapida così la ricerca del **concetto** e/o della **parola chiave** in un testo.
La sottolineatura del testo e la divisione in paragrafi e sotto paragrafi intitolati dal concetto chiave scritto (in matita) a margine del testo stesso, favoriranno la memorizzazione e la ripetizione che deve seguire, a breve termine, la lettura di una certa mole (quantità) predefinita di pagine.
Raccogliendo i titoli e i sottotitoli di paragrafi e sotto paragrafi si avrà uno schema che sarà sinteticamente il corpo essenziale della materia. Una buona memorizzazione è aiutata dall’utilizzo di mappe mentali, strumenti che associano, secondo scale di priorità concettuale graficamente espresse, un’immagine/colore/ tipo di carattere ad ogni idea. La mappa concettuale è uno strumento utile ance per la ripetizione e la successiva rielaborazione.
Metodi più specifichi (SQ3R; DRTYA; MURDER, FVFL2R, ecc.) dipendono dal tipo di studio (scientifico, umanistico, artistico etc.) che si va facendo, quindi dalla necessità di utilizzare diverse facoltà intellettive, quali l’intuizione, l’analisi, o la memoria, .

Strumenti

Nello studio vi sono strumenti generici (buoni per affrontare ogni disciplina) e specifici (propri alla disciplina che si va studiando).

Mi fermerò a considerare i primi accennando appena ai secondi.

Il corso: È l'insieme delle lezioni che il professore svolge durante l'anno e che dovrebbe trattare gli argomenti (o parte di essi) oggetto della materia e dell'esame. È sempre bene frequentare e frequentare al meglio, sforzandosi di ben impiegare il tempo intermedio alle lezioni.

Programma della materia: raccoglie gli argomenti della materia da studiare e che sono oggetto dell'esame. Generalmente viene presentato dal professore durante la prima lezione accademica. Viene consegnato allo studente o ad inizio corso, o a fine corso. Alcune volte bisogna chiederlo al professore, o ritirarlo in una delle segreterie. È indispensabile per lo studio e per la ripetizione.

Libri di testo: sono i libri che, generalmente, i professori consigliano per lo studio.

Grammatica della propria lingua. Possedere la grammatica (non solo il libro, ma la scienza) è avere la possibilità di capire ciò che si legge. Spesso le difficoltà di comprensione di un testo (nonché le difficoltà di comunicazione verbale di un messaggio) sono legate alla difficoltà di fare l'analisi logica della proposizione e del periodo.

Vocabolario: È bene ricercare, quando non lo si conosce, il significato di un termine. Considerare l'origine del termine (etimologia) aiuterà a ricordarne il significato. La ricerca s'impone specialmente per quei termini "tecnici" che si ripetono, e per le parole "chiave" di un testo.

Dizionari/ Enciclopedie. Ogni disciplina ha i suoi dizionari (dizionario scientifico, d. giuridico, d. filosofico, d. biblico…). Ogni biblioteca, anche mediocre, contiene questi tipi di dizionari. La ricerca delle voci che interessano al proprio studio darà una sintesi che permetterà di inquadrare, con più facilità, l'argomento da approfondire. Ad esempio: se nello studio di una disciplina giuridica si parlerà di *giusnaturalismo*, cercherò su un dizionario giuridico, o filosofico di cosa si tratta. Se dovrò cominciare un corso di *geometria*, cercherò su un'enciclopedia scientifica di cosa tratta questa materia. Se affronto lo studio di un'opera filosofica o letteraria di un tale autore ne leggerò la sintesi in un dizionario appropriato. La lettura delle voci dei dizionari dà la cornice entro la quale collocare il dipinto del mio studio. Vi assicuro è tutto tempo guadagnato.

Dispense: È il "materiale" usato dai professori durante i corsi che gli stessi prof., a volte, mettono a disposizione. Spesso sono indicazioni schematiche, molto sintetiche. Non sempre sono sufficienti alla preparazione dell'esame. Questo ancor più se si tratta di dispense redatte dagli studenti, magari dagli appunti presi a lezione o dalla sbobinatura delle stesse. Studiare solo su queste, se a volte permette di superare l'esame, sempre non dà una preparazione utile e approfondita per affrontare i problemi che il mondo del lavoro presenterà, né, tanto meno, per possedere la capacità di "domino" della disciplina.

Appunti: sono le sintesi delle discipline ottenute o dai libri di testo, ed integrati dalle lezioni seguite durante i corsi accademici. I migliori appunti sono quelli personali, cioè quelli che tu scrivi quando frequenti, o che tu redigi quando sintetizzi la materia… Degli appunti degli altri, come si diceva prima, non ti fidare troppo.

