

## CAPITOLO IV

### LINEE ELETTRICHE: funzionamento in regime permanente

Per lo studio del regime permanente (o di funzionamento normale) delle linee elettriche si imporrà che i sistemi delle tensioni di fase e delle correnti di linea siano sistemi trifase simmetrici di sola sequenza diretta.

In queste condizioni, si può considerare l'analisi del funzionamento di una sola delle tre fasi delle linee, essendo evidente che, determinate le tensioni e le correnti relative ad una fase, le analoghe tensioni e correnti relative alle altre due fasi si calcolano semplicemente moltiplicando per gli operatori complessi  $\alpha$  e  $\alpha^2$ , che saranno appropriatamente definiti. Si perverrà, quindi, al circuito monofase equivalente alla sequenza diretta delle linee elettriche; in un primo momento sarà derivato il cosiddetto circuito equivalente "a parametri distribuiti" mentre, successivamente, sarà messo a punto il cosiddetto circuito equivalente "a parametri concentrati", certamente di maggiore utilità pratica ai fini del dimensionamento delle linee.

#### 1. Le costanti primarie ed il circuito equivalente monofase a parametri distribuiti

Lo studio delle costanti primarie delle linee elettriche ha posto in evidenza che è lecito attribuire a ciascun conduttore di fase un unico coefficiente di induzione  $L_s$ , detto induttanza di servizio, che, per come è stato definito, è capace di portare contemporaneamente in conto sia i fenomeni di auto che di mutua induzione con gli altri conduttori; similmente, è possibile attribuire alla singola fase anche un coefficiente di capacità  $C_s$ , detta capacità di servizio, che porta contemporaneamente in conto gli accoppiamenti capacitivi tra un conduttore e gli altri conduttori e tra lo stesso conduttore ed il terreno. Tali costanti consentono, cioè, di disaccoppiare dal punto di vista elettromagnetico ed elettrostatico le tre fasi della linea che, pertanto, possono essere considerate indipendenti tra loro. Ricordandosi anche delle altre due costanti primarie, che sono la resistenza e la conduttanza, in questo capitolo vedremo come usarle per individuare un circuito equivalente monofase delle linee che sia idoneo per lo studio a regime permanente.

Le costanti primarie di una linea trifase sono state calcolate per unità di lunghezza della linea e imponendo specifiche ipotesi.

L'induttanza di servizio è stata calcolata, ad esempio, nell'ipotesi che detto coefficiente di induzione venga attraversato dall'intera corrente di linea; similmente, per la capacità di servizio è stato ipotizzato che detto coefficiente di capacità debba essere sottoposto all'intera tensione di fase; simili considerazioni valgono anche per la resistenza e per la conduttanza.

Ciò premesso, è facile intuire che comunque si decida di costruire un possibile circuito equivalente monofase dell'unità di lunghezza della linea, si finisce per commettere degli

errori, perchè non si riesce a mantenere con rigore le condizioni di funzionamento ipotizzate durante il calcolo delle costanti primarie. Ad esempio, se si pongono longitudinalmente in serie resistenza ed induttanza, in modo che vengano attraversate dalla intera corrente di linea, su tali parametri si verificherà una caduta di tensione, per cui ai capi dei due rimanenti parametri, capacità e conduttanza, posti in posizione trasversale, non si avrà la piena tensione di linea; la difformità rispetto alle condizioni di calcolo della capacità e della conduttanza, e quindi gli errori di modellazione del funzionamento della linea, saranno tanto più grandi quanto più grande sarà la caduta di tensione sull'induttanza e la resistenza. Dualmente, se si pongono i parametri capacità e conduttanza immediatamente in parallelo alla tensione di fase, lungo essi si verificheranno delle perdite di corrente, cosicché la corrente che attraverserà l'induttanza e la resistenza, posti successivamente e longitudinalmente in serie, risulterà diminuita rispetto alla corrente di linea nel punto di partenza; anche in questo caso, la difformità rispetto alle condizioni di calcolo della induttanza e della resistenza, e quindi gli errori di modellazione del funzionamento della linea, saranno tanto più grandi quanto più grande sarà la perdita di corrente lungo la capacità e lungo la conduttanza.

Esiste un solo modo che consente di minimizzare gli errori di modellazione sopra descritti, fino a renderli ingegneristicamente accettabili, ed è quello di usare un circuito equivalente monofase della linea, che pur comprendendo le quattro costanti primarie calcolate per unità di lunghezza, sia riferito a lunghezze della linea piccolissime, al limite infinitesime. In queste condizioni, infatti, comunque si decida di allocare i parametri longitudinali (induttanza e resistenza) ed i parametri trasversali (capacità e conduttanza) gli errori sulle tensioni o sulle correnti saranno piccolissimi perché piccolissime saranno le cadute di tensione sui parametri longitudinali o le perdite di corrente lungo i parametri trasversali. Un circuito equivalente così fatto è denominato "a parametri distribuiti" ed una sua possibile configurazione è mostrata nella figura IV.1.

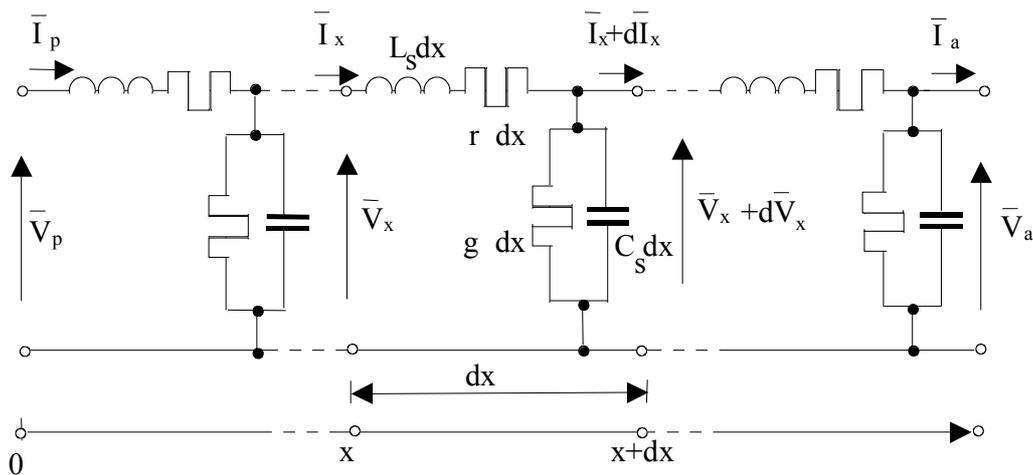


Fig. IV.1 - Circuito monofase equivalente, a parametri uniformemente distribuiti, di una linea trifase

Un siffatto circuito equivalente appare immediatamente scomodo per un pratico utilizzo, se l'obiettivo principale è quello del corretto dimensionamento di una linea al fine di contenere le cadute di tensione e/o di calcolare le perdite di potenza attiva e, quindi, di stimare le sovratemperature, durante il normale esercizio.

Fortunatamente, dallo studio del circuito equivalente monofase a parametri distribuiti, si riesce a pervenire ad un circuito più semplice e di immediata fruibilità pratica; esso è denominato circuito equivalente monofase "a parametri concentrati".

Con questo obiettivo, si faccia nuovamente riferimento alla fig.IV.1; a ciascun elemento infinitesimo della linea di lunghezza  $dx$  è attribuita una resistenza,  $r dx$ , una induttanza di servizio,  $L_s dx$ , una capacità di servizio,  $C_s dx$  ed una conduttanza,  $g dx$ .

Il conduttore di ritorno, necessario solo per poter giustificare la circolazione delle correnti nel circuito equivalente monofase e per avere un riferimento per le tensioni (si ricorda che nel circuito trifase di partenza il conduttore di ritorno non è fisicamente necessario, perché, istante per istante, la somma delle tre correnti di fase da risultato nullo), che è denominato neutro, è un conduttore fittizio di impedenza longitudinale nulla.