Eserciziari: utilissimi per lo studio delle materie scientifiche, raccolgono esercizi già svolti attraverso i quali ti puoi preparare per l'esame scritto.

Riviste scientifiche: sono sussidi che contengono trattazioni, spesso approfondite, di particolari argomenti. Le diverse discipline hanno le riviste specifiche (riviste di chimica, giurisprudenza, letteratura, etc.). In genere servono per i corsi monografici, o per gli approfondimenti del lavoro di tesi.

Tanti altri possono essere gli strumenti generali. Dall'uso di software specifico, all'internet. L'importante è sapere ciò che si cerca per evitare di perdere tempo inseguendo le proprie curiosità, o giocherellando. Questo specialmente per ciò che riguarda interne. Enciclopedie come Wikipedia, o una ricerca su web non possono sostituire uno studio approfondito che si basa, più che sulla ricerca di tante informazione , sull'approfondimento delle informazioni giuste.

Ci sono, inoltre, **strumenti specifici**, tutto ciò che a vario livello (come fonti, o come sussidi) riguarda lo studio di una specifica disciplina. Ad esempio: la Bibbia (nelle diverse traduzioni e versioni in lingua originale) per gli studiosi di Teologia; i codici per gli studenti di Giurisprudenza; il Merk (raccolta di tavole e tabelle) per i chimici; i calcolatori per i matematici… Ma non entriamo nello specifico.

Altri tipi di strumenti, ben più importanti dei primi sono le persone:

I professori: che sono a disposizione degli studenti durante orari settimanali. Va individuato immediatamente quello col quale poter stabilire un rapporto sempre funzionale alla crescita intellettiva.

I tutor: sono figure appositamente preposte all'accompagnamento dello studente.

I colleghi più anziani (quelli fidati) che possono consigliare metodi e strategie per lo studio delle materie, fornire appunti, libri ecc. I colleghi dello stesso anno di corso con i quali studiare, ripetere (viaggiare, mangiare, giocare, etc.). Se si riesce a vivere bene con i propri colleghi (cosa non sempre facile) l'università (specialmente quando si frequenta) diventa molto più piacevole.

Gli amici che, avendo vissuto, a diversi livelli, la stessa esperienza di fatica per la realizzazione di un progetto, sapranno dire la parola giusta (che è sempre di comprensione e conforto) al momento giusto.

Infine, ci sono i luoghi:

L'Università: in effetti, più che un luogo l'università dovrebbe essere un ambiente dove, attraverso la ricerca e la didattica, si cresce nel sapere e nella tecnica. Un ambiente fatto di volti, di strutture organizzative, di servizi. Dal punto di vista didattico una Università (o ateneo) si divide in diverse facoltà che raccolgono la loro interno più corsi di laurea. I responsabili di questi livelli di struttura, democraticamente eletti tra i professori ordinari, sono il rettore; il preside, il presidente del corso di laurea. Le persone che svolgono attività di didattica sono i professore (ordinari, straordinari, associati) e i ricercatori. Inoltre, vi sono i professori a contratto, liberi professionisti che vengono chiamati dall'università con la sola funzione didattica di tenere dei corsi per i quali non c'è del personale strutturato. L'altra anima della università è la ricerca, questa si svolge nei dipartimenti, coordinati dal direttore di dipartimento. I dipartimenti sono composti da docenti, ricercatori, tecnici laureati, tecnici di affini aree disciplinari e organizzati ulteriormente in laboratori.

Per rendere funzionante tutto questo apparato didattico e di ricerca vi è un'anima amministrativa, coordinata dal direttore amministrativo e suddivisa in diverse funzioni/uffici che vanno dal settore delle risorse umane, al personale delle segreterie per gli studenti; dagli addetti alla biblioteca ai segretari dei dipartimenti.

Vi sono poi una serie di servizi agli studenti come le biblioteche, la mensa, il centro universitario sportivo, ecc. La cosa fondamentale da capire entrando in università è che non si tratta di un contenitore, né di un edificio. Èuna comunità educativa, un insieme di volti e storie del quale si diventa parte e che dovrebbero condividere la mission del miglioramento culturale e tecnico del territorio nel quale insistono e del mondo intero.