Nella fig.IV.1 si è indicato con  $\bar{V}_p(\bar{V}_a)$  ed  $\bar{I}_p(\bar{I}_a)$  la tensione e la corrente in partenza (arrivo) della linea e con  $\bar{V}_x$  ed  $\bar{I}_x$  la tensione e la corrente alla distanza  $x$  dall'origine della stessa, supposta di lunghezza pari ad  $a$ .

I principi di Kirchhoff applicati all'elemento infinitesimo di linea compreso tra le ascisse  $x$  e  $x + dx$  danno:

$$\begin{aligned} \bar{V}_x - (\bar{V}_x + d\bar{V}_x) &= (r dx + j\omega L_s dx) \bar{I}_x \\ - d\bar{I}_x &= (g dx + j\omega C_s dx) (\bar{V}_x + d\bar{V}_x) \end{aligned} \quad (IV.1)$$

da cui, trascurando gli infinitesimi del secondo ordine, si ottiene:

$$\begin{cases} - \frac{d\bar{V}_x}{dx} = (r + j\omega L_s) \bar{I}_x = \dot{z}_1^1 \bar{I}_x \\ - \frac{d\bar{I}_x}{dx} = (g + j\omega C_s) \bar{V}_x = \dot{y}_1^1 \bar{V}_x \end{cases} \quad (IV.2)$$

con:

$$\begin{cases} \dot{z}_1^1 = (r + j\omega L_s) \\ \dot{y}_1^1 = (g + j\omega C_s) \end{cases}$$

nelle (IV.2)  $\dot{z}_1^1$ ,  $\dot{y}_1^1$  sono, rispettivamente, l'impedenza serie e l'ammettenza derivata alla sequenza diretta della linea, per unità di lunghezza.

Derivando le (IV.2) rispetto ad  $x$  e con semplici passaggi si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \bar{V}_x}{dx^2} &= \dot{z}_1^1 \dot{y}_1^1 \bar{V}_x = K^2 \bar{V}_x \\ \frac{d^2 \bar{I}_x}{dx^2} &= \dot{z}_1^1 \dot{y}_1^1 \bar{I}_x = K^2 \bar{I}_x\end{aligned}\quad (\text{IV.3})$$

con:

$$\sqrt{\dot{z}_1^1 \dot{y}_1^1} = \dot{K} = K' + jK'';$$

La costante  $\dot{K} = K' + jK''$  è detta costante di propagazione; la sua parte reale  $K'$  è denominata costante di attenuazione mentre il coefficiente  $K''$  della parte immaginaria è denominato costante di fase. E' utile osservare che la costante di propagazione nelle linee in AT ha un modulo pari a circa  $10^{-3} \text{ km}^{-1}$ , che poco si discosta dal valore della costante di fase; ad esempio, in una linea a 380 kV con conduttori a fascio binato risulta  $\dot{K} = (0,048 + j1,065)10^{-3} \text{ km}^{-1}$ .

Le (IV.3) sono due equazioni differenziali del secondo ordine. La funzione  $\bar{V}_x$ , integrale della prima, ha, come ben noto, la forma:

$$\bar{V}_x = \bar{M}e^{\dot{K}x} + \bar{N}e^{-\dot{K}x} \quad (\text{IV.4})$$

con  $\bar{M}$  ed  $\bar{N}$  costanti di integrazione.

Derivando, poi, la (IV.4) rispetto a  $x$  si ottiene:

$$\frac{d\bar{V}_x}{dx} = \bar{M}\dot{K}e^{\dot{K}x} - \bar{N}\dot{K}e^{-\dot{K}x} \quad (\text{IV.5})$$

e sostituendo la (IV.5) nella prima delle (IV.2), si ottiene la funzione  $\bar{I}_x$ , integrale della seconda delle (IV.3), e cioè:

$$\bar{I}_x = -\frac{1}{\dot{Z}_0} \left( \bar{M}e^{\dot{K}x} - \bar{N}e^{-\dot{K}x} \right), \quad (\text{IV.6})$$

con:

$$\dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{\dot{z}_1^1}{\dot{y}_1^1}} = \sqrt{\frac{(r + j\omega L_s)}{(g + j\omega C_s)}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1^1}{\dot{Y}_1^1}} = \sqrt{\frac{(r + j\omega L_s)a}{(g + j\omega C_s)a}},$$

ed essendo  $\dot{Z}_1^1$  ( $\dot{Y}_1^1$ ) l'impedenza (ammettenza) totale della stessa. L'impedenza  $\dot{Z}_0$ , detta impedenza caratteristica, nelle linee AT con conduttori nudi ha valori dell'ordine delle centinaia di  $\Omega$  (ad esempio circa 400  $\Omega$  nel caso di conduttori singoli e 300  $\Omega$  nel caso di conduttori a fascio binato); nel caso di linee AT in cavo assume valori molto più piccoli, stante i diversi valori dei parametri per unità di lunghezza di tale tipo di linea, e cioè valori dell'ordine di 30÷60  $\Omega$ .

Le costanti di integrazione  $\bar{M}$  e  $\bar{N}$  si determinano in base alle condizioni ai limiti. Detti, infatti,  $\bar{V}_p$  ed  $\bar{I}_p$  la tensione e la corrente in partenza della linea (e cioè all'ascissa  $x = 0$  nella fig.IV.1) le (IV.4) e le (IV.6) porgono:

$$\begin{aligned}\bar{V}_p &= \bar{M} + \bar{N} \\ \bar{I}_p &= -\frac{1}{\dot{Z}_o}(\bar{M} - \bar{N}),\end{aligned}\tag{IV.7}$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned}\bar{M} &= (\bar{V}_p - \dot{Z}_o \bar{I}_p) / 2 \\ \bar{N} &= (\bar{V}_p + \dot{Z}_o \bar{I}_p) / 2.\end{aligned}\tag{IV.8}$$

Sostituendo, poi, nelle (IV.4) e (IV.6) i valori trovati di  $\bar{M}$  ed  $\bar{N}$ , e ricordando, inoltre, che:

$$\frac{e^{\dot{K}x} + e^{-\dot{K}x}}{2} = \cosh \dot{K}x; \quad \frac{e^{\dot{K}x} - e^{-\dot{K}x}}{2} = \sinh \dot{K}x\tag{IV.9}$$

si ha in conclusione:

$$\begin{aligned}\bar{V}_x &= \bar{V}_p \cosh \dot{K}x - \dot{Z}_o \bar{I}_p \sinh \dot{K}x \\ \bar{I}_x &= -\frac{\bar{V}_p}{\dot{Z}_o} \sinh \dot{K}x + \bar{I}_p \cosh \dot{K}x.\end{aligned}\tag{IV.10}$$

Le relazioni (IV.10) permettono di ricavare il valore della tensione e della corrente in ogni punto della linea, noti i valori delle stesse grandezze in partenza.

Al fine di ricavare il circuito monofase equivalente a parametri concentrati della linea, si particolarizzino, in primo luogo, le (IV.10) per  $x = a$ , ottenendo così i valori della tensione  $\bar{V}_a$  e della corrente  $\bar{I}_a$  in arrivo:

$$\begin{aligned}\bar{V}_a &= \bar{V}_p \cosh \dot{K}a - \dot{Z}_o \bar{I}_p \sinh \dot{K}a \\ \bar{I}_a &= -\frac{\bar{V}_p}{\dot{Z}_o} \sinh \dot{K}a + \bar{I}_p \cosh \dot{K}a.\end{aligned}\tag{IV.11}$$

Se si risolvono, poi, le (IV.11) rispetto a  $\bar{V}_p$  ed  $\bar{I}_p$ , a si ottengono le relazioni che permettono di ricavare la tensione e la corrente in partenza, noti i valori di tali grandezze all'arrivo, e cioè:

$$\begin{aligned}\bar{V}_p &= \bar{V}_a \cosh \dot{K}a + \dot{Z}_o \bar{I}_a \sinh \dot{K}a \\ \bar{I}_p &= \frac{\bar{V}_a}{\dot{Z}_o} \sinh \dot{K}a + \bar{I}_a \cosh \dot{K}a\end{aligned}\quad (IV.12)$$