SU CIÒ CHE NON DIPENDE DA TE

Anche nell'ambito universitario non tutto è prevedibile, né tutto dipende dalla nostra applicazione. Ciò può comportare una certa discordanza tra l'impegno profuso e i frutti raccolti. Ecco alcuni elementi da tenere in considerazione:

La fortuna: riguardo all'interrogazione, o ad un esame scritto. Può capitare che, a fronte della tua preparazione enciclopedica l'insegnate ti chieda qualcosa che tu non sappia, o che in quel momento non ricordi. Può capitare che un esame vada male. non ti scoraggiare, cerca di capire non solo quali contenuti imparare, ma anche come si sostiene un esame.

Il tuo stato emotivo che ti può bloccare in un determinato momento, come quello dell'interrogazione. S'impara a controllare la dimensione emotiva con una buona vita di relazioni sociali (ecco l'importanza di partecipare a riunioni e ad attività di gruppi intelligenti) e con diversi espedienti, quali le simulazioni delle interrogazioni con i compagni di studio.

La predisposizione/luna del professore. Anche i professori, essendo più o meno umani, si possono alzare la mattina col piede sbagliato (e capita anche quando nella giornata ci sono sessioni d'esami).

VALUTAZIONI E RISULTATI

La valutazione universitaria (il voto nel libretto) è spesso motivo di scontentezza. Un "dialogo" di pochi minuti, difficilmente sembra dare la possibilità di una valutazione oggettiva. Di fatto, per un professore di comprovata esperienza bastano pochi minuti per capire la maturità di contenuti ed espressione della propria disciplina. Va anche detto che tanti sono gli elementi che concorrono alla valutazione, alcuni li abbiamo indicati sopra. Vi è poi la frequenza e il come del frequentare, lo scritto (ove è prescritto), i seminari, i pre-esami, ecc. Ogni giudizio esterno è comunemente riduttivo. Va sempre tenuto in considerazione che la valutazione più importante è l'autovalutazione che ha come elemento decisivo l'impegno impiegato, più che la quotazione attribuita dal prof. con la votazione finale. In altri termini sii contento se hai fatto e dato il massimo più che se hai preso il massimo. Nello studio, come nella vita, bisogna sempre ambire al massimo (cioè mettersi nelle condizioni di ottenere il massimo) e accontentarsi della minima valutazione (ovvero saper cogliere ciò che la vita, indipendentemente dal nostro operare, ci offre). Rimane la tua di valutazione che sarà positiva nella misura in cui avrai dato il tutto di ciò che sei.

CONCLUSIONI: NEL CAMMINO DELLA VITA

Insomma, motivazioni, metodi e strumenti per dare carne ad un “sogno ad occhi aperti” che, come i sogni della tua maturità, ti chiameranno alla lotta contro “il presunto facile”, per “il conquistato bello”. Lotta che ti insegna a distinguere i sogni dalle illusioni, spingendoti, nel cammino della vita, oltre le cadute e le svolte delle scelte; aiutandoti a ripartire sempre da ciò che sei per realizzare ciò che scegli di essere.

Il cammino della vita è certo in salita,
ma non lungo strade senza uscita.
Il cammino della vita è certo in profondità
ma non per nasconderti o ottenebrarti.
Il cammino della vita è qualche volta monotono,
ma dietro l’angolo ti attende l’inaspettata novità di riscoprirti sempre lo stesso
e sempre di più di ciò che sei, o che progettavi di essere…
tu così capace di autoesaltarti e ancor più di sottovalutarti.

Il cammino della vita è questione di compagnia e di attesa,
ma mai d’intruppamento, d’inseguimento, o d’inattività inerte.
Il cammino della vita ti attende perché,
ricco di ciò che sei, ti si possa schiudere ciò che vuoi,
donandoti, tra la polvere del tuo andare,
la Verità in ciò che divieni.
Il cammino della vita è questione di condivisione
delle cose belle e brutte, facili e difficili.
Ma è soprattutto nelle seconde
che la mano di chi ti accompagna,
pur confondendosi con la nebbia della stanchezza e della disillusione,
ti si tende dolcemente e teneramente davanti,
o, forse impercettibilmente, si poggia sulla tua spalla.

Sono con te, in questo cammino ricco di fatica e di condivisione.
Sulla stessa strada.
A volte davanti, qualche volta dietro, più spesso accanto.