## 2. Il circuito equivalente monofase a parametri concentrati

Le relazioni (IV.12) sono strutturalmente identiche alle equazioni che descrivono il comportamento in regime permanente di un doppio bipolo lineare passivo. Si ricorda, infatti, che le equazioni che legano le grandezze di ingresso e di uscita di un doppio bipolo lineare passivo (Fig. IV.2) si presentano nella ben nota forma:

$$\begin{aligned}\bar{V}_p &= \dot{A} \bar{V}_a + \dot{B} \bar{I}_a \\ \bar{I}_p &= \dot{C} \bar{V}_a + \dot{D} \bar{I}_a\end{aligned}\quad (IV.13)$$

ne consegue – per confronto - che una linea, ai suoi morsetti di ingresso e di uscita, si comporta come un doppio bipolo lineare passivo le cui costanti quadripolari assumono i valori:

$$\dot{A} = \dot{D} = \cosh \dot{K}a \quad , \quad \dot{B} = \dot{Z}_o \sinh \dot{K}a \quad , \quad \dot{C} = \frac{\sinh \dot{K}a}{\dot{Z}_o}.$$

(IV.14)

Come ben noto, poi, è possibile rappresentare un doppio bipolo lineare passivo attraverso un circuito monofase equivalente a costanti concentrate (Fig.IV.3), i cui parametri sono legati ai valori delle costanti quadripolari attraverso le relazioni indicate nella fig.IV.3 stessa.

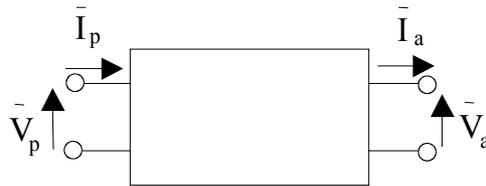


Fig. IV.2 – Schema a blocchi di un doppio bipolo lineare passivo

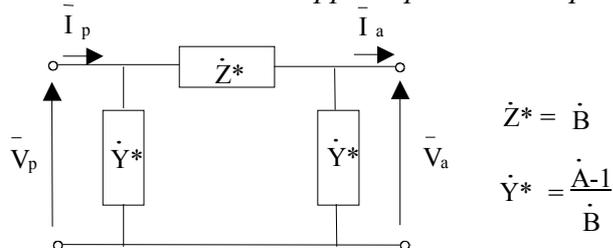


Fig. IV.3 - Circuito equivalente di un doppio bipolo lineare passivo

Sfruttando, allora, la succitata proprietà dei doppi bipoli e l'equivalenza, ai morsetti di ingresso e di uscita, con una linea trifase si può, in conclusione rappresentare quest'ultima attraverso un circuito monofase equivalente a parametri concentrati; tale circuito è quello della fig.IV.4.

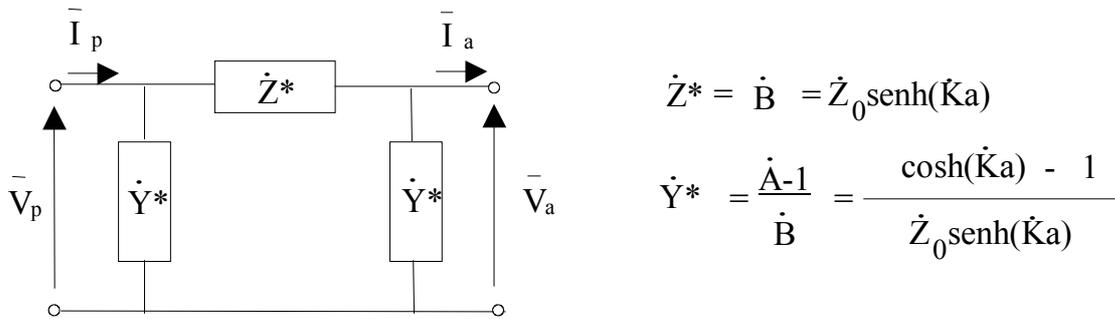


Fig. IV.4 – Circuito monofase equivalente a parametri concentrati di una linea trifase