Tuo,
don Valerio

Lettera di San Tommaso d'Aquino a uno studente

Carissimo in Cristo, Giovanni,
giacché mi hai chiesto in che modo tu debba applicarti allo studio per acquistare il tesoro della scienza, ecco in proposito il mio consiglio.
Non voler entrare subito in mare ma arrivaci attraverso i ruscelli, perché è dalle cose più facili che bisogna pervenire alle più difficili.
Questo dunque è l'avviso mio che ti servirà di regola.
Voglio che tu sia tardo a parlare e restio a scendere in parlatorio.
Abbi purità di coscienza.
Non tralasciare di attendere alla preghiera.
Sii amante della tua cella.
Mostrati amabile con tutti.
Non essere per nulla curioso dei fatti altrui.
Non essere troppo familiare con nessuno, perché la familiarità eccessiva genera disprezzo e dà occasione di trascurare lo studio.
Non t'intromettere in nessun modo ne discorsi e nei fatti secolari.
Non divagare su tutto.
Non lasciar d'imitare gli esempi dei santi e dei buoni.
Non guardare chi è colui che parla, ma tieni a mente tutto ciò che di buono egli dice.
Procura di comprendere ciò che leggi ed ascolti.
Certìficati delle cose dubbie e studiati di riporre nello scrigno della memoria tutto quello che ti sarà possibile.
Non cercare infine cose superiori alla tua capacità.
Seguendo queste norme, metterai fronde e produrrai utili frutti nella vigna del Signore, in tutti i giorni di tua vita.
Mettendo in pratica questi insegnamenti potrai raggiungere la mèta alla quale tu aspiri.
Stai bene.

AUTODIAGNOSI; Che studente sei? In quale tipo ti riconosci?

Ecco alcuni "ritratti" tipologici di studenti, che mettono in evidenza il tipo di approccio con lo studio (ma anche, si deve dire, con la vita).
Leggendoli, ognuno di noi può individuare a quale "tipo" appartiene (almeno a grandi linee).
1. Il farfallone estroverso
Ama l'idea di studiare, ma non ama studiare. E' dedito alla ricerca di nuovi materiali di studio che fanno tendenza, ma rimanda con facilità l'inizio dello studio. Si fa distrarre da qualsiasi cosa in quanto alla base di tutto c'è una mancanza di volontà. In questo modo, rischia di avere poco successo non solo negli studi ma anche nella vita.
2. Il secchione angosciato
Si tormenta e si angoscia continuamente. Studia come un dannato senza alcuna gioia ma con la costante paura di non essere all'altezza della situazione, di non arrivare in tempo a studiare tutte le materie e di non possedere tutte le conoscenze del caso. Il punto debole di questi studenti è la mancanza di serenità interiore e del distorto sistema percettivo-reattivo tra sé e sé, tra sé e gli altri e tra sé e il mondo.
3. Il secchione ingordo
A lui piace studiare e non soffre; anzi è contento quando gli insegnanti assegnano parecchi compiti. Studia molto, ma si tratta d'un lavoro fine a se stesso. Per questo motivo si prende tutte le maledizioni dei compagni.
4. Il narcisista
Sa sfruttare bene le potenzialità del suo cervello, ma è tronfio di sé, innamorato della sua intelligenza come Narciso della sua bellezza. Ama mostrarsi agli altri per la sua cultura e vive come il culturista per plasmare, lustrare, gonfiare ed esibire i propri muscoli. Il narcisista è malvisto dai compagni e ha scelto di privilegiare il cervello rispetto a tutta la sua personalità.
5. Lo studente modello
Studia con raziocinio e impegno. Non è angosciato dall'idea di fare "bella figura", né è ingordo. Studia con impegno ciò che gli interessa anche al di fuori delle materie perché è spinto da un sano piacere della conoscenza e dell'acculturazione. E' critico nei confronti delle cose ed è assertivo nel modo di esporle.
6. Lo studente normale
E' impegnato nello studio per realizzarsi. Non ha tutta la spinta dello studente modello, né si sbizzarrisce in letture o studi al di là delle materie scolastiche. Segue preferibilmente il suo stile cognitivo sia se abbia un approccio globale che analitico.
7. Il creativo
Ha particolare sensibilità nella percezione delle cose, capacità di produrre idee divergenti, capacità di sintesi e analisi in modo nuovo e inusuale. E' sempre pronto a cercare nuove vie e nuove soluzioni. Non è sempre apprezzato, spesso viene trascurato. La creatività unita a un costante impegno allo studio è la chiave del successo.
Ecco: adesso, conoscendo meglio il tuo stile cognitivo e il tipo di studente che reputi di essere, potrai capire di più i tuoi limiti e i tuoi pregi.

Da S. Casucci, *Apprendere, Comunicare, lavorare in gruppo,* pag 34-35.

Foglio per gli appunti (Cornell)

Materia ________________________;Argomento____

Lezione N°_____________________; Data_____________________;Docente____________________________

Sezione indice

area degli appunti

Sezione del riassumere