Il circuito equivalente riportato nella fig.IV.4 è valido qualunque sia la lunghezza della linea; nel caso, invece, di linee non molto lunghe ( $a < 400$  km) si può pervenire ad un circuito equivalente semplificato. Le espressioni dei parametri del circuito equivalente della fig.IV.4 si possono, infatti, esprimere nella forma:

$$\dot{Z}^* = \dot{B} = \dot{Z}_0 \sinh \dot{K}a = \sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Y}_1}} \sinh \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1} = \dot{Z}_1 \frac{\sinh \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1}}{\sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1}}$$

$$\dot{Y}^* = \frac{\dot{A} - 1}{\dot{B}} = \frac{\cosh \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1} - 1}{\sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Y}_1}} \sinh \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1}} = \frac{\dot{Y}_1}{2} \frac{\cosh \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1} - 1}{\frac{\sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1}}{2} \sinh \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1}};$$

(IV.15)

se, adesso, si osserva che per linee corte il prodotto  $\dot{Z}_1 \dot{Y}_1$  è piccolo e, pertanto, il seno iperbolico si può confondere con il rispettivo argomento, e che il coseno iperbolico si può approssimare con i primi due termini del suo sviluppo in serie, dalle (IV.15) risulta:

$$\dot{Z}^* = \dot{Z}_1 \frac{\sinh \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1}}{\sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1}} \cong \dot{Z}_1 = r_1^1 + jX_1^1$$

(IV.16)

$$\dot{Y}^* = \frac{\dot{Y}_1}{2} \frac{\cosh \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1} - 1}{\sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1} \sinh \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1}} \cong \frac{\dot{Y}_1}{2} \frac{1 + \frac{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1}{2} - 1}{\frac{\dot{Z}_1 \dot{Y}_1}{2}} \cong \frac{\dot{Y}_1}{2} = \frac{1}{2} (g_1^1 + jB_1^1);$$

il circuito monofase equivalente alla sequenza diretta di una linea corta è, pertanto, quello della Fig.IV.5.

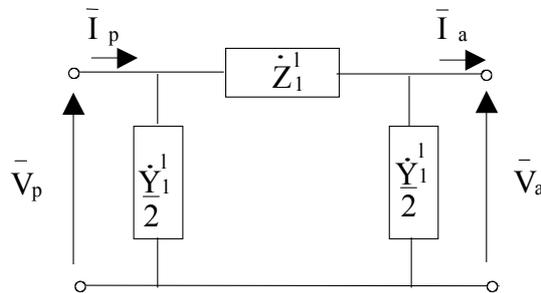


Fig. IV.5. Circuito monofase equivalente di una linea corta

E' utile osservare che il circuito equivalente della fig.IV.5 può subire un'ulteriore semplificazione se si fa riferimento alle linee di distribuzione dell'energia; tali linee sono caratterizzate da lunghezze sicuramente inferiori ai 100 km e da tensioni di esercizio non elevate. In tali condizioni si può tranquillamente trascurare l'ammettenza trasversale  $\dot{Y}_1^1$  e rappresentare la linea con la sola impedenza serie  $\dot{Z}_1^1$ ; si perviene, pertanto, al circuito equivalente della fig.IV.6.

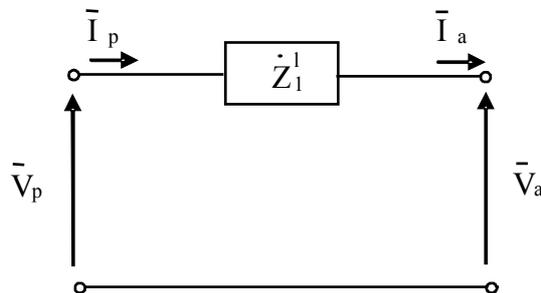


Fig. IV.6 - Circuito monofase equivalente di una linea di distribuzione